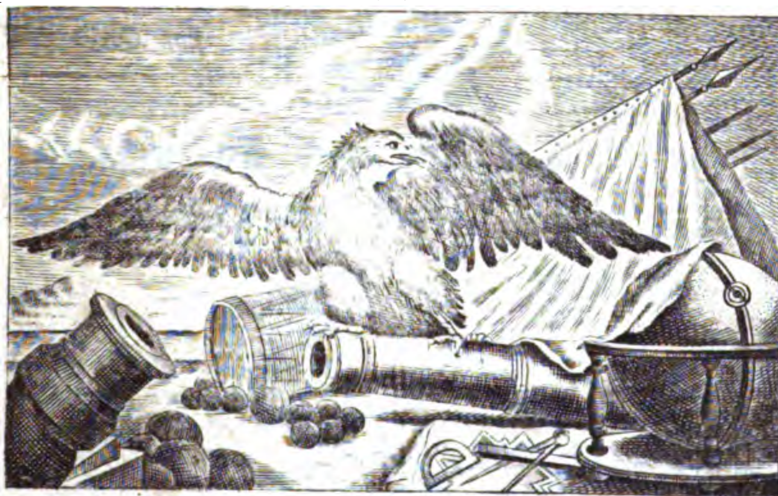

CEDANT ARMA

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES

ANNÉE MDCCLVIII.



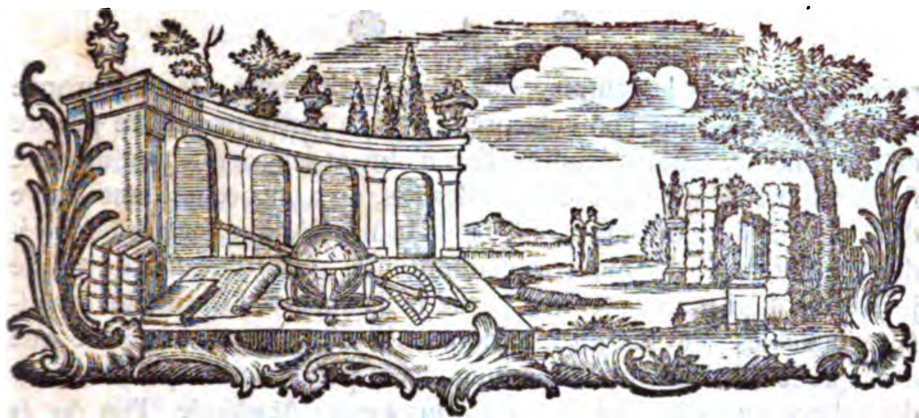
À BERLIN.
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLXV.

Imprimé
par Ordre de l'Académie.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.





DES EFFETS
DU SEL ALCALI DU SEL COMMUN
SUR LE RE'GULE D'ANTIMOINE.

PAR M. MARGGRAF.

Traduit de l'Allemand.



I.

On sçait que le Régule d'Antimoine est la partie métallique de ce minéral, qu'on nomme en Latin *Antimonium*, & en Allemand *Spiesglass.* L'Antimoine est composé de cette partie métallique qui forme le Régule, & de souffre. Le Régule peut être séparé du souffre par plusieurs voyes différentes, comme par d'autres métaux, par des sels, & aussi par des terres alcalines. Dans le premier cas, la partie métallique de l'Antimoine conserve toujours un peu d'impureté qui provient du métal employé pour sa séparation;

ration; mais dans les autres, elle devient plus pure, & plus propre aux travaux nets que l'on entreprend avec la partie métallique propre de l'Antimoine. Mais, comme l'on n'obtient jamais que peu de cette ſubſtance métallique par l'addition des ſels, on a encore une autre voye de la ſéparer de ſon ſouffre, ſavoir de brûler l'Antimoine, & de le réduire enſuite avec des matieres combuſtibles. C'eſt de cette voye que je me ſuis ſervi pour obtenir la partie métallique de l'Antimoine néceſſaire pour les travaux en queſtion. Je n'explique pas ici ce que c'eſt que le ſel alcali du ſel commun. On peut voir ce que j'en ai dit dans deux autres Mémoires que j'ai lûs à cette Académie, l'un *ſur la meilleure maniere de ſéparer la ſubſtance alcaline du ſel commun*, l'autre deſtiné à prouver *que les partie alcaline ſéparée du ſel de cuiſine eſt un ſel alcali réel*, *& non une terre alcaline*. Je donnerai ici à ce ſel le nom de *ſel alcali natif*.

II. Pour me procurer donc un Régule d'Antimoine auſſi pur qu'il étoit poſſible, j'ai ſuivi la méthode de *Kunckel*. J'ai pris quelques livres d'Antimoine crud; je les ai fait fondre encore une fois, dans un creuſet net bien fermé, à un tel degré de feu que l'Antimoine a pu entrer dans un flux clair; & après l'avoir laiſſé réfroidir, j'ai ſéparé la partie ſupérieure de cet Antimoine fondu, qui étoit pour la plûpart remplie de ſcories en forme de bulles, qui procédent des métaux étrangers, ſans compter qu'elle renferme encore ſouvent d'autres parties qui n'appartiennent pas proprement à l'Antimoine. J'ai pris de l'Antimoine ainſi purifié, ſeize onces; je les ai pulvériſé, j'ai calciné cet Antimoine pulvériſé ſur un têt de terre plat & non verniſſé, donnant d'abord un feu lent que j'augmentois enſuite peu à peu, juſqu'à le rendre un feu aſſez fort d'incandeſcence: ce que j'ai fait durer tant qu'à la fin l'Antimoine ſe ſoit changé en une cendre d'un blanc griſâtre. Au reſte tout Chymiſte exercé dans un ſemblable travail n'ignore pas les précautions qu'il faut obſerver dans la calcination de l'Antimoine: ainſi je n'ai pas beſoin de les indiquer.

III. Je pris quatre onces de cette poudre d'Antimoine calciné, je les mêlai exactement avec ſix dragmes de ſel de tartre, & trois dragmes de

de charbons pulvérisés; ensuite je fis fondre ce mélange pendant une bonne heure dans un creuset conique auquel le couvercle étoit soigneusement adapté & luté. Après le réfroidissement du vaisseau, je trouvai dans sa partie inférieure qui se termine en pointe, lorsque les scories eurent été séparées, un beau Régule d'Antimoine, pesant une once, sept dragmes, & vint grains.

IV. Je joignis à toute cette quantité de Régule une once de sel alcali natif, m'étant toujours servi pour ces travaux d'un sel bien dégagé de l'humidité qui pourroit y rester, & tout à fait sec. Je commençai par mêler la moitié du sel alcali avec le Régule; je mis ce mélange dans un creuset conique, & je le couvris avec l'autre moitié du sel. L'ouverture du vaisseau étoit garnie d'un couvercle qui s'y adaptoit exactement; je lutai au mieux les jointures avec un lut fait d'argille & de sable, ou de sable & de creuset brûlé; je l'exposai à un feu véhément de fusion, & fis fondre le mêlange pendent l'espace d'environ une heure; après quoi je brisai le vaisseau, au fond duquel je trouvai un Régule d'Antimoine couvert de scories vertes non transparentes. Ces scories en ayant été séparées, le Régule pesoit une once, six dragmes, & sept grains. Je fis fondre de nouveau ce Régule avec une once & demie de sel alcali natif: en procédant de la maniere susdite, les scories furent encore d'un verd transparent, cependant un peu plus clair, & le Régule qui se trouvoit dessous pesa une once, cinq dragmes, & six grains. Il étoit beaucoup plus beau, & plus blanc à la vuë que le précédent.

V. Je mêlai encore une fois ce dernier Régule avec parties égales de sel alcali natif, procédant avec les vaisseaux & le feu de la maniere ci-dessus indiquée, pendant une heure & demie, le feu ayant été poussé jusqu'à l'incandescence. Après que le creuset réfroidi eut été brisé, j'eus un fort beau Régule d'Antimoine, brillant & difficile à casser, qui pesoit une once, deux dragmes, & seize grains. Il n'étoit couvert d'aucune scorie; mais je trouvai que le creuset étoit percé en trois ou quatre endroits vers le bas, au dessus de la pointe, & le sel

s'étoit ſans doute échapé par là; de ſorte que le Régule étoit tout à fait ſans ſcories, & couvert ſeulement d'une ſubſtance blanche cryſtalline qui reſſembloit à ce qu'on nomme la neige de Mars, & qui n'étoit réellement autre choſe que les fleurs cryſtallines de l'Antimoine. Le déchet conſidérable du Régule venoit donc de ce que le creuſet s'étoit percé; & on ne pouvoit attribuer cet accident qu'à la partie de caillou qui entroit dans le mêlange de l'argille dont le creuſet avoit été fait; ce qui arrive aſſez ſouvent. Cependant le Régule étoit fort beau, brillant, & en grains clairs.

VI. Malgré le déchet que le Régule d'Antimoine avoit ſouffert, je pris ce Régule déjà tant de fois purifié par l'addition du ſel natif, & je le mêlai de nouveau avec parties égales du même ſel; je fis fondre ce mêlange de la maniere ſusdite, & au bout d'une heure & demie, je trouvai le Régule d'Antimoine couvert d'une ſcorie verte, plus transparente que la précédente. Lorſqu'elle eut été ſéparée, le Régule peſoit une once, une dragme & demie. Il étoit beaucoup plus beau, plus brillant, ſe réduiſoit en grains beaucoup plus clairs, & ces grains étoit plus difficiles à briſer que dans tous les travaux précédens. Quand je l'eus pilé avec un peu de mercure courant & d'eau froide, il s'amalgama aiſément avec le mercure; ce qui n'eſt pas propre au Régule ordinaire d'Antimoine.

VII. La plus grande malléabilité que le Régule d'Antimoine avoit acquis, auſſi bien que ſa plus grande diſpoſition à s'amalgamer avec le mercure, dont le §. précédent vient de faire mention, m'engagerent à continuer les fuſions de ce Régule avec le ſel alcali natif, mais en y joignant une de ces Terres qu'on nomme vitreſcibles, c'eſt à dire, une terre de caillou nette. Je pris donc le dernier Régule que j'avois produit, je le mêlai avec une demi-once de ſable blanc de Freyenwalde bien net, qui n'eſt autre choſe qu'un vrai & pur caillou, j'y ajoûtai une once de ſel alcali natif; je mêlai le tout le plus exactement qu'il étoit poſſible en le broyant dans un mortier de verre, dont je m'étois toujours ſervi pour cela; enſuite j'exécutai la fuſion de la maniere qui a été

plusieurs

plusieurs fois rapportée; & j'obtins par là, après le réfroidissement & la séparation du produit, un Régule encore plus beau, couvert d'une surface vitrée d'un verd pâle, qui en le brisant donnoit des grains fort fins, lesquels résistoient considérablement à l'action du marteau. Le poids de ce Régule étoit d'une once & une dragme. Je le fis fondre aussitôt avec l'addition d'une once de sel alcali natif, sans y joindre de sable. Après avoir procédé de la maniere susdite pendant une heure de tems, les scories salines qui en tombant avoient couvert le Régule, se trouverent déjà d'un verd plus foncé; mais le Régule lui-même étoit du plus beau brillant, & en le brisant paroissoit fort fin partout. Il pesoit une once & un scrupule. Il est à remarquer que le sel alcali natif employé dans ces travaux successifs sortoit à chaque fois plus verd du Régule, lorsqu'il étoit fondu seul avec lui, que lorsqu'on mêloit cet alcali avec du sable; ce qui est aisé à comprendre, puisque le sable étant dissous par l'alcali, empêche le Régule d'en être aussi fortement attaqué.

VIII. Je joignis encore à ce Régule pesant une once & un scrupule, dix dragmes de sel alcali natif, & cinq de sable blanc; je mêlai le tout exactement, & je travaillai ce mêlange à un feu violent de fusion, de la maniere déjà souvent indiquée; aprés quoi, les scories ayant été enlevées, j'obtins un Régule plus beau que le précédent; il pesoit sept dragmes & demie, & étoit couvert d'une scorie de beau verre transparent verd; il résistoit aussi mieux au marteau que le précédent. Je le fis fondre encore une fois avec six dragmes du sable susdit, & trois dragmes d'alcali natif, employant par conséquent une plus grande quantité de sable qu'auparavant. Je trouvai alors sur la surface du Régule un verre fort clair, dont la couleur étoit aussi d'un verd clair; & aprés avoir séparé cette scorie vitrée, le Régule pesoit encore sept dragmes & demie, n'ayant ainsi perdu que cinq grains. Il étoit avec cela beaucoup plus difficile à briser que tous les précédens; mais, au moyen d'un peu d'eau, il se laissoit fort aisément amalgamer avec le mercure.

IX. Cette couleur verte des ſcories qui ſont produites dans toutes les fuſions précédentes, me parut une choſe remarquable; & ſachant bien qu'on ne pouvoit l'attribuer, ni au ſel alcali natif, ni au ſable, je ne pus me diſpenſer de croire, que ce verd étoit tiré du Régule même par le ſel alcali natif. Je m'imaginai en conſéquence qu'un alcali du régne végétal produiroit le même effet, mais il s'en falut beaucoup. Car, bien que je priſſe une portion de ce Régule ſimple d'Antimoine dont il a été parlé §. III. & que je la fiſſe fondre d'abord une couple de fois avec du ſel de tartre pur, & enſuite avec le même ſel & du ſable, en faiſant la fuſion comme ci-deſſus, j'obtins à la vérité dans le premier cas, c'eſt à dire, par la fuſion avec le ſimple ſel de tartre, une ſcorie qui tiroit un peu ſur le verd ſale; mais, en réitérant les fuſions, tant avec le ſeul ſel ſuſdit, qu'avec ce ſel & le ſable, je ne pûs plus obſerver aucune trace de couleur verte dans les ſcories, quoique d'ailleurs le Régule devint d'un grain fort fin, & s'amalgamât pareillement en quelque maniere avec le mercure.

X. Je remarquerai encore en paſſant, que M. Pott, dans la premiere Partie de ſa *Lithogeognoſie*, p. 14. fait auſſi mention d'un Régule d'Antimoine qui s'amalgame de même avec le Mercure. On prend quatre parties d'Antimoine, deux parties de limaille de fer, & une partie de craye pulvériſée; on fait fondre ce mêlange, & on obtient un Régule d'Antimoine qui s'amalgame tout de ſuite en le broyant avec le mercure & un peu d'eau. Mais, comme l'addition du fer fait que ce Régule d'Antimoine eſt composé, & de l'ordre de ceux auxquels on donne le nom de martial, j'ai fait fondre par curioſité les mêlanges ſuivans ſans l'addition du fer, & j'ai trouvé que la ſimple craye, quoiqu'elle ne diſſolve pas tout le Régule d'Antimoine, en diſſout au moins une partie. En effet, quatre onces d'Antimoine & une once de craye pulvériſée, étant mêlées enſemble, & expoſées à couvert à un feu véhément pendant une demi-heure, après qu'on a briſé le creuſet réfroidi, donnent un peu de Régule, qui ne peſe exactement que deux onces, deux dragmes, & ſept grains, & qui eſt couvert par deſſus d'une ſcorie tirant ſur le rouge ſemblable à ce qu'on nomme (*Rohſtein*).

Ayant

Ayant fait fondre enſuite deux onces d'Antimoine avec deux dragmes de craye, j'obtins un Régule d'Antimoine d'un beau brillant, qui peſoit une dragme & cinq grains, & qui étoit couvert d'une ſubſtance aſſez reſſemblante à l'Antimoine. On doit remarquer ici que ce mêlange qui étoit fort diſpoſé à entrer en flux, perçoit aiſément le creuſet, de ſorte qu'il faloit prendre garde de lui donner un feu plus doux qu'au précedent; autrement tout ſe ſeroit échapé à travers le creuſet pendant la fuſion.

XI. J'augmentai le poids de la craye, en mêlant quatre onces d'Antimoine pulvériſé avec deux onces de craye auſſi pulvériſée; je fis fondre ce mêlange à un feu véhément pendant une heure; & après avoir laiſſé refroidir le creuſet, & l'avoir briſé, je trouvai que le mêlange s'étoit fort bien fondu, la ſurface étant applatie, & reſſemblant à l'Azur de cuivre. La ſcorie reſſembloit à ce qu'on nomme *Rohſtein*, & quand on la gratoit avec le couteau, elle paroiſſoit rougeâtre. Je n'ai pas trouvé le moindre Régule d'Antimoine dans ce mêlange. Ayant enſuite encore mêlé la ſcorie ſusdite avec une demi-once de limaille de fer, & ayant procédé à la fuſion de la même maniere, j'obtins un beau Régule d'Antimoine, qui étoit de nouveau couvert d'une ſcorie rougeâtre, ſemblable à du *Rohſtein*.



RAPPORT
DE QUELQUES EXPÉRIENCES FAITES SUR LA PIERRE QU'ON NOMME LAPIS LAZULI
PAR M. MARGGRAF.

Traduit de l'Allemand.

I.

Le *Lapis Lazuli* eſt une pierre bleue, tirant ſur le violet, d'une médiocre dureté, marquée de veines blanches, & le plus ſouvent de points minéraux-métalliques, qui reſſemblent à de l'or, mais, qui, examinés de plus près, repréſentent un marcaſſite de ſouffre dans ſa forme cubique. On y trouve auſſi ſouvent des taches blanches brillantes; mais qui, pareillement, quand on y fait plus d'attention, ne ſont autre choſe qu'un talc délié & luiſant. Quelques endroits de cette pierre, quand on la frappe contre l'acier, jettent des étincelles, tandis que le reſte n'en donne point. Elle n'eſt d'ailleurs, ni trop dure, ni trop molle; on peut la polir médiocrement; il y en a quelques endroits qui entrent en effervefcence avec l'eau forte, & d'autres qui ne le font pas. Suivant quelques Auteurs il s'y trouve de l'or; ce que je ne voudrois pas non plus abſolument nier: mais je ne crois pas qu'il y en ait toujours, & dans toutes, les eſpeces de cette pierre. Quand elle eſt d'un beau bleu, on la regarde comme une choſe rare; elle ſert à divers ouvrages méchaniques, & c'eſt un ingrédient de Médecine qui entre dans ce qu'on nomme *Confection d'Alkermes*. Les Peintres la vantent auſſi pour la préparation de ce beau bleu d'Outremer, qui eſt le plus durable de tous.

II. *Pomet*, dans ſon *Dictionnaire des Drogues*, eſt à mon avis celui qui fournit le plus de particularités au ſujet de cette pierre, par

rapport

rapport à ce qui la concerne extérieurement. D'autres Auteurs en ont fait mention par ci par là, tantôt en s'accordant entreux, tantôt avec quelques différences, auxquelles je ne crois pas devoir m'arrêter beaucoup ici, renvoyant les amateurs aux ſources mêmes. Ces ſources ſont, outre *Pomet* que j'ai déjà indiqué, *Kunckel*, dans l'addition concernant les Pierres précieuſes qu'il a jointe à ſon *Ars vitriaria*, *Imperatus* dans ſon *Hiſtoire naturelle* en Latin, Liv. IV. ch. 40. Liv. XXII. ch. 40. & Liv. XXXIII. ch. 10. *Matthiole*, *Jerome Cardan* dans ſon Traité *de Miſtis*, Liv. V. & *Agricola*, *de Natura foſſilium*, Liv. VI. ch. 17. On peut y joindre *le Franc Jouailler*, & *Baccone* dans le *Muſaeo di Fiſica e di Experienſe*, à Cap. 280. En parcourant ces Auteurs, & ſurtout *Imperiali*, *Matthiole*, *Cardan*, *Agricola*, & *le Jouailler*, on ſera aiſément convaincu qu'il n'y a pas grand fruit à en tirer. Quant au reſte, cette pierre, autant que je puis le ſavoir, nous vient de l'Ile de Chypre par Veniſe, & auſſi de la Perſe; & ſelon le Pere du Halde, dans ſa Deſcription de la Chine, on la trouve en grande quantité dans ce Royaume.

III. Dans le *Henckelius Redivivus*, p. 71. & dans les petits Ecrits minéralogiques du même Auteur publiés après ſa mort, p. 404. & 471. le *Lapis Lazuli* eſt mis au rang des minieres de cuivre; & on le trouve placé de même dans les Elémens de la Chymie métallurgique de M. *Gellert*, p. 44. & dans la Minéralogie de *Wallerius*, p. 130. & 131. Il y a encore d'autres Auteurs qui paroiſſent être dans la même opinion, ſans croire pourtant qu'il entre beaucoup de matiere de cuivre dans le *Lapis Lazuli*. Pour moi je penſe qu'il eſt arrivé ici un des cas auxquels on applique le mot *Errare humanum*, qui conſiſte en ce que l'on aura pris des morceaux de *Lapis Lazuli*, qui n'étoient pas nets, & où ſe trouvoient les points d'un jaune couleur d'or dont nous avons parlé; & alors il eſt poſſible que ces morceaux ayent été mêlés avec un peu de marcaſſite de cuivre, de ſorte qu'il étoit aiſé d'y rencontrer quelques traces de cuivre. Quant à moi, dans tous les morceaux de *Lapis Lazuli*, ſur lesquels j'ai travaillé, je n'ai trouvé aucune trace de cuivre;

 & le

& la suite fera suffisamment voir que ce marcassite du cuivre n'est autre chose qu'un pyrite de souffre dans lequel il y a du fer.

IV. L'opinion qui vient d'être indiquée dans le §. précédent, savoir que le *Lapis Lazuli* contient du cuivre, aussi bien que sa belle couleur bleue, & le peu de connoissance qu'on a eu jusqu'à présent de ses parties essentielles, sont autant de motifs qui m'ont engagé à faire de ce corps l'objet de divers essais, pour parvenir, autant qu'il me seroit possible, à la découverte de la vérité. Je vais rapporter ici ces essais avec sincérité, en laissant à tous ceux qui sont juges compétens sur ces matieres, la liberté de ranger cette pierre dans quelle classe ils le jugeront à propos.

V. Je viens donc au fait, c'est à dire, à l'examen de la pierre en question. La premiere chose à laquelle je pensai, fut de me procurer une quantité de *Lapis Lazuli* nette, sans points jaunes métalliques, & à laquelle il n'y avoit guères de matiere blanche de la mine qui fut attachée. A' la fin j'en trouvai de telle que je la desirois. Je la brisai avec un mrrteau en petites pieces, & je séparai aussi exactement qu'il étoit possible les particules minérales & métalliques brillantes qui se trouvoient répandues par ci par là, aussi bien que les parties blanches semblables à de la pierre, en sorte qu'il ne me resta que les parties bleues de cette pierre sur lesquelles je me proposois de faire mes Expériences; & je fis en effet les suivantes.

VI. Je pilai une quantité de ce *Lapis Lazuli* dont j'avois choisi la matiere bleue, & je n'employai pas pour cet effet un mortier de cuivre, ou de fer, qui auroit pu rendre suspectes les Expériences que j'aurois faites ensuite, parce que, vû la dureté de la pierre, il n'auroit pû manquer en pilant de se détacher des parties métalliques du mortier, qui se seroient mêlées à la pierre; mais je me servis d'un mortier de verre des plus forts, & il faloit qu'il fut tel pour que la pierre, en la pilant, ne le brisât pas. Encore pris-je la précaution d'enveloper ces parties bleues du *Lapis Lazuli*, dans du papier épais de plusieurs doubles,

doubles, sur lequel j'appliquai ensuite les coups de marteau, & ayant mis ainsi ces petis morceaux en d'autres plus petits autant qu'il m'étoit possible, je les réduisis à la fin en une poussiere tout à fait déliée.

VII. Je pris une demi-dragme de ce *Lapis Lazuli* ainsi pilé, & l'ayant mis dans un verre net & bien bouché avec un bouchon de liege, je versai dessus une demi-once d'esprit de sel ammoniac fort & très net, comme étant le plus pur des esprits urineux. Je bouchai exactement le verre avec un bouchon de liege, & laissai d'abord le tout au froid pendant vint quatre heures; après quoi je l'exposai à une douce digestion, Ici je ne pus point remarquer que l'esprit urineux eût attiré quoi que ce soit de la couleur bleuë; ce qui a pourtant coûtume d'arriver & d'être d'abord sensible, quand les minieres contiennent du cuivre, & ressemblent d'ailleurs au *Lapis Lazuli*. Je calcinai pareillement une portion de cette pierre pulvérisée, sur un têt placé sous la mouffle; & j'observai que sa couleur bleue ne souffroit aucune altération par ce moyen. Je versai sur cette pierre calcinée de l'esprit urineux susdit dans la même quantité, & les choses se passerent comme auparavant, n'ayant pû m'appercevoir que cet esprit se fût teint le moins du monde de la couleur bleuë; ce qui me conduisit à cette conclusion nécessaire, c'est que le *Lapis Lazuli* ne contient aucun cuivre.

VIII. Je pris encore un demi lot de la pierre pilée comme il a été dit §. VIII. & l'ayant mis dans un verre net à col étroit, que je pouvois boucher exactement, je le mêlai avec une once, ou deux lots, d'un esprit de vitriol net, qui avoit été fait par le mêlange d'une partie d'huile de vitriol rectifiée, avec trois parties d'eau pure. Ce mêlange commença un peu à frémir, & donna à peu prés une odeur comme fait un mêlange de limaille de fer & d'huile de vitriol, quand on le délaye avec de l'eau.

Je versai aussi sur deux dragmes de la même pierre pulvérisée une once d'esprit de nitre ordinaire, qui à la vérité n'avoit pas été concentré, mais qui ne laissoit pas d'être fort & pur; & ayant remué ce mêlange,

lange, il entra pareillement en effervescence, & même avec un peu plus de force. Ensuite je mêlai un demi-lot de la poussiere susdite avec une once d'esprit de sel commun de Glauber, qui étoit très fort, & rectifié sur le sel commun; & l'effervescence fut la même que celle du mêlange précédent, accompagnée d'une odeur qui sentoit tout à fait le foye de souffre. Tous ces mêlanges furent ensuite soumis à une forte digestion; mais ils y demeurerent dans un état d'inconsistance, & tout blancs, sans qu'on pût y observer d'autre couleur. Cependant le *Lapis Lazuli* y avoit perdu toute sa teinture bleüe. Je filtrai là dessus toutes ces extractions, & j'en fis l'objet des Expériences suivantes.

IX. Je pris de la solution de cette pierre, faite avec l'esprit de vitriol, & j'en versai goutte à goutte sur une plaque de fer poli; mais je ne pus point remarquer que la plaque eût souffert la moindre imprégnation de cuivre, ce qui arrive néanmoins dès qu'on dissout du cuivre dans l'acide du vitriol. Je mêlai la même solution avec de l'esprit de sel ammoniac aqueux, jusqu'à une saturation complette; aprés quoi j'y versai encore un peu de cet esprit urineux. Mais, dans toute cette opération, je n'ai pas trouvé le moindre vestige de cuivre contenu dans le *Lapis Lazuli*; & s'il y en avoit eu, il se seroit d'abord trahi par la belle couleur bleue que la solution auroit éte obligée de prendre. Je procédai de la même maniere avec les deux autres solutions susmentionnées de cette pierre, qui avoient été faites avec l'acide du nitre, & celui du sel commun; & il ne se manifesta pas plus d'indices d'un cuivre contenu dans la pierre. Néanmoins, en versant sur cette solution de l'esprit urineux il s'en précipita une poussière blanche; & la solution faite avec l'acide du nitre en fournit une plus grande quantité; mais, en y versant de nouveau davantage d'acide nitreux, elle rentra d'abord en solution. Je me mis là dessus à éprouver toutes ces solutions, chacune à part, avec de la lessive faite d'alcali & de sang; & en ayant saoulé ces solutions, je remarquai que celle qui avoit été faite avec l'acide du nitre, se précipitoit mieux que toutes les autres, d'une belle couleur bleüe; ce qui prouve qu'elle renferme un petit nombre

de

de particules de fer: & cela arrive d'une maniere plus ſenſible encore, quand on s'eſt ſervi de ces petits morceaux de *Lapis Lazuli*, où il y a des-points d'un jaune couleur d'or, ces points n'étant autre choſe que de petits pyrites de ſouffre.

Quand on verſe dans les ſolutions de cette pierre faite avec l'acide du nitre & celui du ſel commun un peu d'acide de vitriol, il ſe précipite à la fin quelque choſe de ſélénitique; ce qui prouve qu'une terre calcaire s'y trouve mêlée. En effet, de l'union d'une ſemblable terre avec l'acide du vitriol, il doit toujours réſulter un produit ſélénitique.

X. Je répétai toutes les Expériences qui viennent d'être rapportées dans les §§. VIII. & IX. avec le *Lapis Lazuli* calciné; & toutes les circonſtances furent aſſez les mêmes, excepté que les acides ſusmentionnés n'entrerent pas en effervеſcence avec cette pierre calcinée; que la ſolution faite avec l'eſprit de ſel paroiſſoit fort jaune; & que la leſſive de ſang ſusmentionnée ſe précipitoit d'une couleur fort bleüe. Au reſte, une choſe qui eſt encore digne de remarque, c'eſt que toutes les ſolutions de la pierre calcinée faites avec les trois acides ſusdits devenoient entièrement gélatineuſes; au lieu que les ſolutions faites avec la pierre crüe demeuroient déliées & fluides: à quoi il faut ajouter qu'avec la pierre calcinée l'acide du ſel commun attire plus de matiere ferrugineuſe, que ne le font les autres, au lieu qu'avec la pierre crue, c'eſt l'acide du nitre qui produit cet effet.

XI. Autant que les autres Expériences que j'ai encore faites avec la même pierre, ont pu me permettre de le découvrir, elle contient auſſi une terre gypſeuſe, ou ſélénitique, c'eſt à dire, une terre compoſée du mêlange de la terre calcaire avec l'acide du vitriol, ou ce qu'on appelle autrement, flux de ſpath. En effet, ayant pris un morceau de *Lapis Lazuli* cru, peſant quatre onces, lequel n'étoit point ſéparé de l'eſpece de terre blanche que l'environne, mais étoit encore tel que je l'avois reçu, parſemé de taches blanches, parmi lesquelles il n'y en avoit pourtant point de jaunes, je le briſai par morceaux, & l'expoſai

posai dans un creuset à fondre à un feu qui n'étoit pas trop fort. Là il commença à jetter un fort bel éclat, à la façon de ce qu'on nomme les *Hesperi*, & rendit l'odeur qu'ils ont coutume de rendre. Lorsque j'augmentai le feu, ce bel éclat d'un blanc bleuâtre disparut, & la pierre entra en incandescence. L'ayant laissée dans cet état encore une demi-heure, je secouai cette pierre embrasée dans un vaisseau de terre bien brûlée, neuf & bien net, rempli d'environ une livre & demie d'eau distillée. Après que le tout fut réfroidi, je tirai la pierre hors de l'eau, je la fis sécher, & répétai l'opération conduite jusqu'à l'incandescence. J'éteignis de nouveau cette pierre dans la même eau qui avoit auparavant servi à cet usage, & je réitérai cetravail encore six ou sept fois. Après avoir fait écouler l'eau, je fis sécher les morceaux de pierre, qu'il fut ensuite très aisé de mettre en poussiere. Là dessus je filtrai l'eau qûi avoit été rendüe fort trouble par la pierre qu'on y avoit éteint à plusieurs reprises. Je versai dans cette eau filtrée, une lessive alcaline tout à fait nette, ou une solution de sel de tartre nette, & alors il se précipita aussitôt une poussiere blanche. Je continuai à verser de cette lessive alcaline aussi longtemps que la précipitation dura. A la fin j'édulcorai bien la poussiere précipitée, & l'ayant examinée suivant toutes les régles de l'art, je trouvai que ce n'étoit autre chose qu'une vraye terre calcaire. J'examinai le liquide qui s'en étoit séparé, en le faisant évaporer & crystalliser, & j'en tirai un vrai tartre vitriolé. Je ne pus donc tirer d'autre conclusion de tout ceci, que celle qui a déjà été indiquée à la fin du §. IX. sçavoir qu'il doit se trouver dans cette pierre une substance calcaire, & aussi, suivant la derniere Expérience qui vient d'être rapportée, une substance gypseuse. Ce qui tient du caillou se découvre de soi-même, puisque cette pierre, lors même qu'elle est la plus pure, donne du feu en divers endroits, quand on la frappe contre l'acier.

XII. J'ai déjà remarqué à la fin du §. VII. que cette pierre ne change point sa couleur bleue en la calcinant. Et c'est là sans doute l'indice d'un vrai *Lapis Lazuli*, comme divers Auteurs l'ont déjà remarqué. Cette pierre se distingue par là des minieres de cuivre

bleues,

bleues, & des terres bleues comme, par exemple, de la terre d'*Eckertsberg*, &c. Car celles-ci perdent tout à fait leur couleur bleüe, quand on leur donne une incandeſcence modérée; au lieu que notre pierre conſerve la ſienne à un feu aſſez conſidérable. Ayant ſoumis pendant une demi-heure un morceau de *Lapis Lazuli* d'un très beau bleu dans un creuſet fermé à une forte incandeſcence, ſon bleu demeura tout auſſi beau. Un autre morceau, mis dans un creuſet à fondre fermé & luté, & tenu à un feu véhément de fuſion pendant une heure, s'étoit fondu en une maſſe écumeuſe d'un noir tirant ſur le jaune, où l'on voyoit par ci par là quelques taches bleuâtres. Un autre morceau d'un beau bleu, ayant été traité de même, & cela devant le ſoufflet le plus fort, ſe fondit entierement en une ſorte de verre blanchâtre, qui montroit pourtant encore en pluſieurs endroits quelques reſtes de ſon bleu foncé. On reconnoit par tout ceci, non ſeulement la conſtance avec laquelle la couleur bleüe réſiſte au feu, mais encore que cette pierre eſt une compoſition ou un mêlange; puisque, ni la chaux pure, ni le caillou pur, ni le flux de ſpath pur, n'entrent en fuſion, & que cela ne leur arrive qu'après l'addition de quelque autre matiere.

XIII. Pour m'aſſurer mieux de l'exiſtence des particules de fer, dont j'ai déjà fait mention dans mon §. X. je mêlai une dragme & demie de ſel ammoniac avec une dragme de *Lapis Lazuli* pulvériſé, & auparavant calciné. En pilant ces matieres enſemble, il en ſortit quelque odeur urineuſe. Je mis là deſſus ce mêlange dans une petite retorte, & je le fis ſublimer à un feu véhément; enſuite, après le réfroidiſſement, je trouvai que le Salmiac s'étoit ſublimé d'un beau jaune dans le cou de la retorte, comme ce qu'on nomme les fleurs martiales de ſel ammoniac. Le réſidu paroiſſoit encore d'un beau bleu; il tiroit ſur le violet, & peſoit juſte une dragme. Je le leſſivai avec une quantité convenable d'eau diſtillée; je filtrai l'eau qui avoit repoſé deſſus, & j'y-verſai goutte à goutte un peu de leſſive alcaline; alors il ſe précipita une bonne quantité d'une pouſſiere blanche, qui étoit une terre calcaire. Après que ce ſublimé eut été diſſous dans l'eau, & qu'il eut

reposé quelque tems, il s'en précipita encore, mais en fort petite quantité, une poussiere couleur d'orange, comme une ocre de fer.

XIV. Je mêlai encore une dragme & demie de cette pierre pulvérisée & calcinée avec autant de fleurs de souffre pures, & je sublimai pareillement ce mêlange par degrés dans une petite retorte garnie à laquelle on avoit adapté un récipient, & à la fin je conduisis le feu jusqu'à une forte incandescence. Mais, dans tout ce travail, je ne remarquai aucun changement, ni dans le souffre qui s'étoit élevé, ni dans le résidu. Celui-ci paroissoit encore d'un beau bleu, & n'avoit été altéré d'ailleurs en rien. Il en fut à peu près de même, lorsque je sublimai deux dragmes de cette pierre pulvérisée avec parties égales de Mercure sublimé corrosif, en procédant de la maniere susdite. Le Mercure sublimé monta dans sa forme crystalline ordinaire, & je ne trouvai point qu'il s'en fut révivifié quoi que ce soit. Ce qui étoit démeuré dans la retorte n'avoit souffert aucune altération, & paroissoit encore d'un fort beau bleu. La même chose arriva aussi avec un mêlange de pierre calcinée & pulvérisée jointe à parties égales de cinnabre pur; ces deux matieres ayant été pilées ensemble, & sublimées de la maniere susdite, le cinnabre ne fut point révivifié, & le résidu demeura d'un fort beau bleu.

XV. Une partie de sel de tartre pur avec deux parties de ce *Lapis Lazuli* pulvérisé, ayant été mêlées, mises dans un creuset à fondre couvert & bien luté, & exposées pendant une heure à un feu de fusion violent, se changerent en une masse poreuse d'un verd jaunâtre. Parties égales de cette pierre & de sel de tartre, exactement mêlées ensemble, & traitées de la même maniere, produisirent une masse fondue, pareillement poreuse, blanchâtre, & recouverte d'une autre matiere poreuse jaunâtre.

XVI. Trois parties d'un Nitre pur mêlées avec une partie de notre *Lapis Lazuli* pulvérisé, & conduites au feu par degrés jusqu'à l'incandescence, se fondirent d'abord tout à fait tranquillement; le feu ayant

ayant été augmenté, la pierre conserva sa couleur bleüe; à un feu plus fort encore, le mêlange s'épaissit intérieurement, jusqu'à ce qu'à la fin il en résulta une masse grise. L'ayant jettée toute chaude dans de l'eau distillée, elle donna à cette eau une couleur bleue tirant sur le verd, mais qui s'évanouit dans le cours d'une nuit, l'eau ayant recouvré toute sa clarté. Dans ce travail le nitre est pour la plus grande partie alcalisé; ce qui paroit non seulement en ce que cette eau a un goût alcalin fort, mais aussi en ce qu'avec les acides elle éprouve un grand frémissement. Quant à la couleur bleue de cette pierre, elle s'étoit tout à fait perdue.

XVII. Pour essayer si cette pierre bleüe donneroit de la couleur à la matiere qu'on appelle fritte de verre, je mêlai une demi-dragme de sel de tartre pur avec une dragme de caillou pulvérisé, & dix grains de pierre bleue aussi pulvérisée, & je fis fondre le tout dans un creuset couvert jusqu'à la vitrification. Ce mêlange entra dans une fusion claire, & j'obtins un beau verre transparent couleur de citron. Je mêlai encore une demi-dragme d'alcali minéral, qui avoit été dégagé de son humidité naturelle, avec une dragme de caillou pulvérisé, & dix grains de *Lapis Lazuli*, & l'ayant mis en fusion à un feu véhément, comme ci-dessus, cela donna un verre transparent assez blanc dont la surface supérieure réfléchissoit les rayons de lumiere d'une couleur rougeâtre. Une dragme de Borax calciné ayant encore été fondue avec dix grains de *Lapis Lazuli*, à couvert comme les mêlanges précédens, le produit en fut un beau verre couleur de chrysolithe. Il n'y a donc dans toutes ces opérations aucune trace de cuivre à découvrir; mais elles donnent plutôt lieu de conjecturer l'existence d'une substance martiale déliée dans cette pierre.



EXAMEN CHYMIQUE

D'UNE

MINE D'ARGENT LAMELLEUSE,

OU

D'UNE ESPECE DE LIEGE MINERAL

QU'ON TROUVE, QUOIQU'EN TRE'S PETITE QUANTITÉ, DANS LES MINES DE DOROTHÉE ET CAROLINE, SUR LE HAUT HARTZ.

PAR M. LEHMANN.

Traduit de l'Allemand.

Il feroit à peu près impossible de faire une enumération exacte de toutes les manieres différentes que la Nature employe pour minéralifer les métaux dans leurs mines, & de toutes les formes variées fous lesquelles elle nous les préfente. Il eft à la vérité déraifonnable de multiplier les efpeces fans néceffité, & de répandre en inventant de nouveaux noms de nouveaux embarras dans la Minéralogie qui n'eft que trop difficile par elle-même. Cependant il n'eft pas toujours poffible d'éviter cet inconvénient; & il ne peut même qu'aller en augmentant, dès là qu'on découvre prefque d'année en année de nouveaux mêlanges de matieres minerales, qu'on n'avoit point connu auparavant, & qu'il faut tâcher de rapporter à quelcune des claffes déjà reçues. Le Mineur, qui ne fe met en peine que de la maniere dont il peut venir à bout de tirer du fein de la terre les minieres qu'elle renferme, eft pour l'ordinaire content, quand celle qu'il vient de détacher a de l'éclat & de la pefanteur. S'il lui tombe fous la main quelque chofe d'inconnu, & qui lui paroiffe mériter une attention particuliere, il le montre à ceux qui font prépofés à fon travail; mais ceux-ci n'ont guères d'autre expédient, que de mettre la maffe à l'épreuve: fi le

ſi le produit en eſt avantageux, elle eſt réputée bonne, & la miniere nouvellement découverte reçoit un nom, fondé communément ſur la reſſemblance avec d'autres minieres connues. Je ne m'arrêterai point à rapporter ici pluſieurs exemples de cet ordre; on connoit aſſez toutes les minieres différentes dont les noms (*) ont été déduits du rapport qu'elles paroiſſent avoir avec du ſuif, de la viande, du cuir, du lin, du papier, du liege, &c. J'aime mieux décrire ici une eſpece de miniere d'argent d'un ordre particulier & d'un produit aſſez riche, qui ſe préſente fort rarement, & qui, autant que je puis le ſçavoir, n'a encore été trouvée que dans la fameuſe Mine de *Clausthal* dans le *Hartz* ſupérieur, qui porte le nom de *Dorothée & Caroline.* Elle y a été appellée *Blätter-Ertzt*, ou *Berg-Zunder*, comme qui diroit *Miniere en feuilles*, ou *Amorce minérale.*

Pour commencer par l'Hiſtoire de ce minéral, il y a plus de vint ans que la découverte en a été faite dans la Mine *Dorothée;* & ce fut le Docteur *Prückmann* défunt, grand Fabricateur de nouveaux noms, qui m'envoya cette matiere il y a quinze ans paſſés, ſous le nom de *Bergzunder.* Peu de mois après, il me fit encore un autre envoi de la même matiere; & il l'appelloit *miniere mercurielle.* Les choſes en demeurerent là jusqu'au temps où j'allai moi-même viſiter le *Hartz*, & me rendis en particulier à *Clausthal.* Je trouvai alors cette miniere déſignée par le nom de *Blätter-Erzt*, en partie dans ces deux mines en les viſitant, en partie dans l'endroit où l'on ſépare les minieres de parties hétérogenes avec le marteau, & auſſi dans les Collections de quelques amis. Comme on ne trouve pas cette matiere en fort grande abondance, & qu'elle eſt avec cela fort legere; il me fut aſſez difficile, & ce ne fut pas ſans fraix que j'en vins à bout avec le ſecours de mes amis, d'en raſſembler quelques onces; & c'eſt cette petite proviſion qui m'a mis en état de faire les expériences dont je vais rendre compte. Un homme très verſé dans la Minéralogie, & qui eſt Receveur Royal

 & Ele-

(*) En Allemand *Bergtalck; Bergflachs, Bergfleiſch, Bergkork, Bergpapier, Bergleder*, &c.

& Electoral des Dixmes des mines, M. *Schlemm*, eut en même tems la bonté de me faire présent d'un echantillon curieux de cette miniere qui mérite que j'en fasse ici la description. Elle est du poids d'environ deux livres, & consiste dans un mêlange de *Quartz*, de *Fluss-Spath*, & de *Spath* calcaire, dont une partie s'est unie solidement, & l'autre est plutôt crystallisé; à quoi se trouvent jointes diverses autres matieres minérales tenant du plomb, du souffre, & du cuivre, dont les unes sont cubiques, tandis que les autres sont comme pénétrées & fondues ensemble.

C'est sur cette espece de pierre, & sur les minéraux qui s'y trouvent mêlées, qu'en partie repose notre *miniere en feuilles*, tout à fait friable, en sorte qu'on peut aisément la détacher avec les doits, & en partie elle est entremêlée & éparse dans les cavités de cette Pierre. Cette Miniere en feuilles peut donc être définie *une espece de Mine contenant de l'argent, friable, d'un rouge obscur, flexible, legère, surnageant au dessus de l'eau, colorant les doits, consistant en petites feuilles trés minces, qui reposent les unes sur les autres, mêlée d'un Saffran de fer talqueux tirant au rouge, avec diverses particules déliées de Spath, de Quartz, & de Galene, &c. répandues entre ces feuilles, comme si elles en avoient été arrosées.*

Il paroit par cette description que le nom imposé à cette matiere étoit en effet celui qui lui convenoit le mieux, au moins celui de *Blätter-Ertzt*. Car, pour celui de *Bergzunder*, je ne trouve d'autre ressemblance entre cette miniere & de l'amorce, sinon que l'une & l'autre sont fort legères, qu'en les exposant à la chandelle elles se consument, & qu'elles colorent les doits: car, quand on fait attention à leur structure particuliere, la ressemblance s'évanoüit; à quoi il faut ajoûter qu'avec quelque force qu'on batte du feu au dessus de cette matiere, il n'y prend point, & qu'en la brûlant, elle ne se réduit pas en cendres. On la rencontre dans le creux des mines, posée sur d'autres minieres, par exemple, sur la galene, ou la mine de plomb compacte (*Bleischweig*) sur le quartz; le spath, le marcassite de souffre, & d'autres pierres pareilles

pareilles à celles dont j'ai donné ci-dessus la description; & ces feuilles legères semblent s'être attaché au dessus des endroits où reposent ces couches minérales ou pierreuses.

Il ne m'est pas connu d'ailleurs que personne ait encore entrepris de les décrire, & d'en faire l'objet de ses recherches.

Je devrois peut-être commencer par rapporter cette matiere à une classe déterminée; mais je suis obligé d'avouer que la chose n'est guères faisable, vû la différence qui se trouve entr'elle & toutes les autres minieres d'argent connues. Il y a plutôt deux especes pierreuses, avec lesquelles elle auroit un plus grand rapport; ce sont celles qu'on nomme *liege minéral*, & *papier minéral*, ou bien le fin *cuir minéral*, dont parle *Wallerius*. A' la couleur près la ressemblance avec ce dernier est assez grande; ce sont également des feuilles déliées qui reposent les unes sur les autres, & parmi lesquelles se trouvent dispersées des particules de spath & de quartz. Mais, comme le fin cuir minéral ne fond pas de lui-même au feu, cela fait déjà une différence des plus notables, & qui ne permet plus de rapporter le minéral en feuilles à cette espece. A' l'egard du liege minéral, notre matiere lui ressemble en ce que l'un & l'autre se fondent par eux-mêmes à un feu médiocre en une masse noire; comme cela a déjà été observé par le célèbre *Henckel*, pag. 396. de ses petits Ecrits Minéralogiques, & par M. *Wallerius*, pag. 191. de son *Régne minéral*, en parlant du liege minéral de *Dannemor*. Mais nous nous retrouvons arrêtés ici par la contexture de nos feuilles, sans compter que jusqu'ici on n'a point encore trouvé que le liege minéral contint de métal. Neanmoins, comme les couleurs sont une chose contingente, qu'on peut en dire autant du tissu irrégulier des fibres du liege minéral, aussi bien que de toutes les figures différentes des productions crystallines, & même qu'il n'est pas essentiel à ces matieres de contenir du métal, comme le font les autres matrices métalliques, je serois porté à croire que notre miniere en feuilles, vû la conformité qu'elle fait paroître au feu avec le liege minéral, peut être rangée sous cette espece de concrétion pierreuse. Mais quelles sont à présent les parties constituantes de cette miniere?

Avant

Avant que d'entrer dans le détail des Expériences qui répandent du jour ſur cette queſtion, il eſt à propos de rapporter quels ſont les préparatifs dont je les ai fait précéder. On a déjà vû ci-deſſus que ce n'étoit qu'avec beaucoup de peine, à grands fraix, & en implorant l'aſſiſtance de mes amis, que j'avois pû parvenir à en acquérir quelques onces: encore étoient-elles fort mêlées de quartz, de ſpath, de cailloux, & d'autres matieres ſemblables. Je commençai par ſéparer les pieces les plus conſidérables de cette matiere avec beaucoup de ſoin. Je pris enſuite de l'eau diſtillée, où je jettai tout le reſte, & le lavai, afin d'en ſéparer toutes les parties étrangeres qui ſe précipiterent au fonds; & de cette maniere je parvins à n'avoir que du minéral en feuilles tout pur, que je fis ſécher, pour l'employer à mes Expériences. Il n'y avoit pourtant pas eu moyen de ſéparer par cette voye toutes les particules déliées qui ſe trouvoient répandues entre les feuilles. L'eau ne cauſa la ſolution d'aucune partie de cette matiere; ſeulement elle la rendit toute fort molle, & comme bourbeuſe; mais après le deſſéchement elle ſe réunit, & prit une conſiſtance fort ſolide.

Voici préſentement le détail des travaux auxquels je l'ai ſoumiſe.

Je commençai par la ſublimation. Je mis pour cet effet un ſcrupule de cette miniere dans une retorte de verre garnie, & l'expoſai à un feu découvert, que je continuai jusqu'à fondre la retorte. Il n'en réſulta qu'une trace fort foible de ſouffre; & rien du tout n'avoit paſſé dans le récipient. Quoique le feu n'eût pas duré au delà de trois quarts d'heure, cette miniere s'étoit pourtant fondue & attachée au fonds de la retorte en une maſſe noire de l'eſpece des ſcories, qui en la rompant parut brillante & métallique, comme on la voit dans les mines à demi fondues dans les fonderies. Un ſcrupule de cette miniere avec deux ſcrupules d'arſenic blanc cryſtallin, traité de la maniere précédente, n'a rien fait paſſer dans le récipient. L'arſenic s'étoit ſublimé de couleur d'orange, avec une odeur très forte de ſouffre; & la miniere, comme dans l'Expérience précédente, s'étoit fondüe enſemble au fond en une maſſe tout à fait ſemblable à celle dont il a été fait mention.

Cette

Cette miniere avec du ſalmiac purifié, parties égales, ſavoir un ſcrupule de chacun, ne ſe dégagerent point de leur urineux pendant qu'on les broyoit enſemble; mais durant la ſublimation il y eut environ deux grains de ſel volatil urineux ſec qui paſſerent par deſſus. Le reſte du ſublimé étoit de couleur d'orange, avec un peu de ſublimé blanc; mais la miniere s'étoit fondue dans la retorte, tout comme dans les deux Expériences déjà rapportées.

Un ſcrupule de la même miniere avec une dragme de Mercure ſublimé, ayant été traités de la même maniere, le Mercure gagna le haut ſous la figure blanche cryſtalline; mais enſuite, quand le feu eût été fort augmenté, vinrent quelques grains de pur cinnabre, la miniere s'étant fonduë ſous l'apparence d'une éponge, d'un brun obſcur, mais étant expoſée à l'air elle s'y écoula d'abord.

Les Expériences dont je viens de rendre compte, me firent voir d'une maniere ſuffiſante, que cette miniere étoit très aiſée à fondre. Je pouſſai donc plus loin mes travaux, pour me mettre exactement au fait de ce qu'elle contenoit de métallique. Pour cet effet j'en peſai exactement deux dragmes, je les pilai dans un mortier de verre bien net, les mis enſuite ſur un beau têt d'épreuve neuf, que je couvris avec un autre. Après cela je plaçai le tout dans un fourneau d'épreuve ſous une mouffle, je donnai tout doucement le feu, & je l'augmentai inſenſiblement, jusqu'à ce que j'eus apperçu que mon têt s'embraſoit extériéurement, & que les particules déliées de ſpath répandues ſur la miniere ne rendoient plus de pétillement. J'ôtai alors le têt de deſſus, & me mis à remuer la miniere tout de ſuite. Cette précaution étoit indiſpenſablement néceſſaire; car, ſi j'avois donné la chaleur trop vîte, ſans remuer continuellement, rien n'eſt plus certain que ce que cette miniere, ſi aiſée à fondre par elle-même, ſe ſeroit réunie en un clin d'oeil en une maſſe, & que par là tout mon travail auroit été à pure perte; ſans compter qu'avec une proviſion auſi petite que la mienne, j'aurois eu tort de négliger des eſſais où il en entroit un demi-lot. Pendant que cela grilloit, je levois de tems en tems le têt, & je re-

marquois une forte odeur de souffre; la miniere au commencement devint jaune, & à la fin, quand tout fut entierement calciné, elle paroissoit d'un gris de cendres. Malgré mon attention à remuer continuellement, elle s'étoit pourtant un peu fondue ensemble; mais on ne laissoit pas de pouvoir la broyer fort aisément dans un mortier de verre: après quoi elle pesoit encore une dragme, deux scrupules & demi, de sorte que toute la manoeuvre avoit causé un demi scrupule de déchet. Je pris de cette miniere ainsi calcinée une drachme, ou un quintal d'essai, que je mêlai avec huit drachmes de graine de plomb; je remis le tout sur un têt bien net dans le fourneau d'épreuve, afin de l'y faire bouillir convenablement. Mais, quelques soins & quelques peines que j'y apportasse, cette matiere demeura longtemps sans vouloir se mêler & entrer en flux; seulement le plomb poussé au feu chassoit principalement la miniere vers le bord, ce qui venoit de ce saffran de fer tenant du talc qui s'y trouve, comme nous le verrons mieux plus bas. Cependant, à force de remuer avec un crochet ardent, & d'augmenter la chaleur, j'amenai les choses au point que la miniere entrât dans le plomb, mais sans une véritable réunion, & seulement en morceaux. J'y ajôutai encore quatre drachmes de la même graine de plomb, je donnai le feu, & cela fit une fusion claire, déliée, & dans laquelle la miniere avoit fort bien pénétré le plomb. Je laissai réfroidir le têt, & charger la fusion de scories, que je versai dehors, & j'obtins neuf drachmes de plomb bien fondu. Les scories étoient d'un brun très foncé. Je pris de nouveau ce plomb fondu, & le mis piece à piece sur une coupelle bien embrasée, je l'y poussai, & je trouvai après avoir déduit l'argent qui avoit été caché dans le plomb granulé, que cette miniere contenoit quinze lots & un scrupule d'argent pur par quintal; mais, ayant voulu effectuer une nouvelle séparation par l'acide du nitre, je n'apperçus aucun indice d'or. La quantité d'argent contenu dans cette miniere que je viens d'exprimer, méritoit sans contredit une attention particuliere. A' présent on demandera, s'il faut l'attribuer à la miniere même, ou aux particules de galene de plomb qui se trouvent répanduës entre les feuilles, & qu'on ne peut venir à bout d'en séparer,

féparer, même en les lavant? Je fuis affuré que c'eft de la miniere même que cela procéde. Car, premièrement, il y avoit fi peu de cette galene déliée fur les feuilles que cela ne fuffifoit pas pour faire aller d'abord la miniere à fond dans l'eau. En fecond lieu, ce n'étoit que la pure galene; & l'on fait que c'eft bien tout fi elle donne quatre à cinq lots d'argent au quintal. Troifièmement, on ne pouvoit remarquer, ni dans la miniere même, ni tout à l'entour, aucuns indices d'un métal noble. J'avois, en quatrième lieu, fi bien choifi & fi exactement lavé ma miniere auparavant, qu'il ne pouvoit affurément y être refté que très peu de matiere étrangère; d'où s'enfuit que ce grain confidérable d'argent doit être le produit des feuilles mêmes de la miniere. Mais ce qui m'a encore plus convaincu, que ces feuilles étoient réellement la matrice de l'argent fusdit, c'eft l'épreuve à laquelle je les ai foumifes par le moyen des acides diffolvans; on y voit manifeftement qu'il n'exifte point d'argent natif dans notre miniere. Il eft à propos, ce me femble, que je rapporte ici ces épreuves en peu de mots.

Je pris un fcrupule de miniere fur lequel je verfai une dragme & demie d'acide de falpetre net. Ce mêlange fe mit fur le champ à bruire avec force, il en fortit des vapeurs, & il s'éleva dans le verre. Au bout d'environ fix minutes le bruit ceffa, & il ne fembloit pas que la folution dût aller plus loin; mais, quand elle eut paffé une nuit dans la digeftion la plus douce, le matin la plus grande partie fe trouva diffoute, & il ne reftoit rien au fond qu'une terre déliée blanche, qui, après l'écoulement de la liqueur & le defféchement, pefoit huit grains. Ce ne pouvoit être une terre alcaline; car autrement elle fe feroit diffoute dans l'acide du falpetre. Si c'avoit été une pure terre félénitique, elle n'auroit pas manqué de fe diffoudre, lorsque j'en ai fait bouillir pendant longtemps & avec force deux grains dans une once d'eau diftillée bien nette; & avec l'huile de tartre par défaillance elle auroit dû fe précipiter comme une terre calcaire, ce qu'elle n'a pas fait. Ce n'étoit point non plus de l'argent diffous & précipité comme une lune cornue; car premierement l'argent, du moins autant que j'ai pu l'obferver, n'eft pas engagé auffi profondément dans cette miniere; en fecond

cónd lieu, mon acide de nitre étoit certainement pur, & ſans aucun acide de ſel commun; troiſièmement, cette terre demeuroit d'un beau blanc même en plein air, au lieu que l'argent cornu a coutume de devenir bleuâtre en un inſtant. En un mot, c'étoit une terre déliée argilleuſe, formée par le mêlange d'une quantité de talc blanc avec du quartz délié; & c'eſt là dedans qu'on trouve, après les eſſais indiqués, l'argent qui y eſt contenu.

La même miniére, avec de l'eau régale faite de ſept parties d'acide du nitre & d'une partie de ſel ammoniac dépuré, offrit à tous égards les mêmes phénomenes. Après que j'eus ſéparé par la filtration ces deux acides des terres blanches ſusdites, l'alcali ne vint à bout d'en précipiter qu'une très petite quantité de particules de fer de couleur jaune; & en verſant ſur l'une & l'autre de la leſſive de ſang, elles devinrent d'un beau bleu.

L'huile de vitriol attaqua en un inſtant cette miniere avec violence, & cauſa une odeur déſagréable fort reſſemblante à celle du foye de ſouffre; ce qui venoit ſans doute des particules déliées de ſpath calcaire répandues ſur la miniere en feuilles. Cependant ces deux phénomenes ceſſerent bientôt; & bien que j'euſſe verſé deſſus encore trois parties d'eau diſtillée, & que je les euſſe mis enſuite à une digeſtion convenable, je ne trouvai pourtant par la précipitation avec un alcali rien qu'une quantité extrêmement petite de cette terre blanche friable, que ne peut être qu'une terre calcaire déliée diſſoute, ou une terre d'alun; mais il y en avoit ſi peu qu'il étoit impoſſible de la ſoumettre à aucunes épreuves.

De l'huile de tartre par défaillance très nette, verſée ſur cette terre, & miſe en digeſtion dans un ſucrier de verre bien couvert, n'attaqua point non plus la miniere; & après la filtration & la cryſtalliſation, on n'apperçut que quelques cryſtaux de tartre vitriolé, qui peuvent aiſément être le produit des particules déliées de marcaſſites de ſouffre répandues entre les feuilles.

Une

Une leſſive d'alcali cauſtique, que je prépare de deux parties de ſel de tartre, & d'une partie de chaux vive, ayant été diſſoute dans trois parties d'eau diſtillée, & verſée ſur cette miniere, elle ſe troubla à la vérité un peu, mais il ne parut pas que la miniere en fut conſidérablement attaquée. Ainſi je mis le tout à digérer ſur un fourneau chaud, & après l'y avoir laiſſé trois jours, je le filtrai.

La miniere ne parut avoir ſouffert aucun changement, ni dans ſa couleur, ni dans ſa texture, excepté qu'elle s'étoit gonflée, & étoit devenue plus gluante. Après trois fois vint-quatre heures de digeſtion ſur un fourneau chaud jour & nuit; cette miniere ſe montra à la vérité encore inaltérable dans ſa forme, mais fort réduite en bouillie, & toute ſa ſurface étoit couverte de cryſtaux de tartre vitriolé, étroitement unis enſemble. Je les ſéparai autant qu'il étoit poſſible, je trouvai un ſcrupule qui étoit le produit d'une dragme de miniere avec une once de cette leſſive. Que perſonne ne croye qu'une auſſi grande quantité d'acide vitriolique ait pû être attirée de l'air dans cette leſſive alcaline, dans un eſpace de temps auſſi court, la choſe n'eſt pas poſſible; mais cette leſſive a réellement diſſous qnelque quantité de la matiere de marcaſſite de ſouffre contenue dans la miniere, & s'eſt chargée d'une portion de ſon acide vitriolique. Ayant encore fait une digeſtion de trois jours avec une ſemblable leſſive ſur un fourneau chaud, & y ayant fait ſuccéder la filtration, je voulus précipiter la liqueur filtrée avec du vinaigre diſtillé de l'acide du nitre &c. mais il ne ſe précipita rien. Lorsque j'eus fait enſuite évaporer une partie de cette liqueur filtrée, il ne ſe fit point non plus de cryſtalliſation; d'où il s'enſuit que cette forte leſſive alcaline ne s'étoit imprégnée que de quelques particules vitrioliques. L'eſprit de ſel ammoniac n'eut pas plus de force ſur cette miniere, & il ne l'attaqua point du tout.

Il en fut de la terre calcinée ſous la mouffle comme de la terre crûe avec les diſſolvans acides, c'eſt à dire qu'elle commença par bruire une couple de minutes, & que ſa ſolution extraite par l'acide du vitriol ſe précipita avec la leſſive de ſang en une couleur d'outremer admi-

 rable;

rable; tandis que la ſolution par l'acide du nitre ſe précipite d'un bleu foncé, & que celle par l'acide du ſel eſt jaunâtre.

L'huile de tartre par défaillance précipita un peu de terre friable blanche de l'extraction par l'acide vitriolique.

L'huile de tartre précipita de celle qui avoit été faite par l'acide du ſel, quelque choſe qui étoit d'un gris de cendre foncé, & qui, après la filtration, l'édulcoration, & le deſſéchement, parut d'un bleu ſale; & ce n'étoit autre choſe que du fer précipité par l'alcali qu'on avoit continué à verſer deſſus. Mais, après un entier deſſéchement, cela paroiſſoit d'un blanc jaunâtre.

De l'acide du ſalpetre il ſe précipita une pouſſiere blanche friable par l'affuſion d'un alcali.

Je n'eus pas beſoin de procéder à la vitrification de cette miniere, puiſqu'elle avoit déjà montré ſon verre ſemblable à du recrément de fer, lorsque je l'avois réduite en ſcories avec le plomb.

Mais ce que je fis encore, ce fut de faire cuire cette terre calcinée en y mêlant un peu d'eau, & de la faire ſécher, comme on a coûtume de le faire avec une argille doucement calcinée.

Tel eſt donc le petit nombre d'eſſais que j'ai pû faire ſur cette miniere d'argent qui n'eſt pas encore bien connue; & la mince proviſion que j'en avois, ne m'a pas permis d'aller plus loin. Il réſulte néanmoins avec aſſez d'évidence de tout ce que j'ai rapporté; que *cette miniere eſt compoſée d'une terre argilleuſe déliée, mêlée avec ce qu'on nomme ſaffran de Mars talqueux & avec du ſouffre; de façon que ces différentes matieres réunies s'arrangent en feuilles poſées les unes ſur les autres, & qu'entre ces feuilles il ſe répand des particules déliées de marcaſſites de ſouffre, de plomb, de chaux, & de flux de ſpath, avec quelque peu de quartz; cette miniere etant comme une matrice qui reçoit l'imprégnation métallique de l'argent.* Ce ſont là en effet les différentes obſervations que j'ai eu lieu de faire dans les eſſais dont j'ai rendu compte jusqu'ici.

La

La terre argilleuse se manifeste sensiblement, par la maniere dont cette miniere en forme crue s'amollit dans l'eau, tient ensemble, & prend une forte consistance en séchant. On peut même ajoûter que cette terre blanche qu'on en sépare par l'eau régale & l'acide du salpetre se montre réellement en partie comme une terre argilleuse blanche pure.

On découvre *le saffran de fer*, en partie dans cette terre blanche tenant du talc, qui se trouve sous la terre blanche, & qui se précipite aussi de l'extraction de cette terre calcinée avec l'acide du salpetre par le moyen de l'acide du sel commun. La couleur même de cette miniere ressemble tout à fait à celle du saffran de fer; les doigts en sont colorés tout de même; & quand on en sépare le fer, elle demeure comme un talc délié blanc; sans compter qu'en général elle est fort commune dans toute cette contrée de montagnes.

Les indices *du souffre* existent dans la sublimation de cette miniere, tant par elle-même qu'avec le Mercure sublimé, l'arsenic, &c. ou même simplement par l'odeur qu'elle rend lorsqu'on la brûle à la chandelle. Mais cette odeur est surtout extrèmement forte lorsqu'on fait calciner la miniere sous une mouffle.

Les petites particules de marcassite répandües entre les feuilles s'apperçoivent au Microscope.

On y voit aussi le *spath calcaire*, qui se manifeste outre cela par le bruissement avec les acides, & par le précipité qui en tombe au moyen d'un alcali.

Le *spath fusible* est encore très sensible au Microscope; & on ne le voit pas moins distinctement dans la terre blanche qu'on obtient par le moyen de l'acide du nitre & de l'eau régale. Il se montre aussi suffisamment par le petillement qui se fait entendre, lorsque la miniere commence à griller. On observe en même tems la petite quatité *de quartz* qui s'y trouve, & qui ne s'altere pas dans ce feu médiocre.

La

La galene de plomb saute en quelque sorte aux yeux dans le Microscope.

Et quant à la présence de *l'argent* contenu dans la miniere, le produit en fait foi d'une maniere incontestable.

L'énumération de ces parties constituantes de notre miniere ainsi justifiée, sert encore à prouver sans réplique pourquoi à un feu modéré elle se convertit en une espece de métal à demi fondu (*Stein*). Tout métal à demi fondu, ce qu'on nomme *Pierre de fonde*, est un composé de miniere, de marcassites, & de terre alcaline, fondus ensemble, & qui forment une masse en apparence à demi-métallique; & c'est ce qui ne manque point d'arriver à notre miniere, toutes les fois qu'on la travaille tant par elle-même qu'avec des sels moyens, parce que la Nature y a déjà mis tout le mélange qui est requis pour la production de la pierre de fonde.

Je pourrois en bonne conscience terminer ici ce Mémoire; mais je demande la permission d'ajoûter encore en deux mots mes idées sur la génération de cette miniere. C'est une chose connue qu'à l'égard d'un grand nombre d'effets naturels, mais surtout presque dans tous ceux qui appartiennent au Régne minéral, on ne sauroit former de conclusions qu'*a posteriori*, c'est à dire, après avoir appris à connoitre les corps en les décomposant & en les réduisant à leurs parties constituantes. Or j'ai commencé par remarquer que notre miniere ne se trouve que sur les cavités des mines & dans des endroits pierreux. Je soupçonne donc que l'eau qui coule sous terre dissout cette terre argilleuse déliée, dont il y a toujours une bonne quantité dans les mines, & qu'elle la charrie insensiblement au dessus de ces cavités. Les autres matieres indiquées ci-dessus, particules de marcassites de souffre, de spath, de quartz, &c. s'introduisent ensuite dans cette miniere tandis qu'elle se forme, ou s'y attachent après sa formation.

Sur cette premiere couche argilleuse mince il s'en arrange dans la suite une nouvelle de la même maniere, & cela forme successivement les

les feuilles de cette miniere. Dans la suite, ou peut-être en même temps, les exhalaisons métalliques qui s'élevent de dessous terre, auront imprégné ces feuilles d'argent, & en auront fait une matrice aussi riche de ce métal; à quoi la galene du plomb pourra aussi avoir contribué en quelque chose, quoique trés modiquement. Ce ne sont là cependant que des conjectures qui ne passent pas les bornes de la vraisemblance, & qu'il faut par conséquent bien se garder de donner pour des vérités démontrées; car il demeure toujours incontestable, qu'aucun esprit créé ne sauroit pénétrer dans l'intérieur de la Nature, & que nous sommes trop heureux quand nous pouvons en bien voir l'écorce.



RECHERCHES
HISTORIQUES ET CHYMIQUES
SUR
LE COPAL,
TEL QUE LES APOTICAIRES ET LES EPICIERS LE VENDENT ORDINAIREMENT ICI.

PAR M. LEHMANN.

Traduit de l'Allemand.

I.

Quelque loin qu'on soit déjà parvenu dans l'examen des corps qui appartiennent aux trois Régnes de la Nature, il s'en faut bien non seulement que leur connoissance puisse être censée parfaite, mais même que l'on aït une histoire naturelle exacte & suffisante de la plûpart de ces corps; de sorte que l'on est bien éloigné d'avoir découvert leurs parties constitutives, & d'être au fait de leur génération. Je choisirai aujourdhui pour échantillon & pour preuve de ce que j'avance, un seul sujet; & ce sera ce qu'on nomme ici *Gomme de Copal* dans les Apoticaireries, & chez les Epiciers.

II. La *Gomme de Copal*, telle qu'elle se débite dans le Commerce, qu'on nomme aussi *Copal Oriental*, & que *Breynius* désigne par les noms de *Succinum Indicum* & *Beninense*, est, conformément aux Experiences que j'ai faites sur cette matiere, *une espece de bitume d'une couleur, tantôt jaune tirant sur l'or, tantôt blanche, ou brunâtre, qu'on trouve en morceaux informes, tantôt plus, tantôt moins pure, & qui ressemble à bien des égards à l'ambre.*

Ainsi les principales propriétés de ce corps se réduisent aux suivantes.

1. Qu'il

1. Qu'il n'a qu'une pesanteur médiocre, en quoi consiste une de ses conformités avec l'ambre; aussi bien qu'en ce que

2. il va à fond dans l'eau.

3. Sa couleur varie, la plûpart des morceaux étant d'un jaune couleur d'or, quelquefois plus obscur, quelquefois plus clair; & dans ce dernier cas ils ont une belle transparence. Il y en a pourtant aussi de plus blancs, qui sont alors à peine clairs, ou même qui n'ont point du tout de transparence: mais d'autres au contraire ont la clarté du verre, & ne lui cédent pas en transparence.

4. Les morceaux de *Copal* n'ont pas une figure déterminée; tantôt ils sont gros, tantôt petits, & de diverses figures, ronds, anguleux, allongés, &c.

5. Certains morceaux sont parfaitement purs, tandis que d'autres sont entourés & enduits de terres de toute espece, comme de l'argille blanche, de la terre grasse, ou quelquefois ils sont entremêlés de sable fin.

6. Dans un grand nombre de pieces on trouve toutes sortes de choses, comme il y en a de renfermées dans l'ambre, en particulier des fourmis, des mouches, de petits scarabées, de la terre de mousse, &c. Il m'est arrivé même, en brisant quelques unes de ces pieces, de trouver au milieu une cavité qui contenoit quelques gouttes d'une eau claire, qui avoit le goût un peu salé.

7. Le *Copal* ne rend de soi-même aucune odeur; mais, quand on l'a tenu pendant quelque temps dans la main, on sent une odeur agréable, & qui n'est pas trop forte.

8. On n'apperçoit non plus aucun goût particulier, quand on le met dans la bouche; mais il se laisse briser fort aisément sous la dent, à l'exception d'une sorte particuliere, qu'on rencontre quelquefois au milieu des autres morceaux, qui est tout à fait blanche, & pour la plûpart sans aucune transparence; on peut le tailler en lames avec le couteau comme de la corne, mais, comme la corne aussi, on ne sauroit le mettre en poussiere sous les dents.

9. En frottant le *Copal*, il devient fort électrique, & garde son électricité pendant un espace de tems assez considérable. Il ne la perd pas même, quand on le brûle à la chandelle; & en le brûlant ainsi, cela en fait un corps noir comme de la suye.

10. Du reste le *Copal* se laisse travailler comme l'ambre; seulement il est plus tendre, ce qui l'empêche de pouvoir recevoir toujours un aussi beau poli.

III. Les circonstances qui viennent d'être rapportées servent à distinguer notre Copal d'un autre corps qui porte le même nom, mais qui n'est en effet qu'une Gomme résine, laquelle, suivant le témoignage des Voyageurs & des Droguistes, découle d'un arbre du Canada, des Iles Antilles, & de quelques autres contrées d'Amérique, quand il se fait des fentes à cet arbre, qui, à cause de cela porte le nom de *Planta Copalifera*, que plusieurs regardent comme le véritable nom de son espece. En attendant, cette conformité de nom a été cause que la plûpart des Droguistes ont regardé tout le Copal comme un produit végétal. Le premier que je sache qui l'ait rapporté aux especes du succin, & encore n'a-ce été que dans le titre de son Ecrit, c'est feu M. le Docteur *Sendel*, qui, dans une Lettre au célébre *Breynius*, qu'il a intitulée *de Succino Indico*, a rempli un petit nombre de pages de diverses remarques sur le *Copal*, & conclut en ces termes: *Pseudosuccinum hocce resinam potius esse judicavi, cui tamen magna gummatis portio esset adjuncta*. Cela fait voir qu'il prenoit effectivement le *Copal* pour un produit du régne végétal. On trouve cette Lettre jointe à celle de *Breynius*, *de melonibus petrefactis Montis Carmel*.

Quant aux Anciens, ils paroissent avoir eu notre *Copal* en vue lorsqu'ils ont parlé du *Succinum Africanum*, puisque dans ces derniers tems il n'a pas été possible de découvrir sur toutes les côtes d'Afrique la moindre trace du succin proprement dit, ou de l'ambre. *Pline*, au Chapitre 2. du XXXVII Livre de son *Histoire Naturelle*, indique divers lieux de l'Afrique où ce succin doit se trouver; & *Agricola* n'a fait autre chose que copier fidèlement ce passage dans le 15 Chapitre du

du IV Livre de son Traité *de la nature des fossiles.* *Wittich*, dans son Livre des pierres bézoardiques, indique la *Gomme de Copal*, sans expliquer ce que c'est. *Ferrandus Imperatus*, dans son *Histoire Naturelle*, Liv. XIV. Ch. 8. prend le *Gummi animae* pour une espece de succin. *Valentin*, dans son *Musaeum Musaeorum*, dit que c'est *Resina odoris fragrantis ad Olibanum accedentis*, & ajoute qu'elle vient d'un arbre, *ex arbore Copalifera*, que *Plücknet* a décrit Tab. LVI. Fig. 1. C'est donc proprement:

RHUS V. *Copalinum.* Linn. Spec. Plant. p. 266.

—— *Foliis pinnatis integerrimis, petiolo membranaceo articulato.* Royen. Lugd. Bat. Linn. Mater. Medic. 152.

—— *Elatior foliis impari pinnatis, petiolis membranaceis articulatis.* Gronov. Virg. 149.

—— *Obsoniorum similis Americana, gummi candidum fundens, non serrata, foliorum rachi, medio alata.* Plucknet, Almag. 318. Tab. LVI. Fig. 1.

Wormius dit dans son *Musaeum* que le *Copal* vient de l'arbre *Copalifera*, d'où procede le *Gummi animae.* Il se trompe, car celle-ci est

Courbatils: *Hymenaea.* Hort. Cliffort. 484. Hort. Upsal 305. Linn. Mat. Med. 515.

Ceratia diphyllos antegoana, ricini majoris fructu nigro, siliqua grandi incluso. Plucknet, Almag. 96. Tab. LXXXII. Fig. 2.

Arbor siliquosa ex qua Gummi Elemi elicitur. C. B. Pinac. 404.

Cet arbre croit principalement dans le Bresil, & dans quelques Isles de l'Amérique. M. le Professeur *Cartheuser*, dans sa *Materia Medica*, l'appelle *Jetaiba.*

Pomet, dans son *Histoire des Drogues*, dit que le *Copal Oriental* est une résine claire & transparente, d'un jaune couleur d'or, qui découle des tiges de certains arbres d'une médiocre grosseur, qui portent des feuilles semblables à celles du noyer, & des fruits comme les concombres. Ceux-ci doivent avoir la couleur brune des chataignes, & contenir une farine d'un goût agréable. Outre les propriétés sus-

 dites

dites, le même Auteur exige que le Copal se laisse piler, qu'il se fonde au feu, & qu'il ait à peu près l'odeur de l'encens. Mais il ajoûte qu'on en obtient rarement de cette sorte, & que cela est cause qu'on se sert du Copal d'Amérique, qui découle de la tige & des branches de certains arbres qui ressemblent au Peuplier noir. Ces arbres croissent en grande quantité sur les Montagnes des Isles Antilles, d'où les pluyes & les torrens les emportent, & les conduisent dans les lits des eaux courantes. Ainsi *Pomet* prend le *Copal* pour un produit du régne végétal, & non pour une espece de succin, parce qu'il n'a pas une odeur aussi agréable. *Lemery*, qui lui donne le nom particulier de *Pan Copal*, répéte d'ailleurs les mêmes choses, & presque avec les mêmes termes, dans son *Dictionnaire des Drogues*. Ainsi l'un & l'autre avoüent quon tire le *Copal* des eaux & du lit des rivieres. Seroit-il arrivé ici la même chose qu'avec les Anciens, le *Boccone*, & d'autres, qui ont pris le vrai succin pour une résine coagulée dans l'eau, & venant des pins, sapins, & autres arbres qu'on trouve sur les côtes de la Mer Baltique.

Hartmann, au second Chapitre de son *Histoire du Succin*, est en doute, si on le trouve en Afrique, & s'exprime ainsi: *Si non alius error Succinum Orientale progenuit, resina Copal Succinum mentiri aptissima, hoc nomine ab Officinis Pharmaceuticis adoptata.*

Tout ce qui vient d'être rapporté, fait assez voir qu'il reste encore beaucoup d'incertitudes, tant par rapport au lieu natal de notre *Copal* qu'au sujet de sa génération. Ce qu'il y de plus vraisemblable, c'est de s'en tenir à ce que le Docteur *Sendel* a dit, que la plus grande partie du *Copal*, ou de ce qu'on nomme *Succinum Indicum*, nous vient d'Afrique, & en particulier des contrées autour de *Benin*, Province située sur la côte d'or de Guinée. Ce rapport est confirmé par notre digne Confrère, M. *Marggraf*, qui a parlé lui-même à un homme venu des lieux d'où l'on tire le *Copal*, lequel lui a assuré que pour le trouver on est obligé de creuser fort avant dans le sable sur les côtes de la mer. Je n'ai garde de le contester; tout au contraire je suis

ſuis dans l'idée qu'on en découvre de la même maniere en divers autres endroits. M. *de la Condamine*, dans la Rélation de ſes Voyages jusqu'à l'intérieur de l'Amérique Méridionale, raconte que les Indiens de ces endroits ſe ſervent de Copal, en guiſe de chandelles, après l'avoir envelopé dans des feuïlles de Bananier, ou de Piſang. On eſt auſſi bien aſſuré qu'il en vient en abondance du ſemblable des Iles Antilles, comme on l'a vû dans les paſſages ci-deſſus allégués de *Pomet* & de *Lemery;* ce qui eſt confirmé par les rélations de pluſieurs autres Auteurs. Je ne ſaurois pourtant dire ſi M. de la *Condamine* a eu en vue notre *Succinum Indicum*, ou la Gomme réſine indiquée plus haut; mais je conjecture que c'eſt du premier qu'il veut parler, parce que l'expérience m'a a appris, que quand on l'a une fois allumé, il brûle tout de ſuite, en jettant une flamme aſſez claire jusqu'à ce qu'il ſoit entièrement conſumé. Et pourquoi la Nature ne produiroit-elle pas ſous le ſept ou huitième degré de latitude méridionale la même ſubſtance qu'on trouve à de ſemblables degrés de latitude ſeptentrionale?

IV. Au milieu de cette diverſité de circonſtances incertaines, & de cette contrariété dans les récits, tant des Auteurs qui nous ont laiſſé des deſcriptions de cette matiere, que de ceux qui nous en donnent aujourdhui, je me trouve dans l'impoſſibilité de fournir là deſſus quelque choſe de complet. Il eſt cependant néceſſaire de ſavoir à quel régne ce corps appartient. C'eſt ce que les Expériences chymiques pourront mettre en évidence. Sans m'arrêter donc davantage, je vais rapporter celles que j'ai faites moi-même *ſur le Copal, tel qu'on le trouve dans nos Apoticaireries & chez les Epiciers*. Mais je dois remarquer dès l'entrée, que je m'en ſuis procuré de diverſes Apoticaireries d'ici, & des principaux Magazins des Epiciers, & que j'en ai employé de pluſieurs eſpeces, ſans me mettre en peine du haut prix auquel on en vendoit quelques unes. J'ai examiné chaque ſorte à part, & j'ai choiſi à chaque fois les morceaux les plus purs pour mes Expériences. J'appelle morceaux les plus purs, ceux qui ſont le moins entourés de parties hétérogenes, dans lesquels il n'y a point d'inſectes renfermés, & qui ſont exempts du mélange de terre, de ſable, &c.

De

De tels morceaux ſont par conſéquent d'une clarté tranſparente; d'un jaune couleur d'or, & d'une ſubſtance compacte. Après avoir pris ces précautions, j'ai trouvé que tout le Copal que nous avons ici eſt de la même nature, ſans qu'il y ait d'autre différence que celle qui vient du degré de pureté. Car, pour ce qui regarde la groſſeur des morceaux, la couleur plus ou moins haute, & la figure des différentes pieces, ce ſont là des choſes purement contingentes. Je vais donc commencer par rapporter ce qui concerne la ſolution de ce corps dans les divers diſſolvans qui peuvent agir ſur lui.

V. Les Atteliers de pluſieurs Artiſtes, & en particulier des Peintres & des Verniſſeurs, montrent déjà combien de voyes on a employé pour diſſoudre le *Copal*, & le faire entrer dans la préparation d'un vernis clair. Je ne me ſuis point attaché à ce deſſein dans mes travaux. Mais perſonne que je ſache ne s'eſt encore donné la peine de rechercher à quel régne de la nature le Copal devoit être rapporté. Or c'eſt à quoi j'ai fait le plus d'attention dans le petit nombre de mes eſſais; j'ai ſoigneuſement examiné les effets que les divers diſſolvans faiſoient ſur cette ſubſtance, pour en conclurre quelle eſt la place qu'on doit lui accorder dans les claſſes des productions naturelles. Pour cet effet j'employai d'abord des acides concentrés du régne minéral.

1. Une dragme de Copal pilé bien menu, ſur laquelle on verſe *de l'huile de vitriol blanche* pure, teint l'acide du vitriol concentré, & le rend en un clin d'oeil d'un brun foncé; puis, quand on le met à digérer à un feu doux, il ſe diſſout tout à fait en peu de temps. Quand on fait enſuite l'abſtraction de cette ſolution dans une retorte de verre au feu de ſable, elle s'éleve avec des vapeurs jaunes, & ſort en gouttes d'un rouge brun; & la choſe en effet ne ſauroit être autrement. Il ſe ſublime dans le cou de la retorte environ trois ou quatre grains d'un beau ſouffre jaune; & au fond de la retorte il demeure deux grains d'une maſſe noire, brillante, & legere comme de l'écume.

2. Une dragme de Copal réduite en pouſſiere déliée avec une once *d'acide de ſel commun* fumant, que j'avois diſtillé moi-même par le moyen

moyen de l'huile de vitriol diſtillée & duement rectifiée, ne fut point attaquée; mais le Copal ſurnagea, & à une chaleur douce, l'eſprit fuma, laiſſant le Copal ſans aucune altération.

3. Une dragme de Copal entier avec une once *d'acide du nitre* que j'avois moi-même préparé, & duement rectifié, ne vouloit pas au commencement ſe laiſſer attaquer; mais, ayant été mis à une digeſtion d'abord aſſez douce, qui fut conduite à la fin jusqu'à bouïllir au feu de ſable, tout entra dans une belle ſolution claire, d'un jaune couleur d'or; de façon néanmoins qu'après le réfroidiſſement, il s'en ſépara une ſubſtance gluante jaune, & comme de l'éponge, qui ſurnageoit.

4. Une dragme de Copal avec une once & demie *d'eau régale* préparée de ſept parties d'acide du nitre, & d'une partie de ſel commun, ne ſe laiſſoit point du tout attaquer, pas même en bouïllant au feu de ſable; mais à la fin presque toute l'eau régale s'étoit envolée; & ce qui reſtoit formoit un corps gluant d'un brun clair.

5. Le *vinaigre diſtillé*, ni *l'acide des fourmis*, ne produiſirent non plus aucun effet ſur notre gomme. De même une *eau pure diſtillée*, dans laquelle on la fit bouïllir pendant longtems, n'y effectua aucun changement, n'en ayant même rien attiré à ſoi; car, après la filtration, cette eau n'avoit pris aucun goût, & il ne s'en précipitoit rien; elle n'entroit en effervescence, ni avec les acides, ni avec les alcalis, & ne troubloit, ni la ſolution de lune dans l'acide du nitre, ni celle de mercure ſublimé dans l'eau diſtillée. Et quoique je me fuſſe d'abord flatté que le Copal, en bouïllant dans le vinaigre diſtillé, lui donneroit ſa couleur jaune, cela ne réuſſit pourtant point; mais le Copal demeura dans une parfaite conſiſtance, ſurnagea, prit l'apparence d'éponge; & après que je l'eus ſéparé du vinaigre, & édulcoré, il donna avec l'huile de térébenthine un beau vernis à laquer, d'un jaune couleur d'or. *La liqueur minérale* auſſi, comme *l'eſprit de nitre doux*, en bouïllant avec le Copal, ne fit par l'extraction que le

rendre comme de l'éponge; & elle prit un goût amer. Cependant elle tira d'abord assez considérablement la couleur jaune du Copal, lequel fut réduit en une masse blanche, gluante & molle, qui, dans l'huile de térébenthine, donna un beau vernis à laquer clair.

Les *menstrues alcalins* ne furent pas non plus capables d'en rien dissoudre; car, ayant employé l'huile de tartre par défaillance la plus pure, aussi bien que l'esprit de sel ammoniac préparé avec le sel alcali fixe, la chaux vive, & la ceruse, je ne remarquai point qu'il en résultât aucun changement.

VII. *L'esprit de vin le plus rectifié*, *non plus que le meilleur esprit de vin tartarisé*, n'ont pas été plus efficaces. Mais, ayant pris une dragme de Copal clair pulvérisé, sur laquelle je versai deux onces d'esprit de vin le plus rectifié; *item* une dragme du même Copal que je mêlai exactement avec deux onces d'esprit de vin tartarisé; & ayant mis chacun de ces deux mélanges dans un verre assez spacieux & bien bouché, puis les ayant secoué tout de suite pendant quatre à cinq heures, tout fut dissous à l'exception de dix grains d'une matiere blanche gluante, qui se laissoit étendre & travailler comme une résine, sans pourtant s'attacher fortement aux doits. La solution filtrée étoit d'un jaune couleur d'or; elle avoit au commencement un goût douceatre; mais vers la fin ce goût devenoit agréable, aromatique, balsamique, & tirant sur l'amer. C'est de M. *Marggraf* que je tiens cette Expérience, qu'il m'a communiquée il y a déjà quelque temps.

Mais, comme ce secoüement me paroissoit trop long & trop ennuyeux, je répétai l'essai avec une dragme de Copal réduit en poussiere déliée, sur laquelle je versai un lot d'esprit de vin tartarisé, & je fis bouillir le tout dans un alembic de verre de médiocre grandeur. Comme par ce moyen l'esprit de vin s'envoloit en grande partie, j'en versois peu à peu de nouveau, de façon que j'en employai cinq onces à cet usage; au moyen de quoi tout le Copal fut dissous, à la réserve d'une petite quantité de la matiere blanche & gluante ci-dessus indiquée.

Je

Je filtrai la solution, & j'en tirai une essence pareille à celle qu'on obtient en secouant.

Après tout cela, je pris de ces masses gluantes demeurées des travaux précédens, & qui pesoient ensemble un scrupule & demi; je versai dessus une demi-once d'une huile de térébenthine pure, je fis bouillir le tout au feu de sable, & j'obtins par ce moyen un beau vernis à laquer clair tirant sur le brun, qu'on pouvoit fort bien appliquer, qui séchoit bien, & donnoit un beau lustre, fort propre à relever les couleurs vives.

Lorsque j'eus l'honneur de communiquer cette Expérience à M. le Conseiller Privé *Eller*, il eut la bonté de me dire, que la solution du Copal s'effectuoit encore mieux dans un bon esprit de *vin camphré.* Je pris donc deux onces de l'esprit de vin le mieux rectifié, dans lequel je fis dissoudre autant de camphre qu'il étoit possible; je versai ensuite cet esprit de vin sur du Copal réduit en poussiere déliée, & je mis le tout bien bouché à une douce digestion, secouant en même tems souvent ce mélange, & de cette maniere j'arrivai à la solution du Copal, à une très petite quantité près. Cette solution donne pareillement une espece de vernis fort délié, mais clair.

VIII. Voyant donc que l'huile de térebenthine attaquoit si bien le Copal, j'en pris un lot auquel je joignis deux onces *d'huile de térébenthine;* je fis bouillir le tout convenablement au bain Marie, & cela entra en solution d'une maniere complette pour donner un beau vernis clair d'un jaune couleur d'or; lequel, ayant été délayé avec de nouvelle huile de térébenthine, & passé convenablement à travers un drap net, donnoit un lustre encore plus beau que celui que j'avois préparé avec l'esprit de vin simple.

Des Expériences reitérées m'ont appris dans la suite que quelques autres huiles éthérées sont aussi propres à dissoudre le Copal; & j'ai procuré de semblables solutions avec l'huile de Sabine & avec celle de Menthe.

Au contraire les huiles exprimées, comme celles de lin, d'olives, d'amandes, en bouïllant avec le Copal, n'en dissolvent rien; mais il demeure au fonds sous la forme d'une masse recuite.

IX. Voilà jusqu'où j'en suis venu pour la dissolution du *Copal* par la voye humide. Je voulus voir ensuite comment je réussirois par la voye séche. La premiere chose donc que je fis, ce fut d'allumer une dragme de Copal à la chandelle, & de la laisser brûler dans une cueillere de fer jusqu'à ce qu'elle s'éteignit d'elle-même. Cela brûla avec une forte flamme jaune, & rendit une odeur particuliere qui n'étoit pas tout à fait désagréable; la fumée en étoit noire & épaisse. Le résidu paroissoit d'un noir brun; il étoit brillant & cassant, pesoit deux scrupules, & conservoit encore toute l'électricité que le Copal possede avant qu'on le brûle. Mais cela ne voulut plus s'allumer sur le feu, & ne fit que se fondre, jusqu'à ce qu'il resta à la fin une scorie noire, legère, & comme de l'éponge. L'huile de térébenthine en procura la solution à très peu de chose près; & le produit en fut un beau vernis rouge.

Quant je dis dans ce Mémoire que j'ai obtenu du vernis de différentes manieres, je veux remarquer en général que la chose arrive toutes les fois qu'on fait bouïllir le Copal dans l'huile de térébenthine; & cela en la maniere accoutumée, soit au bain de sable, ou au bain marie; & j'ai fait bouïllir les mêlanges jusqu'à ce que je me sois apperçu que l'huile avoit pris la consistance d'un vernis; ensuite à chaque fois j'ai fait passer ce vernis aussi chaud qu'il a été possible à travers un drap net, & je l'ai gardé dans un vase bien bouché & envelopé. S'il arrivoit dans quelcun de ces travaux que le vernis fut trop épais, il n'y a qu'à y verser, suivant la proportion requise, de l'huile de térébenthine, & le mettre digérer à une chaleur douce; & de cette maniere on peut se procurer le vernis aussi épais ou aussi délié qu'on le juge à propos.

Ayant apperçu, en brûlant le Copal, que c'étoit un corps composé de différentes parties constitutives réunies ensemble, je continuai à faire les recherches convenables pour en découvrir la nature.

X. Je

X. Je pris pour cet effet quatre onces du Copal le plus pur, transparent, d'un jaune couleur d'or, & réduit en menue poussiere; je les mis dans une retorte de verre spacieuse qui en étoit à peine à demi remplie, & à laquelle j'adaptai & lutai un récipient convenable; ensuite je donnai le feu par degrés pendant trois heures de tems; & d'abord il sortit un peu de phlegme, puis le feu ayant été augmenté, il s'éleva des vapeurs épaisses d'un blanc jaunâtre, qui furent suivies de gouttes d'un brun clair; & à le fin, quand tout fut réfroidi, je trouvai, après la filtration par un double filtre, humecté avec de l'eau distillée, que le phlegme pesoit juste une dragme; il avoit une odeur tant soit peu empyreumatique, étoit tout à fait insipide, & ne différoit d'ailleurs en rien de l'eau commune. Quant à l'huile, il en demeura dans le filtre trois onces & demie, sans compter le peu qui s'étoit attaché au cou de la retorte, au filtre, &c. Cette huile paroissoit d'un beau verd; mais, quand on la tenoit vis à vis de la chandelle, elle étoit d'un rouge de grenade. Dans le col de la retorte il n'existoit pas la moindre trace de sel volatil; & le résidu qui pesoit une dragme & sept grains, étoit d'un noir brillant, comme la suye, & exposé dans l'huile de térébenthine à une douce digestion, il se dissout pour la plus grande partie en un vernis d'un rouge foncé. L'huile étoit assés épaisse, & l'odeur qui n'en étoit pas desagréable approchoit de celle du succin, comme aussi la couleur verte de cette huile a assez de rapport, ou plutôt une parfaite ressemblance, avec l'huile impure de succin. C'est donc une grande erreur que celle des personnes qui croyent, qu'on ne vient j'amais à bout de tirer des bitumes une belle huile verte, à moins qu'on ne les ait distillés avec de la cendre nette. Le goût de cette huile n'a rien de brûlant; mais il est plutôt agréable, aromatique & balsamique; au moins ne me paroit-il pas aussi desagréable que le goût de l'huile impure qu'on tire de l'ambre jaune. Cependant il ne faut pas disputer des goûts. Je répéte que dans ce travail il faut que la retorte ne soit tout au plus qu'à demi-pleine, & qu'on doit augmenter le feu convenablement par degrés; car, dans la distillation *per se*, le *Copal* se comporte comme l'ambre, c'est à dire, qu'il monte & écume

avec force. Le récipient doit aussi être bien luté; & quand les vapeurs montent, si contre l'attente elles passent au travers du lut, qu'on se garde bien d'approcher de la lumiere. Cette précaution est en particulier nécessaire, quand on fait cette distillation à un feu découvert dans une retorte d'argille, ces retortes ayant pour la plûpart le col court; car, quand une fois les vapeurs ont pris feu, il n'est pas aisé de les éteindre.

Je fis encore un essai semblable, en mêlant une once de Copal avec autant de sable de Freyenwalde; j'en remplis à moitié une retorte de verre bien garnie, & je poussai par degrés à un feu découvert; ce qui me donna à peu près la quantité de phlegme, d'huile, & de *Caput mortuum*, proportionnée à la dose de *Copal* que j'avois employée, avec cette différence cependant que durant la distillation il ne s'élevoit pas avec autant de force.

Il en fut de même lorsque je traitai de la maniere susdite une once de Copal avec autant de chaux vive, & le résidu pesa une once & douze grains. J'observai les mêmes circonstances lorsque je mêlai une once de Copal avec autant du sel commun. Mais, ayant mêlé une demi-once de Copal avec quatre onces d'eau distillée, & deux dragmes de sel commun, fait macérer le tout pendant quatre jours, & ensuite distillé d'un alembic de verre proportionné au feu de sable, il sortit au commencement pour la plus grande partie de pur phlegme, qui fut suivi d'un peu de belle huile éthérée blanche, partie en vapeurs blanches, partie en gouttes de la même couleur, que je recueillis ensemble dans le récipient adapté; après quoi je fis la séparation du phlegme par le filtre, comme on le pratique avec les autres huiles éthérées. Ayant ensuite remarqué que les gouttes dans la distillation commençoient à sortir jaunes, je changeai le récipient, & je tirai une huile jaune, puis rougeâtre, & à la fin brune, qui tomboit en gouttes pesantes, & qui étoit accompagnée de vapeurs jaunes. Quand tout ce qui pouvoit être poussé fut sorti, le résidu qui pesoit juste une demi-once, parut d'un noir brillant, en forme d'éponge; & après que

je

je l'eus lessivé, filtré, évaporé, & mis en crystallisation, il donna un sel commun ordinaire. Il resta dans le filtre deux scrupules d'une terre noire, friable, & insipide. L'huile blanche qui étoit sortie tout au commencement, quoiqu'elle pesât à peine un scrupule & demi, rendoit une odeur extrêmement agréable.

Le Copal distillé avec autant de craye donna précisément les mêmes produits qu'avec la chaux vive; & toutes les additions semblables ne produisent d'autre effet sur le Copal, sinon d'empêcher que pendant la distillation il ne s'éleve aussi fort qu'il le fait en le distillant *per se*.

XI. Ayant donc procédé de la maniere décrite ci-dessus par des essais réitérés, que j'ai faits aussi en partie dans des retortes d'argille bien garnies, au feu de reverbère, j'ai remarqué que le produit moyen d'un Copal net étoit au moins à chaque fois de $\frac{3}{4}$ ou même de $\frac{7}{8}$ d'huile. Je rassemblai de la sorte au delà de deux livres & demie d'huile verte; & une suite toute naturelle de mes travaux précédens étoit que je m'attachasse présentement à la rectification de cette huile impure. La rectification des huiles empyreumatiques est une chose trop connue, pour que je doive m'y étendre ici. Je rapporterai donc seulement d'une maniere succinte les diverses voyes que j'ai employées pour cet effet.

Je pris d'abord quatre onces de mon huile verte, je les mis dans une retorte de verre, dont je nettoyai le col aussi exactement qu'il étoit possible; puis je distillai au commencement à un feu doux d'une coupelle de sable, ce qui fit d'abord sortir une couple de gouttes d'une huile d'un brun foncé, qui probablement s'étoit attachée au haut de la concavité de la retorte en la remplissant, sans qu'on eut pû l'en essuyer. Ceci commença à part dans le récipient. Quand ces premieres gouttes eurent cessé de couler, j'adaptai un autre récipient, je le lutai convenablement, & il sortit alors des gouttes verdâtres tirant sur le couleur d'olive pâle, avec quelques vapeurs blanches déliées. Le feu ayant été ensuite considérablement augmenté, il vint des gouttes brunes pesantes; & aussi-tôt j'adaptai convenablement un autre récipient sec,

ſec, dans lequel je reçus ces gouttes, qui furent ſuivies d'autres, peſantes auſſi, & d'un rouge foncé. Au fond de la retorte demeura un ſcrupule d'une ſubſtance noire ſemblable à du charbon, comme celui que donne la poix de bateau brûlée, ou plutôt comme celui de l'aſphalte. Je pris l'huile d'un verd pâle qui avoit été diſtillée dans le ſecond récipient, & procédai encore quatre fois de la maniere ci-deſſus décrite; & pendant ces opérations il monta une huile toujours plus déliée, plus claire, & d'un verd plus pâle; cependant elle ne voulut pas devenir tout à fait blanche. Mais, l'ayant encore rectifiée trois fois, elle ſortit d'un tout à fait beau blanc. Néanmoins cette huile a la propriété de toutes les autres huiles fétides rectifiées, c'eſt qu'à l'air elle recouvre inſenſiblement ſon ancienne odeur & ſa couleur précédente.

Je pris de plus deux onces d'eau diſtillée, dans leſquelles je verſai quatre onces de mon huile verte impure, je mis le tout dans une retorte aſſez ſpacieuſe, de façon qu'il n'y avoit que le tiers de la retorte qui fut rempli; & ayant pouſſé ce mêlange par degrés au feu de ſable, cela me donna une belle huile, d'un verd pâle, déliée & claire; & à la fin il ſortit de nouveau une huile peſante d'un rouge brun, que je reçus dans un récipient à part. Je rectifiai deux fois ce qui avoit paſſé par deſſus avec de l'eau diſtillée, & j'obtins à la fin une belle huile blanche claire & déliée.

Je procédai encore préciſément de la même maniere ſur l'huile verte impure, dont je pris deux onces, que je mêlai avec une once de craye nette pulvériſée, & que je pouſſai dans une retorte de verre; car l'huile ſortit d'abord peſante & d'un brun rouge, mais, après trois cohobations ſur de la craye fraîche, elle devint d'un verd pâle. Il revint enſuite des gouttes d'un brun rouge, que je recueillis à part. La craye étoit devenue de couleur iſabelle, ſans avoir d'ailleurs ſouffert aucun changement.

Je rectifiai, par une cohobation quatre fois réiterée ſur de l'eau diſtillée, l'huile rouge & peſante, qui, dans chacune des rectifications précé-

précédentes étoit sortie la derniere, & j'en obtins pareillement une huile fort déliée d'un verd pâle.

XII. Je poussai présentement plus loin mes essais, pour voir ce qui arriveroit, tant à l'huile tirée du Copal distillé *per se*, comme il a éte rapporté §. X. qu'à celle qui avoit été rectifiée de la maniere qui vient d'être décrite.

1. L'huile, tant impure que rectifiée, surnageoit au dessus de l'eau; & tant qu'elle y demeuroit, il étoit impossible de l'allumer avec une chandelle.

2. L'une & l'autre, versées goutte à goutte sur des charbons ardens, brûloient sans donner de flamme claire; mais elles se réduisoient en une suye noire.

3. Dans l'esprit de vin le plus rectifié elles tombent toutes deux au fond; mais, si l'on allume l'esprit, alors il brûle, soit que ce soit un alcohol, ou qu'il ait été tartarisé, & à la fin l'huile s'allume aussi, & se consume toute entiere en jettant une forte flamme jaune. Mais, si l'on distille de l'esprit de vin avec de l'huile rectifiée, alors celle-ci s'éleve & sort avec l'esprit; au lieu qu'avec l'huile impure l'esprit ne fait sortir que la partie éthérée; & le reste ne vient en gouttes rouges qu'après que le feu a été augmenté.

4. L'huile tant impure que rectifiée brûlent, comme les autres huiles, avec une mêche; mais il y a cette différence que la premiere s'enflamme beaucoup plus aisément & se consume plus vîte que la seconde. La cause en est vraisemblablement, que l'huile rectifiée s'imbibe plus aisément dans la mêche que l'huile impure: de là vient que la mêche allumée attaque tout à la fois la quantité entiere d'huile, qui se met à brûler ensemble. L'une & l'autre de ces huiles jettent en brûlant une forte vapeur, ou fumée épaisse.

5. Elles ont aussi l'une & l'autre une forte odeur, mais qui n'est pas tout à fait désagréable; de façon qu'une petite quantité, surtout de l'huile impure, se fait sentir à trente ou quarante pas.

6. Trois parties d'huile rectifiée & quatre parties d'huile impure dissolvent une partie de fleurs de souffre en un baume épais, d'un rouge fort foncé.

7. Cette huile, travaillée convenablement avec de l'alun, donne un vrai pyrophore, comme M. le Professeur *Spielmann* l'a aussi remarqué de l'huile qu'on tire du bitume de Lampertsloch.

XIII. Je poussai encore plus loin mes essais, & je mêlai une demi-once de l'huile impure avec deux onces d'une huile de vitriol blanche; elles se mêlerent en un clin d'oeil sans frémissement; & ce mêlange devint d'un rouge foncé & épais. L'ayant laissé reposer huit jours dans mon poële à une chaleur tempérée, je le poussai dans une retorte de verre bien garnie à un feu ouvert par degrès; ce qui fit élever & sortir un acide vitriolique, pénétrant & volatil, d'un brun noir, mais qui n'étoit pourtant pas épais. Le feu ayant été augmenté, il monta un peu de souffre dans le cou de la retorte, mais le poids en alloit à peine à deux grains. Le résidu étoit une terre noire, friable, qui n'avoit ni goût, ni odeur, & qui pesoit environ un scrupule. Les choses se passent de la même maniere, quand on mêle de l'huile rectifiée avec cet acide vitriolique concentré.

XIV. Une demi-once, soit d'huile rectifiée, soit d'huile impure, mêlée avec une once & demie d'un esprit de sel fumant pur rectifié, s'unissent d'abord ensemble, & donnent une teinture d'un brun rouge. Au commencement il surnageoit pourtant encore un peu d'huile; mais elle se mêla comme le reste, après une digestion de huit jours dans un appartement médiocrement chaud. Je procédai sur ce mêlange comme ci-dessus en le poussant d'une retorte bien garnie, & alors il s'éleva de la plus belle couleur de rubis; après quoi suivirent quelques gouttes d'une huile rouge épaisse, qui sortoient fort pesamment, & avec cette différence, que l'huile impure en rendit un scrupule & demi. Je ne nierai point que ce phénomene avoit quelque chose de suspect, & que la couleur rouge donnoit à penser, la raison de son existence ne se présentant pas d'abord. C'est ce qui fit que je recommençai l'Expérience

avec

avec de l'huile rectifiée fraîche & de l'esprit de sel fumant; répétant le même procédé qu'auparavant, & employant le feu le plus doux. Ici je m'apperçus qu'avec un semblable feu, & la retorte n'étant pas seulement à demi-pleine, il s'élevoit dès le commencement avec force sur le mêlange des bulles, qui en éclatant réjaillissoient tout autour, & qu'ensuite la liqueur d'un brun rouge qu'elles avoient répandue, montoit & sortoit en partie, sans avoir souffert aucun changement. Après avoir fait cette observation, je répétai l'Expérience pour la troisième fois; mais, au lieu d'une retorte, je pris un alembic de verre d'une médiocre hauteur, j'y mis un chapiteau de verre, j'y adaptai un récipient spacieux, & le tout ayant été convenablement luté, je fis la distillation sur le sable. Par là j'obtins un bel esprit blanc très clair, qui fut suivi de quelques gouttes d'une huile rouge épaisse, que je recueillis à part. Cet esprit ne sortit pas avec des vapeurs aussi fortes, qu'a coûtume de le faire l'esprit de sel commun, mais il vint goutte à goutte, & sans chaleur remarquable. Je fus curieux d'essayer ce qui arriveroit à cet esprit avec les édulcorans. Pour cet effet, je pris deux onces de l'esprit de vin rectifié le plus fort, auxquelles je mêlai deux dragmes de cet esprit de sel qui étoit sorti dans la distillation; & je remarquai qu'ils ne s'échauffoient point ensemble, mais qu'ils se réunissoient sans la moindre action ou réaction. J'en fis la digestion comme à l'ordinaire, tenant le mêlange au froid pendant huit jours dans un vase bien bouché & lié; après quoi je le poussai par dessus le chapiteau sur la coupelle de sable. Il sortit par rayes, & j'augmentai le feu de tems à autre. Quand il ne se montra plus de rayes, je mis un autre récipient dans lequel il entra encore trois dragmes d'un esprit de sel acide au plus haut degré, qui avoit un peu l'odeur d'huile empyreumatique; & pendant ce tems là il sortit continuellement de fortes vapeurs. Tout à la fin il vint encore trois ou quatre gouttes d'une huile jaunâtre. Le feu le plus véhément ne put rien pousser au delà, mais il resta au fond de l'alembic une terre noire, legère & friable. L'esprit de sel doux qui avoit passé en distillant pesoit une once & demie, étoit d'une belle clarté, transparent, agréable au goût, non cependant comme un esprit

de sel doux ordinaire, mais tenant de l'aromatique & du balsamique; & quoiqu'au commencement il eût quelque chose de désagréable, qui tiroit à l'huile empyreumatique, ce goût se perdit entierement dans l'espace de huit jours.

XV. Une demi-once d'huile tant impure que rectifiée avec une once & demi d'esprit de nitre fumant pur, surnagea pour la plus grande partie: cependant l'acide du nitre en devint jaune. Il ne s'alluma poutant pas avec cette huile, comme cela lui arrive avec une partie des huiles distillées du régne végétal. C'est un nouveau caractère qui fait voir que notre sujet appartient au régne minéral. Ce mêlange opère tout de même en le mettant à une digestion modérée pendant huit jours, & en le distillant ensuite doucement au feu de sable; alors l'acide du nitre vient d'abord de lui-même & seul, après quoi l'huile suit, mais par morceaux gluans, comme de l'éponge ou de l'écume, qui tiennent les uns aux autres, & dont la couleur est d'un brun de cerise. Je séparai ensuite d'avec l'esprit de nitre qui étoit sorti, ces pieces d'huile qui étoient posées dessus, & qui avoient pris une consistance tout à fait solide. Lorsqu'il ne voulut plus rien sortir, j'agmentai le feu en le conduisant au plus haut degré; ce qui fit monter encore dans le col de la retorte, mais pas trop haut, quelque chose d'un brun tirant au noir; mais il n'y eut pas moyen de le faire entrer dans le récipient. Quand tout fut réfroidi, il demeura une masse cassante d'un brun foncé, qui n'avoit aucun goût, ni aucune odeur, ne faisoit point de bruit sur les charbons ardens, & ne jettoit aucune flamme, mais s'écouloit, se dissipoit, & se fondoit comme la poix.

XVI. Je mêlai une once de l'huile tant rectifiée qu'impure avec quatre onces tant d'alcohol que d'esprit de vin tartarisé, je les tins pendant huit jours à une douce digestion, & il se fit quelque extraction. Le tout ayant été distillé ensemble sur le sable par dessus le chapiteau, ce qui sortit, vint d'abord par rayes, & parut être un esprit balsamique. Tout fut distillé sur le sable par dessus le chapiteau, & s'en alla par rayes, représentant de même un esprit balsamique; à la fin il vint une

huile

huile rouge, que je recueillis à part; &, comme on peut aisément se l'imaginer, j'en tirai plus de l'huile impure que de l'huile rectifiée.

XVII. L'huile impure mêlée avec l'huile de tartre par défaillance, & avec l'esprit de sel ammoniac préparé du sel alcali fixe, devient d'abord d'un blanc de lait; il s'en dissout un peu, & le reste surnage. Mais, si l'on prend de l'esprit de sel ammoniac avec la chaux vive, tout se dissout à la vérité en un mêlange jaune, mais il en tombe ensuite une partie au fond. Il en arrive autant à tous égards à l'huile rectifiée, avec cette différence seulement, qu'avec l'esprit de sel ammoniac préparé de la chaux vive, elle devient d'un blanc jaunâtre & trouble; mais, quand elle s'est reposée, l'esprit qui vient au dessus prend une couleur rougeâtre agréable. En distillant les deux especes d'huile avec ces esprits urineux volatils, on obtient un fort mauvais sel volatil huileux. Au contraire, sur le sel alcali fixe les deux especes d'huile montent, de façon que d'abord il vient un peu de phlegme; ensuite l'huile paroit, en partie en vapeurs d'un blanc jaunâtre, en partie en gouttes verdâtres; & à la fin il vient de l'huile d'une rouge brun, laquelle doit être recueillie & gardée séparément.

Toutes ces huiles épaisses, rouges & brunes, venuës ainsi à la fin du travail, comme je l'ai rapporté dans les §§. précédens, peuvent être également purifiées par des rectifications réitérées, faites à part sur de l'eau distillée.

XVIII. Les deux especes de notre huile se mêlent avec toutes les autres huiles exprimées & distillées. J'en ai eu la preuve avec l'huile de lin, d'olive, d'amande, aussi bien qu'avec l'huile distillée de térébenthine, de sabine, de menthe, &c. Elles se comportent aussi avec l'esprit de vin le plus rectifié comme les autres huiles éthérées, seulement avec un peu plus de difficulté. Quand j'ai dissous de l'huile de Copal pure avec une autre huile exprimée, alors l'esprit de vin a attiré à soi la premiere, & l'huile exprimée s'en est séparée. Mais, quand j'ai fait le mêlange avec une huile éthérée, alors l'esprit de vin les attiroit toutes deux; mais il faut pour cela que l'huile de Copal soit parfaite-

ment pure, blanche, & ſans la moindre portion d'huile épaiſſe, ſans quoi celle-ci s'en ſépareroit dans la ſuite, & tomberoit au fond. Que ſi l'on mêle de l'huile de Copal pure avec de l'huile de térébenthine, alors l'alcohol attire la premiere, & laiſſe tomber au fond l'huile de térébenthine, comme de coûtume.

XIX. De tout ce que j'ai rapporté jusqu'ici, il paroit ſuffiſamment, à ce que j'eſpère, que la *Gomme de Copal* que l'on trouve ici dans nos Apoticaireries, & chez les Epiciers, n'eſt autre choſe qu'un vrai BITUME. Pour rendre la choſe encore plus évidente, il ſera néceſſaire d'indiquer ici quelques caractères principaux que doit avoir en général tout bitume, ou toute réſine.

Les réſines, ou bitumes, ſont des *corps minéraux, qui brûlent ſur le feu, & y jettent une fumée & une odeur qui leur ſont tout à fait propres; ils ne ſe diſſolvent, ni dans l'eſprit de vin, ni dans aucun autre menſtrue, à moins qu'on ne ſe ſerve de quelque procédé particulier; d'ailleurs ils ſont, tantôt fluides, tantôt ſolides, & dans le dernier cas ils ſont électriques. Les parties conſtitutives qu'on y trouve, ſont aqueuſes, graſſes, terreſtres, & ſalines; & celles-ci ſont fixes dans les uns, & volatiles dans les autres.*

En repaſſant à préſent toutes les Expériences faites ſur le Copal, telles que nous les avons rapportées en détail, elles nous découvrent toutes les parties conſtitutives ſusdites, à l'exception des ſalines; ce qui m'engage à bon droit à ranger le Copal au nombre des *bitumes ſecs qui approchent le plus de l'eſpece de l'ambre.* En effet

1. Le Copal, par ſa figure extérieure, par ſa forme indéterminée, par les inſectes & les autres corps qui s'y trouvent renfermés, auſſi bien que par ſes différentes couleurs, ſe montre très ſemblable au ſuccin, & par conſéquent à un bitume. (§. II.)

2. Il brûle (§. IX.) ſur le feu avec une flamme claire, de fortes vapeurs, une fumée épaiſſe, & une odeur particuliere, comme les autres bitumes, tels que l'ambre, les charbons de terre d'Angleterre, les charbons brillans, la poix de montagne, &c.

3. Après

3. Après avoir été consumé, il laisse, comme le font en partie les bitumes, un beau résidu leger & noir, qui a beaucoup de ressemblance avec l'asphalte brûlé. (§. IX.)

4. Il ne se laisse dissoudre, (§. VI. VII. VIII. & IX.) aisément, ni dans l'esprit de vin, ni dans aucun autre menstrue, à l'exception de l'huile de térébenthine, & ces menstrues n'en viennent à bout qu'après une forte digestion & ébullition. Que si c'étoit une Gomme, il faudroit qu'au moins l'eau distillée pût en dissoudre quelque chose, si ce n'étoit pas tout. Si c'étoit une Résine, elle devroit se dissoudre aisément au moins dans l'Alcohol. Si c'étoit une Gomme résine, les deux Menstrues devroient en attirer ce qui leur convient. Dès-là donc que les choses ne se passent pas de cette maniere, cela fournit une nouvelle preuve que c'est un corps d'un tout autre ordre, & qu'on ne peut le regarder que comme un bitume.

5. Le Copal, en le distillant, (§. X.) donne son peu de phlegme, sa double huile en grande quantité, & sa terre de poix, comme les autres bitumes.

6. Son phlegme (§. X.) se comporte comme le phlegme qu'on tire de la distillation de l'ambre *per se;* seulement il n'est pas mêlé avec un sel volatil acide.

7. L'huile qu'on en tire par la distillation (§. X.) a la même couleur, la même odeur bitumineuse, & le même poids spécifique, que l'huile de succin.

8. On obtient par sa rectification (§. XI.) la même sorte d'huile que fournissent les huiles bitumineuses rectifiées; & elle a la même vertu de dissoudre les corps, & les mêmes propriétés, que les autres huiles éthérées bitumineuses.

9. Cette huile se mêle avec plus de difficulté avec l'esprit de vin que les huiles éthérées du régne végétal, (§. XVIII.)

10. Le Copal avec l'huile de térébenthine donne un vernis, qui est pour la plus grande partie semblable au vernis d'ambre, (§. VIII.)

11. Son

11. Son *Caput mortuum* (§.X.) est aussi pareil à celui de l'ambre.

12. Son huile rectifiée ne s'allume pas plus que les autres huiles bitumineuses avec l'acide fumant du nitre, (§.XV.)

13. Avec cet acide, comme aussi avec l'acide concentré du vitriol, elle donne par l'évaporation une masse brune gluante, comme le font le font le naphte, le pétrole, &c. & feu M. *Neumann* nommoit cette masse *æmulum succini.*

14. Le Copal se laisse travailler comme l'ambre; seulement il est beaucoup plus mou, ce qui vient de la plus grande quantité de ses parties huileuses; car, tandis que l'ambre donne à peine $\frac{1}{4}$ d'huile, on en tire de notre Copal jusqu'à $\frac{7}{8}$, suivant mes Expériences du §.X.

15. L'ambre a dans l'eau, (§.II.) le même poids spécifique que le Copal.

XX. Si l'on vouloit tirer notre Copal de la classe des bitumes, parce qu'il ne donne pas un sel volatil comme l'ambre, on seroit en droit d'en faire de même à l'égard de diverses especes de poix de montagne, de bitume de montagne, de charbon de terre, de tourbes, de terre d'*umbra*, &c. ce qu'il seroit impossible de justifier, & qu'on ne peut pas même regarder comme une conjecture plausible. Car, c'est une chose encore en question que de savoir, si le sel volatil appartient comme une partie constitutive essentiellement nécessaire à la composition de tout bitume pur, transparent & consistant. Si cela étoit, il en résulteroit inévitablement pour conséquence, que dans la décomposition chymique de l'ambre, on doit trouver à chaque fois la même quantité de sel volatil, d'huile, & de *caput mortuum.* Mais, c'est à quoi répugnent les Expériences réitérées de *Lemery*, de *Neumann*, &c. De cette maniere même il faudroit toujours exiger de semblables parties dans chaque bitume solide. On a donc bien plus de raison de croire que le sel volatil de l'ambre est une chose contingente, & qui n'entre point indispensablement dans l'essence de chaque bitume, mais qui doit se trouver dans l'ambre entant qu'ambre. Et comme il paroit d'ail-

d'ailleurs que ces ſels volatils de l'ambre naiſſent d'un acide vitriolique, & d'une très petite quantité de parties terreſtres déliées, qui, ſelon toutes les apparences, procedent de ce que *Becher* a nommé *terra tertia*, ou *mercurialis*, on a d'autant moins ſujet de conſerver quelque doute là deſſus. L'acide même du nitre eſt capable de tirer de ſemblables ſels des ſujets végétaux. Quiconque aura répété l'Expérience de feu M. *Henckel*, faite avec deux parties d'eſprit de nitre fumant & une partie d'un eſprit de tartre duëment rectifié, & aura bien examiné ce qui en réſulte, ne diſconviendra pas de ce que j'avance. Mais ce n'eſt pas là l'unique Expérience qu'on puiſſe alléguer ſur ce ſujet. J'en puis produire une de celles que j'ai ſouvent répétées moi-même. Qu'on prenne deux onces de l'alcohol le plus fort; qu'on y ajoûte, en obſervant les précautions néceſſaires, autant d'eſprit de nitre fumant, préparé avec l'huile blanche de vitriol du nitre, le plus exactement dépuré de la premiere cryſtalliſation. Qu'on laiſſe ce mêlange bien bouché digérer à froid pendant quelques jours. Qu'enſuite on le pouſſe d'une retorte de verre, d'abord à un feu doux, on obtient de la maniere connue, d'abord la naphte du nitre, & enſuite un eſprit acide. Qu'on augmente après cela le feu jusqu'au plus haut degré, il ſublimera un beau ſel blanc transparent à longues pointes, qui ſe montrera revêtu de tous les caractères d'un ſel acide volatil ſec. On n'en a pas à la vérité par onces; mais des grains & des demi-ſcrupules ſuffiſent ſouvent pour la démonſtration d'une verité. Il eſt donc vraiſemblable que, dans leur origine, tant l'ambre que notre Copal, ſont des réſines fluides, qui dans la ſuite du tems ſe coagulent au moyen d'un acide du régne minéral; de ſorte que tout ſe réduit à la quantité plus ou moins grande dans laquelle cet acide y afflue, ou dans la maniere dont il attaque telle eſpece des parties conſtitutives, & s'unit plus ou moins fortement avec elles.

Je crois que les Expériences que j'ai rapportées dans ce Mémoire, & qui ont été pouſſées auſſi loin que mes forces l'ont permis, ſuffiſent pour prouver que le Copal de nos Apoticaires & de nos Droguiſtes eſt un vrai bitume, qui reſſemble pour la plus grande partie à l'ambre, & par conſéquent que c'eſt un ſujet du régne minéral.

 OBSER-

OBSERVATIONS ANATOMICO-PATHOLOGIQUES SUR L'ENFLURE EXTRAORDINAIRE DE L'ABDOMEN PROCE'DANT DE DIVERSES CAUSES.

PAR M. MECKEL.

Traduit du Latin.

OBSERVATION I.

Sur une espece singuliere d'Hydropisie renfermée dans un sac.

On me livra le 27. d'Avril de l'année passée le cadavre d'un homme de quarante ans pour en faire la dissection. L'abdomen étoit extrèmement enflé, très dur, & résonoit, sans qu'on sentit aucune ondulation d'eau flottante, qui revint d'un des côtés de l'abdomen après qu'on avoit pressé le côté opposé. L'état du corps quant au reste étoit assez naturel, & paroissoit avoir été robuste. Après avoir écarté les intégumens communs, je séparai avec précaution les muscles abdominaux qui couvrent le péritoine. Cela étant fait, on n'apperçut derriere le péritoine aucune matiere fluide. Il falut donc le lever aussi, toujours avec circonspection, & alors je trouvai un sac fermé de toutes parts, qui étoit renf.rmé dans la cavité du péritoine, formé d'une membrane qui lui étoit propre, & dont l'épaisseur avoit plus d'une ligne, & qui s'étendoit depuis le bassin jusqu'aux fausses côtes par toute la cavité de l'abdomen. Au devant de ce sac, dans la région ombilicale, il y avoit des morceaux déchirés, semblables à de la chair fongueuse; ils étoient irrégulierement attachés au sac, & le péri-

toine

toine étendu par dessus y tenoit fortement. Le sac ayant été ouvert du côté qui regardoit le nombril, il en sortit avec impétuosité une eau brune, qui s'écoula successivement jusqu'à la concurrence du poids de quarante livres. Cette eau séreuse n'avoit presque point d'autre odeur que celle des parties adjacentes gangrénées. Le sac ouvert avoit vers les hypochondres une substance assez semblable à celle des ligamens, & son épaisseur étoit de deux lignes. Par en-bas il couvroit dans le bassin la vessie & l'intestin droit, en sorte qu'il ressembloit à une membrane tendue sur ces parties. De là il alloit en montant au dessus de la partie gauche du colon, à la tunique externe commune duquel il étoit attaché, & il convroit pareillement les grands vaisseaux qui reposent sur les vertébres. Son expansion vers ces parties supérieures avoit repoussé les productions du péritoine qui servent à tenir les intestins dans leur situation naturelle, savoir le mésentere & le mésocolon, & les avoit enfoncé, avec les intestins qui y sont attachés, vers les hypocondres. Je trouvai donc l'intestin coecum dans l'hypocondre droit, devant le rein droit, & posé sur lui, & l'ileon qui s'y étoit transversalement inséré, au dessus de la région ombilicale. De plus, les intestins grêles étoient tous renfermés dans l'épigastre & dans la cavité de l'hypocondre gauche, au dessus de ce sac, comme dans les femmes grosses ils sont ordinairement placés au dessus de l'uterus. Le sac même s'étendoit sous le cartilage ensiforme du sternum & les fausses côtes, adhérent au péritoine, qui tapisse les muscles du bas ventre, de la longueur d'une paume, depuis le nombril vers en-haut; de façon que, ni les intestins, ni le ventricule, n'etoient visibles, tandis que le sac étoit dans son état de dilatation. La partie supérieure du sac étoit noire & sphacéleuse; la partie inférieure vers le bassin d'une couleur jaunâtre; l'intestin coecum qui se trouvoit au dessus, étoit fort dilaté & livide; l'omentum tout entier tenoit au péritoine, & les intestins avoient conservé leur couleur naturelle. Le foye avoit été tellement repoussé par le sac dans la cavité de l'hypocondre droit que le haut de son lobe droit remontoit jusqu'à la quatrieme côte, & qu'il étoit fort caché derriere les bords des cartilages des côtes de cet hypocondre.

Le ventricule placé dans l'hypocondre gauche, remontoit jusqu'à la cinquieme côte.

Outre cela le foye, au dessus de l'endroit où l'omentum & la partie transversale du colon se trouvoient adhérens contre nature, tenoit aussi par sa surface supérieure, au moyen de plusieurs ligamens aussi contre nature, au péritoine dont étoient envelopés les muscles qui ferment l'épigastre, & au diaphragme; & quant à son bord tranchant, il étoit fortement attaché au sac de l'hydropisie. La partie du colon qui forme sa seconde courbure dans le côté gauche, montoit dans la partie la plus haute de l'hypocondre gauche; & le ventricule placé au dessus se déroboit entierement à la vue, ayant été réduit par la contraction à la forme d'un gros boyau. La ratte avoit perdu de même sa situation naturelle, ayant été portée plus haut; & elle étoit adhérente partout à la partie postérieure de l'hypocondre. Le bas de l'intestin droit, couvert par le sac dans le bassin, étoit sphacéleux & noir. Les reins gardoient leur situation naturelle derriere le sac & le péritoine. Les vaisseaux des testicules étoient variqueux, & les testicules eux-mêmes squirreux. Le thorax contenoit des poûmons comprimés, petits, adhérens; mais qui n'avoient, ni squirrosités, ni suppuration. Mais ce qui semble dans cette Observation le plus rare, & le plus digne de remarque, c'est que le péritoine étant demeuré dans son entier, & ne servant point d'envelope au sac, il s'en soit formé un dans la cavité du péritoine, ayant sa membrane propre & continue partout, adhérent aux parties qui ont été indiquées, & dans lequel n'entroit aucun grand vaisseau. C'est ce qui faisoit que la membrane de ce sac pouvoit être aisément séparée partout du peritoine, & des parties adjacentes de l'abdomen.

Il est par conséquent difficile d'expliquer d'où ce sac a tiré la formation de ses membranes. Que la tunique celluleuse puisse en s'étendant former des sacs de diverse capacité, & remplis de liqueurs de différente espece, c'est à la vérité ce que prouvent abondamment les Observations des stéatomes, & d'autres tumeurs cystiques de toutes sortes de

genre;

genre; auſſi n'y auroit-il point de difficulté dans l'explication que nous cherchons, ſi ce ſac avoit été adhérent hors du péritoine, avec ſes racines dans la membrane cellulaire. Il n'en eſt pas de même d'un ſac renfermé dans la cavité du péritoine; la choſe eſt tout autrement embarraſſante. Il ne nous paroit pas qu'on puiſſe recourir à d'autre raiſon qu' à la nature de ce liquide visqueux & coagulable qui s'exhale de l'abdomen; mais il demeure toujours d'extremes obſcurités dans la maniere dont ce liquide a pu former un ſac de cette grandeur & de cette conſiſtance, dans lequel une matiere ſi copieuſe ſoit demeurée continue, ſans le créver, & ſans inonder tous les interſtices des inteſtins & des viſceres. Il ne paroit pas qu'on puiſſe nier que cette tumeur a pris naiſſance dans le baſſin, & qu'en s'élevant inſenſiblement de là, elle a écarté les inteſtins, en les pouſſant dans l'abdomen, comme le fait l'uterus dans la groſſeſſe. En effet, une quantité de liquide répandue de toutes parts dans l'abdomen n'auroit pu s'y raſſembler & s'y condenſer en un ſemblable ſac membraneux, ſans renfermer les inteſtins, ou s'inſinuer dans leurs interſtices. Comme donc on ſçait par une expérience quotidienne que, d'une liqueur exhalante, visqueuſe, & gélatineuſe, il peut ſe former des fibres, & qu'on en trouve en effet dans les cadavres, au moyen desquelles tous les viſceres de l'abdomen ſont adhérens entr'eux & avec le péritoine, ou bien les poûmons avec la pleure tiennent au thorax; on peut concevoir de même, comment une liqueur ſemblable raſſemblée, & peut-être épaiſſie après l'inflammation, a pu former ce ſac, fortement adhérent au péritoine dans le baſſin. Nous appercevons auſſi très évidemment de quelle maniere cette membrane peut continuer à former une tunique celluleuſe contre nature, & à recevoir les plus petits vaiſſeaux qui ſe prolongent des autres membranes, quand nous faiſons attention à la diſpoſition que les vaiſſeaux les plus ſubtils ont à ſe remplir dans de ſemblables corps, où le vice de la coalition contre nature des viſceres eſt une ſuite de la production de ces ligamens auſſi contre nature qui doivent leur origine à l'épaiſſiſſement d'une liqueur exhalante. Outre pluſieurs petites préparations anatomiques de cet ordre que je conſerve,

 j'ai

j'ai un poûmon droit attaché par le lobe inférieur au sac entier de sa pleure, au moyen d'une celluleuse formée en ligamens. L'injection met sous les yeux les vaisseaux en très grande abondance, prolongés de la pleure & de la surface du poûmon, & continués dans cette membrana qui est un tissu de ligamens. Nous supposons donc que la matiere d'une liqueur épaissie étant descendue au fond du bassin, peut-être dans cet endroit où le pli de Douglas fait une espece de recoin entre l'intestin & la vessie, y aura formé d'abord une espece d'ampoulle, ou de petit sac; qu'ensuite de très petits vaisseaux, mais en très grande quantité, auront continué à exhaler dans sa cavité un liquide qui s'y est accumulé; ce qui a également favorisé, & l'expansion, & la formation ultérieure des particules visqueuses & des petites membranes qui ont contribué à l'accroissement du sac. De la même maniere, nous comprenons que les petits vaisseaux du péritoine comprimés par ce sac accrû ont répandu extérieurement sur le sac un liquide plus épais; en sorte que cette membrane s'étant insensiblement épaissie, elle a acquis une forces suffisante pour résister à l'action du liquide qui s'est augmenté au dedans. C'est par ces moyens donc que le sac dont j'ai donné la description a pu devenir une masse dont la compression exercée sur les visceres a causé leur corruption sphacéleuse, en y arrêtant la libre circulation du sang; corruption, qui, comme je l'ai dit, s'étoit manifestée dans l'intestin droit, & dans le colon. De plus, la compression des poûmons, en embarrassant toujours plus la circulation du sang, a hâté la fin du misérable qui éprouvoit tous ces symptômes. Que cette liqueur n'ait pas été pourrie par une si longue stagnation, c'est ce dont nous nous étonnerons d'autant moins que nous ferons plus d'attention aux Observations suivantes qui font foi de l'inaltérabilité d'un semblable liquide ainsi renfermé. Mais ce dont on ne sauroit douter, c'est qu'une hydropisie de cette espece ne soit incurable, puisque l'épaisseur de la membrane où l'eau est renfermée ne permet aucune resorption; on ne peut employer qu'une cure palliative, propre cependant à conserver assez longtems la vie au malade, en recourant à la ponction, ou paracentese de l'abdomen, qui produit de bons effets,

tant

tant que la matiere contenue dans le ſac demeure fluide, & que la celluleuſe n'eſt pas trop condenſée pour qu'on ne puiſſe la bleſſer ſans danger.

OBSERVATION II.

Le cadavre d'une femme de ſoixante ans, qui avoit été robuſte & graſſe, préſentoit un abdomen extrèmement gonflé & fortement tendu, ſans fluctuation dans la tumeur, qui avoit l'air de l'hydropiſie aſcite. Il y avoit eu à la cuiſſe gauche une tumeur inflammatoire, qui avoit ſéparé l'épiderme de la peau, ſous laquelle il ſembloit que fût renfermée une matiere purulente; mais on trouva le contraire après la diſſection de la peau. Les muſcles de l'abdomen étoient dilatés comme dans les femmes groſſes, le péritoine placé ſous ces muſcles avoit conſervé ſa ſtructure naturelle, ſans qu'on y remarquât aucune adhérence contre nature auxe viſceres. Après l'ouverture du péritoine ſe montra un ſac qui rempliſſoit tout l'abdomen; il étoit blanchâtre avec des taches tirant ſur le bleu. Quand on eût ſéparé une hydatide de moindre groſſeur qui étoit attachée à ſa partie antérieure, on apperçut des veines qui couroient partout ſur ſa ſurface. Du côté gauche ce ſac repoſoit librement ſur la partie gauche du colon, s'étendant depuis les os pubis jusqu'à l'épigaſtre, où il ſe terminoit à la diſtance de deux travers de doit de l'extrémité libre du cartilage enſiforme. Le colon étoit placé transverſalement ſur ce ſac dans la partie la plus haute de l'épigaſtre, & l'omentum flottoit librement au deſſus de la tumeur.

Du côté droit ce ſac tenoit par le bas au péritoine, & par ſa ſituation dans la cavité de l'os des il::s il avoit pouſſé l'inteſtin cœcum au deſſus de la crête de cet os. Pour l'inteſtin ileon, il alloit à droite derriere la tumeur jusqu'au deſſus de la ſeconde vertebre des lombes, & en deſcendant il s'inſéroit à l'inteſtin cœcum. Les inteſtins grêles, ſavoir le jejunum & l'ileon, étoient renfermés dans l'hypocondre gauche au deſſous du méſocolon. Le foye avoit été porté plus haut, & ſon bord pointu s'écartoit de trois pouces du bord des côtes de l'hypocondre droit; ce viſcere étoit d'ailleurs parfaitement ſain. Le diaphragme

me remontoit au dessus du foye, dans l'interstice entre la troisieme & la quatrieme côte. Le lobe gauche du foye, par son bord antérieur aigu, se terminoit à l'extrémité la plus basse du sternum. Dans cet endroit, la partie supérieure de l'arc du diaphragme montoit jusqu'au milieu du corps du sternum. Le ventricule se trouvoit placé derriere les intestins grêles dans l'hypocondre gauche, sans aucune lesion ni adhérence contre nature.

L'uterus allongé du côté gauche étoit devant la tumeur qui le couvroit dans le bassin, & à laquelle il étoit attaché par une celluleuse contre nature. La trompe gauche de Fallope qui s'étoit réunie à l'ovaire tenoit fortement au sac; & la gauche, attachée aussi par le bas au même sac, étoit gonflée par l'eau qui la remplissoit. A' la place de l'ovaire droit se présentoit cette tumeur considérable, dont la longueur étoit de douze pouces de Paris, & la largeur de dix & demi. Après l'ouverture il en coula une eau tout à fait claire, un peu salée, parfaitement semblable à la lymphe du sang, qui écumoit beaucoup, & donnoit d'abord à l'argent une couleur noire; cependant elle n'entroit point en effervescence avec l'huile de vitriol & l'esprit de nitre; mais de son mélange avec l'huile de vitriol exhaloit une odeur des plus fétides & insupportable, au lieu qu'avant ce mélange elle n'avoit aucune odeur sensible. Le sac contenoit vint quatre livres de cette eau, poids médicinal.

Je trouvai la cuisse où il y avoit eu inflammation, parfaitement immobile dans son articulation avec l'os innominé. Mais, en écartant les muscles, toute la substance ligamenteuse de l'emboiture, & la substance cartilagineuse qui incruste la tête de l'os du femur, se trouverent changées en un os raboteux & tuberculeux.

Le bord de l'emboiture étoit pareillement devenu inégal & osseux; tandis que la surface entiere de cette même emboiture étoit raboteuse partout, & percée d'une infinité de trous. La tête de l'os du fémur dans toute sa surface étoit inégale & tuberculeuse, un anneau osseux l'environnoit, & ses inégalités s'ajustoient tellement avec le bord

osseux

osseux de l'emboiture, que l'os fortement adhérent à l'emboiture étoit dans une parfaite immobilité, sans la moindre disposition au mouvement rotatoire qui lui est naturel. De la tête de l'os du fémur descendoient, dans l'ouverture inférieure de l'emboiture, des avances irrégulieres osseuses, qui faisoient un tout continu avec celles de l'emboiture. Le reste de l'os du fémur n'avoit souffert aucun dommage.

Cette Observation nous apprend, d'un côté, qu'il peut se rassembler dans les hydatides une très grande quantité de l'eau lymphatique du sang; & de l'autre, que les liqueurs ainsi renfermées se corrompent & s'épaississent très rarement. L'espece de ce liquide renfermé indique la facilité de le faire sortir des tumeurs où il se trouve; & c'est l'unique ressource contre l'extreme compression des poûmons & des visceres que ces tumeurs causent. Quant à la carie de l'os du fémur & de l'emboiture, il semble qu'on doive l'attribuer à la pression qu'avoit éprouvée le côté droit.

OBSERVATION III.

Tumeur de l'abdomen, accompagnée d'une hernie incarcerée, & d'un entortillement particulier du mésentere.

Dans le cadavre d'une vieille femme, d'environ 70 ans, je trouvai l'abdomen enflé à l'hypogastre; & après l'ouverture parut une tumeur molle, ovale, membraneuse, barriolée extérieurement partout de lignes brunes, & endommagée dans sa partie inférieure par une noirceur sphacéleuse. Cette tumeur, sortie de l'ovaire droit, avoit rempli tout le bassin; & elle étoit remplie d'une liqueur jaunâtre fétide. Sa partie la plus élevée tenoit fortement à l'omentum, avec laquelle elle s'étoit comme réunie; l'omentum descendoit du colon, & étoit garni de beaucoup de graisse.

Le colon étoit noir, sphacéleux, & si rétréci qu'il étoit plus mince que l'intestin grêle du même corps, ayant à peine un pouce de diametre; du côté droit, il alloit en montant derriere l'intestin jejunum;

 puis

puis continuant au dessus de la tumeur il alloit au delà du jejunum; du côté gauche, il avoit une très grande noirceur sphacéleuse, & descendant dans le bassin, il alloit se cacher derriere la tumeur, & se terminer dans le rectum. L'intestin iléon entierement sphacéleux étoit tout noir, & s'étant contracté il se trouvoit caché sous la tumeur, dans la partie du bassin la plus basse; il s'en étoit attaché quelque partie vers le bas de la tumeur, derriere laquelle il alloit ensuite en s'élevant du bassin, & montant à droite, pour aller se terminer dans le colon, qui étoit aussi fort noir & comprimé dans cet endroit. Le mésentere de cet intestin formoit un triple contour vers la trompe de Fallope qui depuis l'uterus alloit en montant aboutir à la tumeur; ce mésentere avec la racine de la tumeur avoit formé trois conduits spiraux, & tous ses vaisseaux veineux étoient extrèmement gonflés de sang. La partie la plus basse de l'intestin jejunum, placée derriere la tumeur & dans le bassin, sortoit de la cavité de l'abdomen du côté droit, & se rendoit dans un petit sac, ou production du péritoine, derriere le ligament de Poupart. Ce petit sac hernieux avoit la plus grande noirceur sphacéleuse; l'intestin qui y entroit, étoit gangréneux, & rempli d'un sang de couleur brune. La partie de l'intestin cachée dans le sac y étoit resserrée; & derriere le ligament très épais qu'on nomme de Poupart, la compression l'avoit rendu blanc. Cela étoit cause que la partie de cet intestin qui continuoit dans l'abdomen derriere la tumeur, étoit toute resserrée, noire, & corrompue; au contraire sa partie la plus considérable, plus voisine du ventricule, & placée sous lui, reposant sur le colon du côté droit auprès de la tumeur, étoit tellement dilatée, ses tuniques avoient acquis tant d'épaisseur, & les vaisseaux rouges gonflés de sang y étoient si abondans, que son diametre surpassoit trois pouces, jusqu'à sa fin sous le mésocolon. Pour le ventricule & le duodenum, ils n'avoient été endommagés par aucune inflammation, ou dilatation contre nature, semblable.

Ce qui mérite d'être le plus soigneusement considéré dans cette Observation, c'est cet entortillement particulier du mésentere qui a été la cause de l'inflammation & de la gangrene de l'iléon. Il m'arrive assez souvent

ſouvent de trouver un ſemblable changement contre nature dans le méſentere des enfans; & il eſt quelquefois accompagné de gonflement des inteſtins & de corruptions gangréneuſes. Peut-être même qu'il en peut réſulter des douleurs, & des inflammations dans les inteſtins, qui ſont incurables. On paroit devoir en rapporter l'origine à la trop grande réplétion des inteſtins & au gonflement qu'elle produit: & ce ſont là les cauſes les plus fréquentes de la mort des enfans. En effet une partie de quelque inteſtin, gros ou grêle, étant ainſi gonflée, preſſe latéralement une autre partie adjacente, de façon que l'inteſtin avec le méſentere qui lui ſert de ligament eſt déplacé; d'où s'enſuit que la racine du méſentere la plus prochaine des vertebres eſt néceſſairement tordue: ce qui arrête la circulation du ſang dans les inteſtins, & ſurtout ſon reflux par les veines.

La contraction extreme du colon & de tout le gros inteſtin, étant ſuivie d'irritation & d'inflammation, annonce ſuffiſamment la forte contraction des fibres muſculaires qui doit en réſulter; & la même Obſervation explique avec autant d'évidence d'où procede la dilatabilité de l'inteſtin grêle jejunum, & l'épaiſſeur des tuniques de ces inteſtins par la répletion des vaiſſeaux ſanguins. Mais une circonſtance qu'il ne faut pas négliger, c'eſt le changement arrivé dans le duodenum au deſſus du méſocolon. Il y a tout lieu de conjecturer que, dans le paſſage de l'inteſtin grêle duodenum derriere le méſocolon dans le jejunum, la Nature a opposé quelque réſiſtance particuliere, qui, faiſant ſéjourner le chyle plus longtems dans le duodenum, eſt la cauſe qu'il ſe mêle d'autant mieux à la bile & au ſuc pancréatique. C'eſt cette même réſiſtance qui fait obſerver dans la pratique tant de flatuoſités, qui paroiſſent naître de ce que les alimens ſont trop longtems arrêtés dans les inteſtins, & s'y corrompent, lorsque le chyle ſuffiſamment élaboré ne trouve point d'iſſue pour ſe rendre du ventricule & du duodenum dans le jejunum. On apprend encore par cette Obſervation, combien les viſceres abdominaux peuvent être léſés par une ſemblable tumeur petite & mobile, dont la ſeule compreſſion peut aiſément être & devient ſouvent une cauſe de mort.

I 2 OBSER-

OBSERVATION IV.

Tumeur extraordinaire de l'abdomen, causée par un gonflement des intestins qui venoit de leur introsusception.

Les accidens qu'on nomme *introsusceptions des intestins*, ne sont, ni rares, ni mortels dans les enfans; & l'inflammation n'a pas coûtume de s'y joindre toujours. Comme les intestins des enfans sont lâches, il paroit qu'ils se démêlent plus aisément, & que leur constriction ne devient pas assez forte pour être mortelle. Mais, quand le même cas existe dans les adultes, il les met dans un très grand danger de la vie, & ne se termine presque jamais que par un misérere mortel.

Le cadavre d'une femme de trente-deux ans offroit une tumeur extraordinaire de l'abdomen, à travers les intégumens duquel on pouvoit distinguer les conduits des intestins qui s'avançoient en dehors. Après l'ouverture de l'abdomen, je trouvai une très grande protubérance des intestins grêles, en sorte qu'on ne pouvoit plus s'appercevoir qu'ils étoient grêles par leur diametre, mais seulement par l'expansion cylindrique également proportionnée de leurs tuniques. Les vaisseaux gonflés de sang rendoient ces intestins fort rouges; mais à la surface ils étoient couverts d'une croûte purulente fort tenace. Du ventricule descendoit l'omentum, farci d'une graisse dure & granuleuse; il étoit adhérent à la partie de l'intestin colon qui, placée au côté gauche, descend vers le rectum. Le diametre des intestins grêles dans cet état de protubérance alloit à deux pouces & demi; & la substance de leurs tuniques avoit deux lignes d'épaisseur. En poussant mes recherches au delà derriere ces intestins grêles, je ne trouvai, ni l'intestin coecum, ni l'endroit où le colon s'en continue; mais, sous le foye, dont la vésicule étoit fort gonflée d'une bile verte, se trouvoit l'intestin iléon gâté par le sphacele & la gangrene, lequel s'introduisoit dans le colon, près du coecum, sous le foye, le processus vermiforme étant situé sous le foye & la vésicule du fiel, & le coecum étant déchiré par une crévasse. L'iléon étoit étroit dans la partie où l'introsusception avoit

avoit eu lieu, mais au delà il étoit extraordinairement dilaté, en sorte que son diametre égaloit trois pouces & demi, & ses tuniques avoient deux lignes & demie d'épaisseur. Lorsque j'examinai ensuite plus attentivement cette introsusception, je trouvai que l'intestin iléon, dans l'endroit où il s'insere dans le colon, étoit entré de la longueur d'un pied dans le coecum & dans le colon, & s'étoit renversé dans celui-ci, en sorte que la tunique villeuse de l'iléon, noircie & corrompue, paroissoit extérieure au dedans du coecum; & celui-ci avoit été crévé par la dilatation que lui avoit causé l'entrée de l'iléon. Il y avoit pareillement une rupture de l'iléon dans sa partie la plus dilatée qui avançoit au delà de l'introsusception; & une partie des matieres contenues dans cet intestin s'étoit répandue dans l'abdomen.

Au dessous de cette introsusception de l'iléon, la partie transversale du colon, avec celle qui descend du côté gauche, s'étoit introduite dans la partie inférieure du colon qui forme la courbure du colon nommée *S. Romanum*, en sorte que toute cette partie des gros intestins qui étoit dans le cas de l'introsusception reposoit sur la cavité de l'os des iles du côté droit, & sur le muscle iliaque interne du même côté. Une partie aussi de l'omentum, avec la partie transversale du colon, étoit entrée dans la partie descendante du colon. Il n'y avoit pourtant là, ni corruption gangréneuse, ni rupture; la cohésion des intestins n'étoit pas non plus aussi forte que dans l'introsusception précédente, en sorte qu'on avoit plus de facilité à les retirer l'un de dedans l'autre.

Cette espece d'introsusception, la plus mauvaise de toutes, avoit sans doute été incurable, l'intestin iléon s'étant introduit & renversé dans le colon par l'orifice étroit de la valvule du colon. Les remedes qui pourroient agir avec force sur l'iléon, ou l'argent vif introduit dans le canal des intestins, seroient plus propres dans ce cas à engager encore plus les intestins l'un dans l'autre qu'à les dégager. Peut-être que les lavemens préviendroient cet accident, & que par leur retropression ils repousseroient la partie de l'iléon par l'orifice dilaté de la valvule du colon. Cependant la contraction née de l'irritation que les lave-

mens excitent pourroit auſſi produire un effet contraire, & pouſſer l'inteſtin reſſerré encore plus avant dans le colon. Ainſi la cure de ce mal ne pourroit réuſſir qu'en recourant à cette opération douteuſe, mais qui ne laiſſe pas d'avoir quelques partiſans, au moyen de laquelle, après avoir ouvert l'abdomen, on fait ſortir l'inteſtin reſſerré de celui dans lequel il eſt entré. On peut juger que cette maladie a duré aſſez longtems, avant que de devenir mortelle, par l'extreme dilatation qu'ont éprouvée les inteſtins grêles, ſoit dans leurs tuniques, ſoit dans le volume de leur canal; dilatation que les humeurs ont produite en ſe raſſemblant inſenſiblement dans les vaiſſeaux & dans le canal même. Enfin, la dilatation non moins grande de la véſicule du fiel, & l'abondance de la bile dont elle étoit remplie, nous apprennent auſſi, que, quand les inteſtins ſont trop dilatés, (car, dans le cas dont il s'agit, le duodenum avoit ſouffert une grande expanſion,) le paſſage de la bile par le cholidoque eſt arrêté, parce que la celluleuſe trop épaiſſie comprime ce canal à ſa ſortie.



REPONSE



RÉPONSE
A LA
DISSERTATION
DE
M. LE COMTE RONCALLI,
SUR L'INCULATION DE LA PETITE VE'ROLE (*).

PAR M. LE COMTE DE REDERN,
GRAND MARECHAL DE LA COUR DE S. M. LA FEUE REINE MERE, ET CURATEUR DE L'ACADEMIE.

Vous avez fait l'honneur, Monſieur, à l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Berlin, de luy envoyer une Diſſertation, que vous avez écrite contre l'inoculation de la petite vérole. Vous vous félicitez modeſtement d'avoir renverſé vous ſeul cette Idole, que l'Enfer, ou je ne ſais quel preſtige, avoit placé ſur les Autels d'Eſculape, & à qui le monde entier alloit prêter hommage. *Certe nunc videor mihi jure blandiri poſſe, me de Publico optime meruiſſe, ut pote qui cunctis Italiae proximorumque Regnorum Scholis ſilentibus, Patriam, Principum familias, denique univerſum Terrarum orbem, ab artificiali imminente, moxque graſſatura peſte, unus, modeſte liceat gloriari mihi, liberaverim.*

Vous me diſpenſez de vous traduire; je ne rendrois pas la force & l'énergie d'une belle latinité.

Si l'intérêt de la vérité eſt celui de tous les hommes; s'il doit être cher particulierement aux gens de Lettres, voués à ſon ſervice; ſi l'heureuſe découverte enfin contre laquelle vous déclamez avec tant

(*) Lue dans l'Aſſemblée publique du 31 Mai, 1759.

tant de véhémence, est une de ces vérités, qui mérite l'attention particuliere de tous les hommes qui pensent; vous jugez bien, Monsieur, que votre Dissertation ne pouvoit pas rester sans réponse à Berlin, si même vous aviez pû réussir à imposer silence aux autres Nations de l'Europe.

La Prusse vous fournit, Monsieur, la preuve la plus forte contre l'inoculation de la petite vérole, dont vous couronnez votre savant Mémoire; la seule en effet, si elle etoit vraye, qui mériteroit ce nom, de toutes celles qu'il vous plait d'honorer de ce titre.

Vous faites convoquer au Roi une assemblée générale de tous les Médecins de ses Universités, pour faire une Consultation sur l'inoculation de la petite vérole.

Vous assurez, que les Inoculateurs & les Inoculés, après avoir subi les châtiments les plus rigoureux, ont été bannis du Royaume; & vous apprenez à toute l'Europe, qu'une Loi févere, qui défend pour toujours l'inoculation sous les peines les plus griéves, les étend jusques aux Gardes, aux Parents les plus éloignés, & aux Tuteurs des Enfans, obligés d'en répondre.

Pro hujusque scripti coronide silere non debeo Regem Prussiae, re prius excussa & consulta cum sapientissimis Medicis suarum Universitatum, insitionem variolarum damnasse, atque in exilium misisse non solum, sed poena gravissima multasse insitores, ipsosque insitos, aut pro ipsis, si pueri sint, eorum custodes, agnatos, tutores.

Je ne m'arrête pas à la défense des peuples qui pratiquent l'inoculation, & des hommes célébres, qui ont tâché de faire comprendre, & de démontrer sa nécessité, & sa grande utilité. Vous les citez tous par leurs noms, parce qu'il vous a plû de faire un Mémoire tout en citations; & si vous avez tort, il faut convenir qu'on ne peut pas l'avoir d'une façon plus savante, & plus érudite. Que penseriez-vous, Monsieur, d'un aveugle, qui, après avoir nommé par son nom chaque Païs, chaque Ville, chaque Village, & chaque homme, qui assure

assure que le Soleil luit, s'obstine à le nier, parce que tel est son bon-plaisir.

Vous ne trouvez aucune difficulté à traiter de fables, les Expériences de plusieurs siecles, faites chez les Nations les plus éclairées, par les hommes les plus estimés pour leur savoir, leurs lumieres, & leur intégrité.

Oserois-je vous demander; connoissez vous les Ouvrages que vous citez autrement que par leur nom? Les avez-vous examiné, & pesé? Il me paroit que non. Vous les condamnez par le droit d'une Législation absolue; *dicere ausim, me nunc posse vestimenta Advocati deponere, novaque Legislatoris induere.* Avec la profonde connoissance que vous avez de la Charlatanerie de beaucoup de Médecins, auriez-vous décidé comme la Fable: *A' tort & à travers, on ne sauroit manquer, condamnant les pervers.*

Cependant vous me dispensez par vos citations de vous rappeller tout ce qu'on a fait pour ne pas laisser de doute sur une découverte aussi intéressante pour le genre humain.

Vous vous appuyez sur deux prétendues expériences, que vous nommez, *Experimenta inoculationis*, par lesquelles vous croyez donner le démenti à des expériences sans nombre, faites avec les plus grandes précautions. C'est l'Egide que vous opposez au monstre effroyable, qui alloit engloutir l'espece humaine. Vous savourez, à longs traits, le plaisir d'une victoire si glorieuse, si bien méritée; & dans cette douce yvresse, vous priez Dieu avec un zèle un peu inhumain: *Ut distet hæc inoculationis labes, & pestis a Gallicis, Germanicis & Italicis Regionibus, atque redeat ad Barbaros; quod Deus optimus maximus faciat.* Vous priez Dieu pour la France, l'Allemagne, dont je vous fais mes très humbles remercimens, & l'Italie; l'Angleterre & le reste du Monde barbare est condamné impitoyablement. En vérité ces pauvres Anglois sont à plaindre. Dois-je vous faire le plaisir de vous rappeller, qu'il n'y a pas trente ans, que, dans la même Eglise, où l'Evêque de Worcester prononce aujourdhui un Sermon

pour l'inoculation, on prêcha contre elle, comme contre une pratique introduite par l'Esprit malin dans la personne de Job, qui avoit été, disoit le pieux & savant Orateur, inoculé par le Diable? Quel trait de lumiere vive, & quelle joye pour vous, que le triste sort de ce pauvre Peuple hérétique, auquel il n'a falu qu'une génération, pour tomber dans les ténébres de la plus profonde barbarie!

Mais la Religion, la Raison, permettent-elles une joye si excessive, si immodérée? Quoique je ne doute pas de la force de vôtre tempérament, je tremble pour vous: il me paroit que j'entens cet Alexandre, qui se meurt, en criant; *J'ai gagné la victoire. In Epilogum habe per methodicam divinæ Artis semitam, Vir Celebratissime, Doctissime, Purgantia, Refrigerantia, Nitrata, Opiata, Epispatica, &c.* Et si les causes morales souvent sont aussi efficaces dans la Médecine, que les physiques, je m'estimerois heureux, si je puis vous fournir quelques foibles raisons pour calmer une joye capable de bouleverser la machine la mieux constituée.

Dans votre douce illusion, vous ne faites pas attention, Monsieur, que le premier cas prouve tout contre vous. M. *Marocchi*, soutenu de l'autorité d'un Ecclésiastique éclairé, inocule heureusement un garçon de trois ans, neveu de ce sage Ecclésiastique, & le sauve; la petite vérole naturelle avoit emporté ses six freres; mais des femmes imbécilles crioient contre lui. Vous sied-t-il, Monsieur, d'être le Héraut de crialleries aussi impertinentes? Le second cas, c'est une jeune fille, à laquelle vous-même avez laissé prendre la petite vérole naturellement, & qui meurt. Vous devriez gémir de ne l'avoir pas inoculée, & ne pas confondre, je dirois malicieusement, si je vous en croyois capable, l'épidémie naturelle, ou la communication de la petite vérole, avec l'inoculation. Voilà ce qu'il vous plait d'appeller, *experimenta inoculationis*, pour démentir les hommes célébres, auxquels vous prodiguez les épithètes les plus indécentes. Est-ce sérieusement? Faites-vous attention, Monsieur, que vous insultez à des Citoyens éclairés & respectables, qui, en publiant leurs observations, & receuillant les tentatives,

ves, & les expériences, qu'ont faites les différents Peuples de l'Europe, pour perfectionner, & assûrer l'inoculation, transmettent à la posterité les progrès qu'ont fait chez ces Nations la Vérité, l'Esprit humain, & les Sciences.

Vous traitez avec quelque égard, parce que vous la croyez capable de chanter la palinodie, la Sorbonne, dont le jugement sur cette matière ne mérite aucune attention. Peut-être me taxerez-vous de prévention hérétique, ou nationale. Mais en Prusse, on consulte chacun sur ce qu'il est censé savoir; le Théologien sur la Controverse, & le Philosophe sur les mystères de la Nature.

Les annales des connoissances humaines transmettront à la postérité, comme des hommes auxquels le genre humain est redevable de la découverte la plus utile, comme les témoins & les Apôtres d'une des vérités les plus importantes, les *Tarris*, les *Castros*, les *Harris*, les *Pilarinos*, les *Taylors*, les *Meads*, les *Arbuthnotts*, les *Jurins*, les *Kirkpatricks*, les *Ranbys*, les *Tronchins*, & l'Evêque de Worcester, que vous traitez de faiseurs de contes & de visionnaires. Vous faites semblant d'avoir un peu plus de ménagement pour M. *de la Condamine*, quoiqu'il soit digne de votre colère autant, & plus que les autres. Vous faites ses excuses. Vous lui insinuez, comme à la Sorbonne, avec le ton d'un apprentif Législateur, de changer de sentiment, & vous le plaignez d'avoir donné si aveuglément dans le panneau; ce qu'il n'auroit pas fait, assûrez-vous, si plus éclairé, *Medicinam ad aliquot annos factitasset, minusque tot fabellis lectis & relatis credidisset;* & vous tâchez de l'émouvoir par une priere vraiement édifiante: *Faxint Superi ut, novis hisce rationum momentis illuminatus, errorem ipse damnet.*

Je ne prie pas pour vous, Monsieur, parce que Dieu n'accorde les connoissances naturelles qu'à l'étude; mais, avec le zéle que vous protestez avoir pour la vérité, je vous prie d'examiner sans prévention les Ouvrages que vous blamez, & particulièrement le Mémoire de cet homme célèbre.

Le ſujet eſt trop grave, & trop intéreſſant. Vous convenez vous-même, que la petite vérole eſt un des fléaux les plus funeſtes qui affligent le genre humain; j'en appelle au tableau qu'en fait votre ſavante Diſſertation: *Quæ ore, & calamo, loquitur de peſtilenti afflatu, de atrabile, de nigris interſtitis peticulis, de vermibus, de lethali putredine, corruptione, & veneno adeo penetrante, ut canibus ipſis adſtantibus non parcat.*

Vous ſavez, Monſieur, que, malgré ce tréſor de ſecrets, & de remedes admirables, que vous ouvrez généreuſement: 1. *Epiſpatica.* 2. *Sudorifera.* 3. *Vapores.* 4. *Fomentationes.* 5. *Hirudines.* 6. *Suffumigia.* 7. *Balnea.* 8. *Pannum.* 9. *Spongia.* 10. *Sectio.* 11. *Paregorica.* 12. *Opiata.* 13. *Suppoſitoria.* 14. *Cliſteres.* 15. *Potationes aquarum.* 16. *Veſicantia.* 17. *Ptyaliſmus.* 18. *Theriacalia.* 19. *Sanguinis miſſio.* 20. *Emetica.* 21. *Purgantia.* 22. *Peſſa in mulieribus.* 23. *Inciſio.* 24. *Camphorata.* 25. *Anthelmintica.* 26. *Viperina.* 27. *Pyrites.* 28. *Nitrata.* 29. *Spongia*: Vous ſavez, dis-je, que, malgré cette abondance effrayante de remedes, cette horrible maladie emporte une grande partie de l'eſpèce humaine, & laiſſe ſouvent un ſouvenir affligeant, & des infirmités, pour le reſte de la vie, à ceux qui en réchapent. Elle a enlevé à Berlin cette année les trois quarts & au delà des enfans qui l'ont eue.

De tous les remedes que le Médecine avoit employés jusqu'à préſent, aucun n'étoit parvenu à délivrer la maſſe du ſang de ce venin, qui paroit ne pouvoir en être ſéparé que par la ſuppuration, en déchirant les vaiſſeaux dans leſquels il eſt dépoſé, & la peau; ſoit que nous apportions ce poiſon avec nous au Monde, ou qu'il nous vienne de dehors. Cette idée, conforme à l'expérience conſtante, paroitroit établir une analogie entre la maladie & l'inoculation; & mes propres réflexions, les meilleurs Médecins, & les meilleurs Livres de Médecine que j'ai conſultés, ne m'ont rien appris de plus. Peut-être prétendez-vous en avoir appris davantage à notre Europe, & aux Barbares, dans la belle explication que vous en donnez dans votre ſavante,

te Dissertation : Que la petite vérole est une fermentation du Sang, qui avant l'éruption, est *acerbus, immaturus, non despumatus, quique habet in se aliquid vitiosum, lentum, crudum, acidum, austerum.* Cela est peut-être fort clair & fort beau ; mais permettez-moi de me borner aux seules lumières que fournit l'observation.

Vous savez, Monsieur, que ce n'est qu'au flambeau de l'expérience que l'Europe est redevable d'être sortie de cette barbarie, dans laquelle le jargon épouvantable de l'Ecole l'a tenoit ensévelie ; on l'a porté dans la Medecine, comme dans les autres Sciences : & heureusement il répand la plus grande clarté sur le sujet dont il s'agit ici.

Tous les Médecins qui parlent avec connoissance de cause, conviennent, que l'inoculation de la petite vérole est une des découvertes les plus heureuses de la Médecine, & que si les remèdes & les méthodes qu'on employe dans les autres maladies, avoient le même degré de certitude, la vie, & la santé si nécessaire pour supporter les misères de cette vie, seroient plus assurées qu'elles ne le sont.

Ils conviennent unanimement que l'inoculation bien dirigée, & donnée à propos, prévient tous les incidens fâcheux, & la complication du pourpre, & d'autres maladies qui se joignent à la petite vérole naturelle ; que selon toutes les apparences le venin, porté d'abord dans le sang, dans les plus gros vaisseaux, & à la peau même, perd de son activité, n'attaque pas tout le système de la machine, & trouve un écoulement facile par la suppuration des incisions ; que de l'Inoculation bien faite sur mille, il n'en meurt pas un, ou pour parler juste, que la petite vérole cesse d'être mortelle ; qu'on ne la reprend jamais après avoir été inoculé ; & que ceux qui ne doivent pas l'avoir naturellement, ne l'ont pas par inoculation.

Le Moraliste, ou si vous voulez, le Théologien éclairé, surpris de se voir mêlé dans une question de physique, qui n'est absolument pas de son ressort, mais d'accord avec le Philosophe, & le Médecin, convient que c'est manquer à ce qu'on doit à Dieu, & aux hommes,

K 3 & com-

& commettre le crime le plus barbare, que de priver l'espece humaine d'un des plus grands bienfaits de la Providence.

Voici, Monsieur, ce que disent les Médecins, & les Philosophes les plus éclairés; n'étant pas Médecin moi-même, & fort éloigné de m'ériger en cette qualité, & de porter aucun jugement comme tel, je n'entre pas dans la discussion des profonds raisonnemens, avec lesquels vous combattez *a priori* l'inoculation.

Pyrum non maturescit,
Febris non surgit,
Mulier non parit,
Vinum non evadit,
Nisi statuto maturationis tempore;
Lignum non est aridum ut hinc admota scintilla incendium suscitetur.

Je ne puis flêchir non plus les genoux devant les autorités, & les décisions que vous citez comme infaillibles. Je blâme beaucoup les fameux Professeurs qui n'ont pas daigné vous répondre, par circonspection, ou par politique, à ce que vous prétendez. Ce sont de vrais impertinents, tout célèbres qu'ils puissent être. Mais je vous demande très humblement pardon, si je recuse l'autorité de Mr. *Christophorus Zanetti* même: *Quamvis vivat egregius iste Vir, Patriæ vestræ decus, & ornamentum, flexis genibus ad Summi Sanctissimi Pontificis Clementis XIII. feliciter regnantis latera, frequens alloquatur Cardinales Eminentissimos, Sacratissimos, veras Romanæ Ecclesiæ Columnas, & agat cum Episcopis, Præsulibus, Theologis Canonicis, Doctoribus; ideoque pro Oraculo accipienda sit ejus sententia:* je le recuse, & je pourrois le citer contre vous à plus juste titre, par les raisons qu'il vous dit lui-même.

1) Per

1) *Per parlar là con tutta sinecrita, le dico di non averla io maè praticata.*

2) *Poiche gli Theologi non l'amettano.*

3) *E dalla Universita della Francia si attende la decisione.*

On n'impose pas à la Vérité par de vains noms; devant son Trône tous les hommes sont égaux; s'ils différent ce n'est que par leurs talens, leurs lumieres, & l'usage qu'ils en font. Apprennez de *Montaigne*, Monsieur, si vous en doutez: „Que sur le Trône le plus „élevé on est assis comme sur la chaise la plus simple."

Je n'ay pas pu, Monsieur, pour vous suivre, me dispenser de dire un mot de la question théologique; mais, n'étant pas Théologien non plus que vous, il ne nous convient pas de nous perdre dans la controverse.

Rebelle à la Sorbonne, vous oubliez, ou vous faites semblant de ne pas savoir, que les Ordres Religieux les plus éclairés de votre Eglise ont transporté l'inoculation avec le plus grand succès en Amérique. Vous devriez recevoir le point théologique pour très décidé. De grace, Monsieur, faites attention aux suites. Voulez-vous commettre l'Eglise avec l'Eglise? Rome avec la liberté Gallicane? Causer des Schismes, ou réduire la chose à la décision d'un Concile Oecuménique? Mais je me flatte que Mr. *Christophorus Zanetti* vous apprendra bientôt; *che gli Théologi l'amettano.*

Si quelqu'un s'avisoit de me demander, pourquoi d'une question physique, dont la raison, l'observation, & l'expérience, doivent constater la vérité, ou la fausseté, nous faisons un point de Théologie, je mourrois de honte; j'avouerois sincérement que nous le faisons parce que d'autres l'ont fait, que ce n'est qu'une façon de parler, un mot vuide de sens; & je le prierois humblament de ne pas nous ranger parmi les Astrologues Persans, ou d'autres Imposteurs & Charlatans de l'Orient. Pour enchainer les peuples, tous les Ordres de l'Etat, le Des-

le Despote, & l'Esclave, sous le joug de l'ignorance & de la superstition, & leur ôter tous les moyens d'en rompre les chaines, ces Messieurs se sont rendu maîtres de la politique, & de la Médecine. Le Roi de Perse, ou son Esclave, sont malades; le Médecin ordonne le remede; l'Astrologue défend de le donner, le jour n'est pas heureux: le malade meurt; c'étoit l'ordre des Astres. L'Ennemi entre dans le païs; le Provinces pillées, ravagées, crient, demandent du secours; les troupes attendent l'ordre pour marcher; l'Astrologue annonce que le Mois est malheureux; le Divan répond gravement aux peuples désolés: C'est l'ordre des Astres que vous soyez massacrés & pillés. Et comment douter de la sainteté & de l'infaillibilité de la mission céleste de l'Astrologue? L'événement incertain, dit le Persan, cache les fautes du Politique; la terre couvre celles du Médecin; les Astres mêmes éclairent celles de l'Astrologue. Je proteste pour vous, Monsieur, & pour moi, que nous sommes fort éloignés d'aussi ridicules impostures, que nous les avons en exécration. Graces au Ciel! la Tyrannie, & la Charlataneríe, ne jouissent pas de si beaux privileges en Europe qu'en Perse; la raison & l'humanité osent parler, & reclamer leurs droits. Supposons un moment, Monsieur, que l'inoculation soit bonne; car, si elle ne l'est pas, le Médecin ne doit pas attendre la décision du Théologien: seroit il moins indécent, ridicule, absurde, & extravagant, de demander au Théologien; si Dieu permet de tailler de la pierre, de donner une poudre d'yeux d'écrevisses, une purgation, un lavement, ou l'émétique, que de le consulter sur la pratique de l'inoculation? Vous avez en horreur comme des Hérétiques, l'Evêque de Worcester, & Mr. *Chais*, Pasteur de l'Eglise Françoise à la Haye, qui ont traité à fond le point théologique ou de Morale; mais j'ose vous prédire qu'il est impossible, si vous parvenez même à assembler un Concile pour décider de l'inoculation, que sa décision ne soit conforme à leur sentiment; il est fondé sur l'idée de l'Etre supreme souverainement bon, qui fait la base de toutes les Religions, sur la saine raison, sur le bien de l'humanité, & ne tient à aucun dogme particulier.

En

En attendant que vous ayez pris votre parti ſur le point théologique, je vous prie, Monſieur, une ſeconde fois, d'examiner le point phyſique, de lire les Ouvrages que vous avez condamnés ſans les lire, & particulierement le Mémoire de M. *de la Condamine*. Cet homme illuſtre mérite votre eſtime, & votre admiration, ſans aucun mêlange de pitié & de compaſſion.

Conſultez l'expérience vous-même; le titre de Praticien, ou de Médecin qui ne conſulte que l'expérience, dont vous vous décorez, vous y oblige. N'eſt-ce pas la choſe la plus ſurprenante, que, depuis un tems infini que vous vous déchainez contre cette peſte d'inoculation, il ne vous ſoit pas venu dans l'eſprit de faire une ſeule expérience, d'inoculer vous-même, ou de faire inoculer ſous vos yeux? Vous les fermez à la Vérité, qui n'a jamais brillé avec plus de ſplendeur, & d'une lumière plus vive & plus pure, que ſur le point que vous conteſtez. A' la voix de tant de peuples, & de tant d'hommes célèbres, vous criez comme un perdu: *Sunt hirundines quæ non faciunt ver;* & vous déclarez obſtinément de vouloir attendre, que les Académies de Padoue, de Florence, & de Bologne, aient donné leur approbation à l'inoculation, avant de vous rendre. Vous faut-il des exemples pour vaincre, oſerois-je le dire, un amour propre mal entendu, qui ſe révolte, & s'obſtine contre tout ce qui n'eſt pas conforme à ſes idées? Le célébre Chevalier *Sloane* fut d'abord contre l'inoculation; il en devint le promoteur le plus zélé. Le retour à la raiſon caractériſe l'homme de génie, & prouve la ſupériorité de ſes lumières & de ſes connoiſſances. L'exemple outre cela du Chevalier *Sloane* vaut l'autorité de bien des Univerſités.

Permettez-moi maintenant, Monſieur, de vous répondre en qualité de Pruſſien; le témoignage du Roi, rendu après un examen ſcrupuleux, que vous citez, ſeroit ſans doute d'un grand poids; mais faites-moi la grace de me dire, par quelle voie vous avez appris, que ce Roi ſi éclairé a défendu l'inoculation de la petite vérole à ſes ſujets. Je puis vous aſſurer, que ſi les affaires importantes qui l'occupent, une

guerre à soutenir contre toute l'Europe, avoient permis de porter cette découverte si utile au Thrône, il auroit déjà paru une Loi qui auroit obligé les Prussiens de faire inoculer les enfans à l'age convenable. Je regarde cette Loi, & je me flatte de n'être pas le seul de ma Nation, comme une des plus salutaires, & nécessaires pour vaincre & surmonter la paresse naturelle de l'homme, & l'incertitude du grand nombre, qui, manquant de lumières, s'imagine, que c'est se rendre responsable de la vie d'un enfant, & tenter la Providence, que de lui donner une maladie, qu'on doit attendre qu'elle vienne naturellement, & qu'on peut ne pas avoir. Cette Loi sauveroit la vie à des millions d'hommes, qui seront sacrifiés avant que l'exemple, & l'habitude, qui conduisent la multitude, ayent gagné, & fait taire les préjugés, qui malheureusement tiennent l'homme attaché au joug de l'erreur & de l'ignorance. L'Inoculation n'est plus un probleme à résoudre; c'est une Loi salutaire que le Législateur doit imposer au Citoyen qui n'est pas assez instruit & éclairé, pour suivre la raison, & pour pratiquer le bien.

Je ne vous ai pas parlé de ma propre expérience, quand je vous ai cité celle de plusieurs siècles, & des Nations entières; elle n'ajoûtoit rien à la force de la Vérité: la vuë d'une goutte d'eau ne prouveroit pas davantage l'existence de l'Océan à celui qui l'auroit vû lui-même. Mais, quand vous citez la Prusse, il me paroit nécessaire de vous désabuser sur ce qu'on y pense, & sur ce qu'on y a déjà fait. J'ai cru que c'étoit un devoir indispensable pour moi, de me mettre au dessus des préjugés, comme père de famille, & d'essayer en même tems, si mon exemple pouvoit contribuer à éclairer ma patrie sur un point si intéressant pour elle. Elle en a fait la plus triste éxpérience; cette année, je l'ai déjà dit, la petite vérole a emporté les trois-quarts des enfans que l'ont eue. J'avois contre moi une Reine éclairée, dont les sentimens étoient pour moi des arrêts; ma famille, & des personnes d'ailleurs très respectables qui regardoient la chose comme douteuse. Vous savez, Monsieur, qu'il y a des situations dans la vie, où les gens les plus indifférents s'intéressent pour nous, & nous honorent de leurs

avis

avis. On me citoit de prétendues expériences, *experimenta inoculationis;* ou plutôt, ces contes qu'on imagine & débite pour démentir les vraies expériences que j'alléguois. On me répréſentoit qu'en perdant mes enfans par la petite vérole naturelle, c'étoit la volonté de Dieu, à laquelle il faloit ſe réſigner; & on tâchoit de m'effrayer par les reproches dont on m'accableroit, & que j'aurois à me faire, ſi l'événement étoit contraire. La perſuaſion de la vérité l'emporta ſur toutes les autres conſidérations.

Mr. le Profeſſeur *Meckel*, dont les talens diſtingués, & la capacité, vous ſont connus, a fait l'inoculation à deux enfans que j'ai; l'ainé de 7 ans n'a eu que peu de fièvre pendant deux jours; dans le ſecond de 3 ans, on n'a pas remarqué de fièvre; ils ont eu tous les deux peu de boutons, avec une abondante ſuppuration des inciſions. Quoique je n'aye arraché au grand nombre d'abord que l'aveu d'avoir été heureux, l'exemple n'a pas été ſans effet ſur ceux qui, capables de penſer, aiment le vrai, & ſe plaiſent dans le bien.

Mr. le Profeſſeur *Meckel* a inoculé heureuſement depuis, quoique beaucoup moins qu'il ne ſeroit à ſouhaiter: les progrès de la vérité ſont lents; mais la route eſt frayée, & on propoſe d'ordonner l'inoculation dans les différentes Maiſons des Orphelins qui ſont à Berlin. Vous voyez, Monſieur, que vous êtes très mal informé de ce qui ſe paſſe ici: je ne doute pas que l'amour de la Vérité, l'état d'homme de Lettres dont vous faites profeſſion, ne vous porte à révoquer ce que vous dites ſur le ſujet du Roi; des expériences faites dans ſes Univerſités, par les plus habiles Medecins, ſur l'inoculation de la petite vérole; & des Loix expreſſes & pénales par leſquelles elle a été défendue. Vous y êtes obligé, comme Membre de notre Académie; il ne ſuffit pas que vous ſoyez déſabuſé. Il eſt de vôtre devoir de détromper ceux, qui, par cette raiſon, vous ſuppoſant bien inſtruit, ont été induits par vous, ou pourroient l'être, dans une erreur, ou affermis dans une prévention dangereuſe. Vous êtes obligé en même tems de déſabuſer les Nations éclairées de l'Europe, ſur un point qui fonderoit un

L 2 pré-

préjugé désavantageux contre ma patrie. Je me flatte que vous déposerez cet hommage, que vous prêtez à la Vérité, dans la Bibliothéque Royale de Paris, dédié ingénieusement à toutes les Puissances de l'Europe, orné magnifiquement de leurs Armes, & duëment brodé en or & en argent, pour servir d'antidote à cet Ouvrage très précieux, que vous prétendez y avoir déposé, & donné à nôtre Europe, il y a déjà six ans, contre l'inoculation, par rapport à la Médecine des Grecs, des Hongrois, & des Prussiens. Votre zèle vous y aura fait avancer, un peu trop legèrement sans doute, quelques petites choses; puisque cela vous est arrivé dans vôtre derniere savante Dissertation, après y avoir pensé pendant six ans. Pour ce qui regarde le fond de la question même, le sujet est trop important pour ne pas mériter toute votre attention. Vous devez une réparation formelle à la Vérité, & aux hommes illustres auxquels vous insultez. Vous la devez à votre patrie. Elle voudroit pouvoir oublier le célebre *Galilée*, emprisonné & forcé de se rétracter. Les hommes se passionnent; on pourroit lui reprocher de s'opposer aux progrès de la Vérité, & de la vraye Philosophie. Il importe peu que le vrai Systême de notre Monde Planetaire y soit proscrit, & condamné; les Corps célestes n'en suivent pas moins les loix que la Nature leur a imposées. Il s'agit ici d'une vérité à laquelle la Société, & une partie du genre humain, devront leur conservation.

J'ai été tenté quelquefois de regarder votre savante Dissertation, pleine de vues couvertes, que mes foibles lumières ne démêlent que confusément, comme l'apologie la plus forte de l'inoculation, & comme la satyre la plus ingénieuse, & la plus fine, contre les détracteurs de cette belle découverte; à moins qu'emporté par une noble ambition, vous ne suiviez l'exemple d'Erostrate, qui, frappé de la beauté du Temple d'Ephese, le brûla, pour se faire un nom.

La politique la plus adroite, & la plus profonde, avec laquelle vous ménagez la Sorbonne, la France, l'Allemagne, l'Italie, & toutes les Puissances temporelles & spirituelles, pour leur faire recevoir la

Loi

Loi en vertu de la Robe Législatrice dont vous vous êtes décoré, y régne d'un bout à l'autre; pendant que vous ne paroissez citer le grand *Hecquet* que pour couvrir de ridicule les objections puériles, qu'on fait contre l'inoculation. Vous la lui faites anathématiser, parce que

1) *Elle est contraire aux vuës du Créateur.* Est-ce par inspiration que ce grand homme l'a appris? La raison, & l'expérience, prouvent que c'est un des plus grands bienfaits de la Providence.

2) *Elle ne préserve pas de la petite vérole naturelle.* Le contraire est démontré par des milliers d'expériences.

3) *Elle ne ressemble à rien en Medecine, mais bien plutôt à la Magie.* C'est le comble du ridicule: les Ventouses, les Mouches Cantharides, ressemblent-elles plus aux Lavemens, & aux Purgations, que l'Inoculation?

4) *Elle est contraire aux Loix.* C'est apparemment de la Loi Prussienne qu'il veut parler. Vous savez, Monsieur, que c'est un conte ridicule.

Vous me paroissez rire malicieusement, comme Démocrite, du genre humain auquel vous donnez le change bien cruellement. Si cela est, en conscience, Monsieur, vous auriez du ménager un peu plus la foiblesse humaine, au lieu de la ménager si habilement pour établir votre réputation, non seulement dans toute notre Europe, mais encore chez les Barbares. Avec ce tour adroit & ingénieux que vous donnez à vôtre Lettre, vous auriez pu citer, à plus juste titre, Machiavel, & Lucien, dont vous exercez les talens avec tant de succès, que cette kirielle de vos Confreres, Docteurs en Médecine, depuis Galien jusqu'à Mr. *Hecquet*, que vous ne citez que par pure complaisance, ou par malice, parce qu'ils n'ont jamais sçu un mot de l'inoculation; mais, connoissant le cœur humain, vous aimiez apparemment mieux cacher & couvrir de la plus rare modestie des talens trop supérieurs, & trop étrangers à votre Art, qui, au lieu de per-

ſuader, n'auroient fait que révolter la Faculté, & les Barbares que vous voulez policer. Emu, peut-être, & touché de la fureur avec laquelle les peuples de l'Europe s'acharnent à s'entr'égorger ſi cruellement; votre compaſſion éclairée, ſupérieure à nos foibles vuës, qui ſe bornent à la conſervation de l'eſpece humaine pour ce bas monde, voudroit-elle traiter les hommes, comme Junon traita Cléobis & Biton, dont elle récompenſa la piété, & la tendreſſe envers leur Mère, par une mort ſubite, & tranquille, pour les dérober aux afflictions de la vie humaine? Regardez-vous ceux que la petite vérole enleve comme autant de ſauvés?

Helas! vous n'avez peut-être pas tort: mais, avec ces talens ſublimes pour la Politique, avec ce crédit immenſe que vous avez dans toutes les Cours de l'Europe, ſoyez le médiateur, le pacificateur de ces haines cruelles; & permettez l'inoculation. Tous les âges vous béniront, & vous regarderont comme leur bienfaiteur. Mais j'ai tort de vouloir oſer ſuivre une imagination féconde, ardente, & forte comme la vôtre. Quel que ſoit votre but, & le vrai ſens de votre belle Diſſertation, la franchiſe de ma Nation, ennemie de toute fineſſe, m'a ramené à la lettre, & à prendre ſérieuſement, ce qui n'eſt peut-être qu'une pure plaiſanterie.

Je ne vous parle pas de nos Médecins, parce que je ne veux pas appéſantir ſur vous le poids de l'autorité, & de l'évidence. Vous vous débattez, comme le pauvre Encelade, accablé de la colère de Jupiter, ſous la maſſe énorme du Mont Etna. La Pruſſe a toujours eu, & a actuellement, des Médecins du premier ordre. Les noms de *Stahl*, de *Gundelsheim*, de *Hoffmann*, de *Lieberkhün*, gravés à côté de celui d'*Hippocrate* dans le Temple de Mémoire, ſont connus & eſtimés dans toute l'Europe. Cependant il vous plait de les renvoier aux Hongrois, Turcs, & Barbares. Vous conviendrez, Monſieur, que les *Eller*, les *Cothenius*, les *Meckel*, & d'autres Médecins d'un mérite diſtingué, qui ont ſuccédé à ces hommes célebres, n'ont pas tort d'en être un peu formaliſés; & vous leur devez une petite explication.

Pour

Pour moi, je crois que c'eſt de la Proſe toute pure, comme celle du *Gentilhomme Bourgeois*, qui la parloit ſans le ſavoir; une façon de parler, comme l'épithete de Barbares, que vous donnez au reſte du genre humain au delà des Mers, & des Alpes, qui environnent ce païs, qu'habitoit, il y a vint ſiècles, un peuple vertueux, qui ſoumettoit & éclairoit le Monde par ſes Scipions, ſes Catons, ſes Céſars, ſes Cicerons, ſes Virgiles, & ſes Marcs Aureles. Mais cela ne regarde, ni moi, ni mon ſujet; je me contente d'inſérer ici une particularité de M. le Conſeiller Privé *Eller*, qu'il m'a appriſe, quand j'ai fait la lecture de cette Lettre à l'Académie. Je ſavois qu'il étoit porté pour l'inoculation; & j'aurois pû vous le citer avec le Chevalier *Sloane:* le même zèle pour le bien, les mêmes talens, & la même étendue de connoiſſances, le caractériſent. Il eſt *Archiater*, mot que vous paroiſſez avoir en grande vénération; & il a vû & traité autant de Rois, Reines, Princes & Princeſſes, que Mr. *Chriſtophorus Zanetti* de Papes, Cardinaux, Evêques & Théologiens. Ayant rencontré en 1719. à Paris un jeune Médecin, Grec de Nation, nommé *Carazza*, avec lequel il avoit fait connoiſſance à l'Univerſité de Leyde, qui lui parla de l'inoculation de la petite vérole, pratiquée à Conſtantinople par une femme Theſſalienne, il ne réſiſta pas à la curioſité d'en faire l'expérience ſur un pauvre enfant qu'il paya: & elle réuſſit fort bien. L'année 1721. il inocula à Bernburg, pour ſatisfaire la curioſité du Prince, la fille de M. de Beck, Maréchal de la Cour, âgée de ſept ans, & un garçon de cinq ans, fils du Sommelier de la Cour, avec le même ſuccès. Il fut appellé peu après à Berlin; & la cabale étant parvenuë à faire tomber dans une eſpece d'oubli cette belle découverte, par des menſonges, & des mauvais ſuccès inventés, il y renonça: mais il n'a pas ceſſé d'en être toujours le promoteur le plus zélé. Mr. *Ludolff*, Médecin des Armées du Roi, de beaucoup de réputation, animé par lui, a fait, peu avant la guerre, des expériences ſur l'inoculation dans le grand Hôpital de Berlin, qui ont eu beaucoup de ſuccès. Croyez-vous, Monſieur, qu'il y a eu des gens aſſez imbécilles ou méchans pour ſoutenir, que ces enfans inoculés n'avoient que la gale, parce qu'ils n'avoient pas été

couverts de boutons depuis les pieds jusqu'à la tête? Le beau Recueil que celui des objections ridicules, des abſurdités, des menſonges, & des impoſtures, que l'attachement à l'erreur & aux préjugés, la vanité & la jalouſie, ont oppoſés à la découverte la plus belle, la plus utile au genre humain! Quel jugement la poſtérité portera-t-elle ſur le caractère & les lumiéres de notre Siècle!

Je ſuis perſuadé de votre candeur, de vos bonnes intentions, & de votre zèle pour le bien. Ce ſont ces mêmes ſentimens, l'amour de la Vérité, l'envie de la faire connoitre, d'être utile à ma patrie, & aux hommes, qui m'ont déterminé à vous répondre; & je me flatte que vous recevrez ma réponſe, comme une marque de la conſidération, & de l'eſtime avec laquelle j'ai l'honneur d'être, &c.



REMAR-

REMARQUES ABRÉGÉES

SUR QUELQUES TRACES DE CONFORMITÉ ENTRE LES CORPS DU RÉGNE VÉGÉTAL ET CEUX DU RÉGNE ANIMAL.

PAR M. GLÉDITSCH.

Traduit de l'Allemand.

Tous les corps du régne végétal ſont naturellement aſſujettis à une loi invariable, ſuivant laquelle, dans un tems déterminé, & lorsqu'ils ont atteint une certaine maturité, ils portent d'abord des fleurs, & enſuite des ſemences fécondes, par lesquelles ils conſervent & propagent leurs eſpeces naturelles ſans interruption. Que les choſes ſe paſſent effectivement ainſi, & même que le but principal de leur deſtination le demande, c'eſt ce que la Raiſon & l'Expérience dépoſent de concert. Suivant cela, il ne doit exiſter aucune production végétale qui ne ſoit pas ſoumiſe à cet ordre; quoique, dans les ſiecles précédens, divers Phyſiciens ayent conçu les choſes d'une maniere toute oppoſée, mais ſans la moindre ombre de fondement.

Toute plante eſt pourvue d'un oeil, ou bouton à fruit, c'eſt à dire, d'une partie dans laquelle ſont actuellement contenus les linéamens, mais d'une délicateſſe imperceptible, de toutes les parties qui conſtituent les fleurs & les fruits; & cet oeil, ou bouton, ſuivant la différence de l'eſpece, ſe trouve, tantôt dans un oignon, ou cayeu, tantôt dans un rejetton, quelquefois dans la tige, quelquefois ſur les branches, ou presque dans toute autre partie de la Plante. Mais il ne ſe manifeſte jamais qu'après la formation de cette partie principale de

la plante où il se trouve; c'est proprement par sa production & par son dévelopement que se termine alors l'accroissement successif de la plante, laquelle sans cela auroit naturellement continué à croître annuellement, jusqu'au tems où elle auroit enfin poussé des fleurs, & porté des semences.

Quand l'accroissement de cette derniere & unique partie des plantes vient à cesser, ou les semences existent déjà, ou, ce qui revient au même, il s'est formé dans d'autres lieux & dans d'autres parties de nouveaux yeux. Ici comme on le sçait, les animaux s'écartent des végétaux, puisque, à très peu d'exceptions près, ils suivent la route constante de la multiplication & de la propagation par les oeufs.

Le fruit en attendant est toujours une suite de la fleur, celle-ci n'existant que pour la génération & la fructification de celui-là; de façon que chaque plante propage & conserve son espece, suivant l'ordre de la Nature, au moyen de ses parties essentielles, c'est à dire, des semences rendues fécondes. En conséquence de cet arrangement prescrit par la Nature, toutes les plantes peuvent & doivent propager leurs especes incontestablement & invariablement, jusqu'à ce que ce le moyen de le faire vienne à cesser entierement en elles. Dans un très grand nombre de plantes la propagation naturelle se fait comme dans les animaux, simplement & uniquement par leurs semences, ou oeufs, sans qu'aucune autre voye se joigne à celle-là. Mais il y a aussi quantité de plantes, qui ont le pouvoir de se multiplier de plus d'une maniere, outre les semences, & avec un succès égal par des voyes différentes. Cette diversité par laquelle les plantes ont quelquefois des moyens plus ou moins nombreux de multiplication, n'empêche pas qu'il n'en reste beaucoup plus d'especes à qui la Nature n'a accordé qu'un seul moyen, savoir celui des semences, à moins que quelque cas tout à fait extraordinaire ne donne lieu à une variation.

Une chose qui est aussi suffisamment connue, c'est que plusieurs plantes, qui sans cela tirent leur origine des semences, multiplient aussi leurs especes avec un égal succès par les racines, les cayeux, les oignons,

oignons, les tiges, les branches, les rejettons, ſoit du tronc, ſoit de la racine, les feuïlles même & l'écorce. Mais toutes ces multiplications dérivent du même principe, & par là même ne différent point de celle qui vient des ſemences, à quelque partie de la plante que l'opération ſoit d'ailleurs attachée. Car, pour qu'une ſemblable partie devienne un principe de multiplication, il faut, ou qu'un oeil parfait s'y ſoit déjà trouvé contenu, ou qu'il y ait dans ſa moëlle dequoi effectuer la génération & l'entiere formation qui doit s'enſuivre d'une jeune plante qui y eſt cachée. Quand même on rencontreroit à cet égard quelques exceptions, réelles ou apparentes, elles ne ſauroient être d'une grande importance; & ſi elles ont lieu dans des eſpeces, ou claſſes particulieres, dont la conſtitution naturelle n'a pas été ſuffiſamment obſervée, on n'eſt pas en droit d'en tirer aucune conſéquence certaine.

Ainſi, cette différence entre les Plantes, qui reſtraint les unes à une ſeule voye de multiplication, & en accorde à d'autres de plus nombreuſes, & qui à nos yeux pourroient avoir un air de ſuperfluité, eſt tellement réglée qu'il n'y a pas une ſeule de toutes ces eſpeces de multiplication, dans quelque quantité plus ou moins grande qu'elles ſe trouvent réunies, qui faſſe diſparoitre la propagation primordiale & générale des plantes par les ſemenees, qui demeure toujours la plus certaine & la plus conſtante.

Cependant, la ſorte de propagation qu'on obſerve, tantôt dans une plante individuelle, tantôt dans une eſpece entiere, peut bien être regardée comme la plus certaine dans un cas donné, & la plus avantageuſe rélativement à nos vuës; mais alors, le principe d'où l'on part tient toujours à des choſes purement contingentes & à des circonſtances particulieres, qui ſont hors de la plante même. Mais, tant qu'il ne s'agit que d'arriver au but principal, toutes les eſpeces de propagation ſont à peu près équivalentes.

Dans quelque plantes qui ſe propagent par la multitude de leurs rameaux, ou des rejettons, qui en ſortent en ſi grande abondance qu'ils ſemblent les affoiblir, cela peut les conduire à un état qui eſt

tout à fait contraire à la Nature. Il en est de même de celles qui produisent, outre leurs fleurs & leurs fruits, de petits oignons, ou même de jeunes plantes. Il arrive ainsi aisément que les fleurs ne se développent pas toujours d'une maniere convenable, & n'engendrent pas des semences parfaites & fécondes. Dans d'autres tems, c'est précisément le contraire qu'on observe dans toutes ces mêmes plantes.

Mais, quiconque est bien accoutumé & exercé à examiner attentivement de semblables cas, & à en juger sainement, apperçoit bientôt où réside la cause de ces variations accidentelles. En effet, parmi les plantes, il s'en trouve dont l'efflorescence arrive trop tôt, ou trop tard, ou même deux fois dans une année; & à cela se joignent encore diverses irrégularités, lesquelles dépendent des saisons, de la nourriture que les plantes reçoivent, & de leur situation. Mais de pareilles circonstances varient très fréquemment par rapport à la même espece de plante, disparoissant & reparoissant alternativement, sans compter toutes les modifications que l'art peut encore y apporter. En supposant donc que certaines circonstances non-naturelles, mais d'ailleurs accoûtumées, & qui auroient produit des variations & des altérations, ne se rencontrent pas, l'état naturel se manifeste, pour ainsi dire, de lui-même, à moins qu'un desordre total dans la structure de la plante n'y mette quelque obstacle invincible.

Quand donc, par les raisons qui viennent d'être alléguées, les plantes ne portent, ni fleurs, ni semences fécondes, le pouvoir naturel qu'elles ont d'en produire, ne laisse pas de subsister, d'être toujours le même en elles, & de tendre à l'accomplissement du but capital, savoir la propagation & la conservation de l'espece, quoique l'effet demeure suspendu pendant un certain espace de tems.

Ainsi, dans de pareilles circonstances, la moëlle ne pouvant produire aucunes nouvelles plantes invisibles dans les parties destinées à la fructification, il s'en forme à bon compte dans les autres parties de la plante, comme dans la racine, les cayeux, les oignons, les tiges, les yeux, les rejettons, les feuilles; & ainsi du reste. Mais, dès que les obsta-

obstacles viennent à être levés, il faut que les fleurs & les semences naissent & se forment dans le même ordre qu'auparavant.

Dans les especes de plantes dont j'ai parlé précédemment, qui ont la faculté de se reproduire en plusieurs manieres différentes à la fois, il arrive souvent que l'une de ces manieres réussit aussi bien que l'autre; tandis qu'au contraire, dans d'autres plantes, la multiplication ne peut avoir lieu que par les semences. L'art exécute ici à la vérité bien des choses particulieres; & les simples soins assidus de la culture peuvent aussi conduire à des effets inattendus: mais, le plus souvent, l'une & l'autre de ces deux voyes demeure inefficace; comme le témoignent suffisamment les plantes nombreuses auxquelles on donne le nom d'annuelles. Dans ces dernieres, l'art parvient quelquefois à de petites variétés qui s'écartent de l'ordre naturel, surtout quand on fait agir l'art avant qu'une semblable plante ait atteint son entier dévelopement; mais, quand elle en est déjà à l'efflorescence, ou plus loin encore, jusqu'à la maturité des semences, ou que la saison accoûtumée de l'année est déjà écoulée, il est bien rare qu'on vienne à bout de rien, & toutes les peines demeurent pour l'ordinaire inutiles.

Les plantes annuelles, rélativement à la durée courte, mais naturelle, de leur vie, paroissent avoir de la conformité avec les insectes qui, dans le cours de leur vie, c'est à dire, depuis qu'ils sortent des oeufs jusqu'à ce qu'ils périssent, n'engendrent & ne se multiplient qu'une seule fois; en sorte qu'après avoir déposé leurs oeufs, ils sont abattus, deviennent malades, & meurent bientôt après. Les circonstances sont tout à fait les mêmes par rapport aux plantes véritablement annuelles, de la vie, de l'accroissement, & de la durée desquelles il faut juger d'après leur climat, où, lorsque ces plantes ont acquis leur dévelopement complet, & la fructification qui le suit, elles ne conservent plus le pouvoir de se multiplier, & meurent.

Les diverses especes de multiplication dans les plantes ont occasionné des disputes dans les siecles précédens, & ont conduit les Savans à de fausses conséquences. Plusieurs d'entr'eux ont confondu toutes

ces eſpeces avec la propagation générale par les ſemences, & en ont conclu que les ſemences devoient indiſpenſablement exiſter dans les plantes où ces autres ſortes de multiplication avoient lieu: d'où ils ont inféré qu'il n'y avoit point dans les plantes de parties eſſentiellement deſtinées à la propagation: aſſertion qu'il me paroit ſuperflu de réfuter.

Mais, afin de pouſſer plus loin mes réflexions, je rappelle ce que j'ai déjà dit au commencement de ce Mémoire; c'eſt que toutes les plantes, avant qu'elles puiſſent arriver au terme de leur fructification, doivent avoir leurs autres parties principales, ou du moins quelques unes d'entr'elles, convenablement formées; ſans quoi l'accroiſſement va toujours ſon train, jusqu'à ce qu'à la fin la moëlle ait acquis une perfection ſuffiſante pour produire un véritable oeil, ou bouton à fruit. De cette maniere, l'accroiſſement néceſſaire de cette derniere partie prend fin dans les plantes; la moëlle perce l'écorce; & engendre les diverſes ſortes de réſervoirs, qui contiennent principalement les parties qui ſont eſſentielles à la fructification dans le régne végétal.

Pluſieurs plantes, de celles qui ont une tige durable, (*caulis perennis*,) ſe multiplient annuellement par l'efficace de leur moëlle, pleine de force & de vie, en pouſſant à une ou à deux repriſes de jeunes branches, qui ne ſont autre choſe que tout autant de plantes nouvelles & particulieres, lesquelles ſortent & pouſſent jusqu'à ce point avant les fleurs & la ſemence. Mais, comme elles ſont fortement attachées à leur plante principale, ou mere, & qu'elles en reçoivent immédiatement une nourriture conſtante, elles n'ont pas beſoin d'un autre réſervoir de nourriture plus déliée, telle qu'il s'en trouve dans ce qu'on nomme *cotyledones*, ou *placentae*, dont les plantes où la propagation ne ſe fait que par les ſemences ſont pourvues, & ont un beſoin indiſpenſable.

Dans les mêmes plantes, ſe forment les parties de la fructification au dedans des ſemences comme les plus eſſentielles, au moyen d'une prolongation de la moëlle dont la délicateſſe eſt incompréhenſible. Ce ſont autant de jeunes plantes, qui, lorsqu'elles ont atteint leur perfec-

tion,

tion, se séparent de la mere, & n'en reçoivent plus aucune nourriture. Les semences contiennent donc les plantes tout entieres, formées d'une maniere invisible, & qui sont déjà vivifiées par leur participation nécessaire à la moëlle de leur plante-mere: pour leur premier accroissement elles n'ont besoin que d'une nourriture tout à fait déliée, qui leur est amenée par ces cotyledons particuliers que nous venons d'indiquer, jusqu'à ce qu'elles puissent sucer & pomper de l'air & de la terre des sucs humides plus grossiers.

Après cela, les plantes n'acquierent pas en une seule fois le pouvoir de propager leurs especes par des semences fécondées; mais il leur faut pour cet effet un certain espace de tems, pendant lequel se fait toujours leur dévelopement d'une maniere conforme à un ordre bien réglé. On observe ce dévelopement dans les plantes, quelquefois plutôt & plus rapidement exécuté, quelquefois plus tard, & même après bien des années; de façon qu'elles sont à cet égard fort différentes les unes des autres: sans parler de quantité de variations & d'exceptions qui sont causées par le changement de païs & de terroir, de nourriture, de situation, de température, & par d'autres circonstances semblables.

Aux mêmes égards, on rencontre dans les animaux des diversités caractéristiques, qui offrent les traces les plus marquées de ressemblance avec celles qui viennent d'être exposées; & il n'y a personne qui puisse conserver le moindre doute à cet égard, dès qu'il n'est pas entierement dénué d'expérience.

On n'insistera pas sur les preuves détaillées de ce que nous avons avancé au sujet des plantes, pour peu qu'on soit au fait des especes suivantes, & qu'on ait eu occasion de comparer les variations qu'elles éprouvent dans les diverses parties du Monde, ou même dans de petites contrées. Ces especes sont, le Chou ordinaire avec toutes ses variétés, le Tabac, le Cotonnier, le Ricinus, le Chêne, les diverses sortes de Palmier, & plusieurs autres. Il est connu que toutes ces plantes, & celles qui leur ressemblent, varient beaucoup quant à la

durée;

durée; & de là s'enſuit qu'elles ont beſoin de parvenir à un âge différent, avant qne d'atteindre la perfection qui les met en état d'engendrer des ſemences fecondes.

Il m'eſt arrivé quelquefois de remarquer que des plantes qui ſe diſpoſoient pour la premiere fois à la fructification, & qui, à en juger par les apparences, étoient garnies de fleurs hermaphrodites, nombreuſes & parfaites, n'avoient cependant pas encore atteint la perfection par rapport à la ſtructure des parties fructifiantes, en ſorte qu'on ne pouvoit en attendre des ſemences fécondes. En effet, elles ne portoient point de fruit la premiere année, & n'en avoient que fort peu la ſuivante.

Dans d'autres plantes que les Botaniſtes Sexualiſtes nomment plantes monoïques & polygames, & qui produiſent toujours les parties eſſentielles à la fructification en deux fleurs ſéparées l'une de l'autre, lesquelles ne laiſſent pas de coëxiſter ſur une ſeule & même plante; j'ai obſervé quelquefois, parmi les jeunes tiges qui pouſſent autour de ces plantes, ou des arbres, que dans les commencemens elles ne produiſoient que des fleurs d'un ſeul ſexe, ſoit mâles, ſoit femelles, quoique les deux ſexes euſſent dû s'y trouver à la fois. Mais, les années ſuivantes, on y trouvoit les fleurs du ſexe qui avoit d'abord manqué, d'abord à la vérité en petit nombre, mais à la fin, avec l'âge, la plante étoit également & abondamment pourvue de l'une & de l'autre ſorte de fleurs.

A' préſent, quand les plantes ont fait tout ce qui étoit néceſſaire pour parvenir à leur but eſſentiel, en portant des yeux, ou boutons à fruit, & en fourniſſant des ſemences fécondes, chaque oeil, ou chaque ſemence, ne peut remplir qu'une ſeule & unique fois la fonction à laquelle il eſt deſtiné. En effet chaque oeil, ou chaque ſemence, ouvre en quelque ſorte ſon ſein pour en laiſſer ſortir la nouvelle plante, qui y avoit été formée d'une maniere tout à fait inviſible, & que la moëlle de la plante précédente avoit vivifiée: & tout de même les jeunes animaux ſortent des oeufs fécondés, & le font en diverſes ma-

manieres, plus ou moins nombreuſes, mais analogues à celles dont nous venons de parler. Il n'importe après cela que la plante ou l'animal ainſi produits ſoyent de longue ou de courte durée, que leur destination ſe borne à une ſeule année, pendant laquelle doivent ſe paſſer la fécondation & la fructification, après quoi ils meurent; ou bien, que, parvenant à un âge fort avancé, les opérations ſusdites n'arrivent qu'au bout de pluſieurs années, & s'exécutent par conſéquent en pluſieurs manieres différentes.

Parmi les animaux, il y en a pluſieurs qui parviennent avec l'âge, (ſans parler des inſectes qui ſubiſſent pour cet effet leurs métamorphoſes accoûtumées,) les uns plutôt, les autres plus tard, à cette perfection & faculté qui eſt requiſe pour propager leur eſpece. On remarque la même choſe dans les productions du regne végétal. L'expérience fait voir que la culture, tant naturelle qu'artificielle, peut, rélativement à certaines vues, effectuer dans pluſieurs de ces ſujets des variations, en accélérant ou en retardant le cours de la Nature. Dans nos contrées il y a des inſectes qui, ſuivant ce cours, ne vivent gueres au delà d'un jour, & qui, éprouvant dans ce court eſpace de tems les changemens & les métamorphoſes qui leur conviennent, exécutant toutes les opérations & les fonctions propres à leur eſpece. D'autres inſectes vivent 14. 20. ou 30. jours. Les plantes offrent les mêmes circonſtances dans la durée des diverſes eſpeces de champignons, de mouſſes, & d'algues.

Quantité d'eſpeces de petits animaux, ou d'inſectes, ont une vie de 2. 3. 4. 6. à 9 mois, ſavoir depuis Avril ou Juin jusqu'à Aouſt ou Octobre de la même année; quelques uns atteignent auſſi le mois de Juin de l'année ſuivante: mais à la fin ils périſſent tous, après l'accouplement, la ponte, les premiers ſoins de leurs petits, & pluſieurs autres fonctions acceſſoires, qui s'accordent avec les vues & l'ordre de la Nature pour l'entretien & le ſoutien de la grande & vaſte oeconomie de l'Univers. Toutes ces circonſtances ſe retrouvent dans les plantes conformément à la diverſité de leur durée.

Il a été remarqué ci-dessus que les plantes qui ne se propagent d'ailleurs que d'une seule maniere, ne laissent pas de pouvoir être assujetties à quelques variations & exceptions, tant au moyen de la culture & de l'art que par divers cas accidentels. Cela est exactement vrai pourvu qu'on y joigne les restrictions nécessaires ; & il y a des moyens d'apporter quelques changemes au terme naturel de la propagation par les semences & par les oeufs, soit en l'avançant, soit en le retardant. Mais, si l'on ne fait attention qu'à l'état naturel des plantes considéré en lui-même, on doit reconnoitre qu'il ne sauroit y être pleinement transformé ou détruit, non plus que dans les animaux, en sorte que dans certaines occasions on doit s'attendre à le voir toujours reparoître.

Tel étant l'état des choses, la culture & l'art peuvent à la vérité faire que des plantes qui, lorsqu'on les abandonne à la seule Nature, sont réellement & infailliblement annuelles, durent 2. 3. à 4 ans, ou que des plantes qui ont naturellement deux ans de vie, en atteignent 3. 4. à 5. On prolonge aussi souvent, dans des vues particulieres, la durée d'une partie de ces plantes pour quelques semaines ou quelques mois, lorsqu'elles approchent du terme où elles doivent mourir, ou qu'elles l'ont effectivement atteint. Mais à la fin tous les efforts de la culture & de l'art demeurent infructueux, quand la moëlle a perdu sa force naturelle d'accroissement, ou que la structure intérieure de la plante rend impossible la prolongation de sa vie.

Un des moyens les plus assurés d'allonger la vie des plantes susmentionnées, peut consister à retarder leur dévelopement, de façon qu'elles n'atteignent qu'au dernier point possible le terme que la Nature leur a prescrit, tant pour s'accroître que pour vivre. Ainsi on doit les empêcher de fleurir & de conduire des fruits à maturité, ou bien, (ce qui peut s'exécuter à l'égard de quelques plantes,) en retrancher les premieres fleurs & le plus grand nombre des suivantes, & même en détacher d'autres parties. Par ce moyen, la moëlle, dans le tems où elle a le plus de vivacité, se trouve forcée de s'étendre de nouveau, & de percer l'écorce de tous côtés pour en faire sortir de nouvaux jets.

Quand

Quand une ſemblable plante a été empêchée par ces moyens, ou par d'autres, de produire de nouvelles plantes par la voye des ſemences, tandis que la moëlle eſt aſſez active dans toutes les parties pour être bientôt miſe dans un mouvement univerſel, il ſe forme très aiſément dans d'autres parties de jeunes plantes, qui ſe dévelopent avec beaucoup de ſuccès; & comme elles ſucent & exhalent avec une grande force, elles ſe conſervent ſur la plante principale, & cela eſt cauſe que celle-ci peut demeurer en vie 2. 3. à 4 fois plus longtems qu'elle n'auroit fait & pu faire ſans cela.

Ce qui vient d'être rapporté, arrive quelquefois de ſoi-même, & même aſſez communément, dans les plantes dont la vie s'étend à deux ou trois ans. Mais, qu'on puiſſe venir à bout de produire les mêmes effets dans toutes les plantes par le moyen de l'art, c'eſt ce qui eſt démenti par l'expérience journaliere. Pluſieurs plantes annuelles & autres meurent beaucoup trop-tôt, avant que d'avoir porté des ſemences, pour qu'on puiſſe les ſoumettre à ces opérations artificielles, & les traiter d'une maniere auſſi arbitraire.

Cette méthode de prolonger la vie de certaines plantes annuelles en retardant un peu leur fructification, eſt appliquable aux inſectes, entre lesquels on peut choiſir pour exemple les ſauterelles, particulierement celles des arbres qui ſont groſſes & vertes, auſſi bien que celles auſſi d'une groſſe eſpece qu'on rencontre dans les champs & dans les prairies. On ſait que le mâle, parmi ces inſectes, meurt peu après avoir fécondé la femelle, & la femelle presqu' auſſitôt après avoir dépoſé ſes œufs, après quoi elle devient foible & malade; ſouvent même il lui arrive d'expirer pendant la ponte. Cela arrive dans nos contrées vers la fin de Septembre, ou pour les ſauterelles qui ſont plus tardives, au commencement d'Octobre. Mais ſi l'on prend de ces inſectes des deux ſexes d'abord en Septembre, comme on le fait chez nous, & qu'on les mette dans deux verres, ou boëtes, à part, de façon que le mâle ne puiſſe s'accoupler avec la femelle, & que par conſéquent la femelle ne puiſſe être fécondée; alors, conſervés dans un lieu tempéré, ils

ils vivent jusques vers Noël, c'est à dire, huit à neuf semaines plus que de coutume; & jusqu'à la fin on entend à diverses reprises le bruit que ces insectes font ordinairement.

Quand, parmi nos plantes annuelles, il s'en trouve qui sont mâles & femelles, comme cela a lieu dans la petite Oseille annuelle; dans la Mercuriale; dans les épinars & le chanvre; la plante mâle périt toujours un certain espace de tems avant la femelle, savoir aussitôt que la poussiere des fleurs est entierement passée. Au contraire, la plante femelle verdit encore longtems après que l'autre est toute desséchée, & vit jusqu'à ce que les semences ayent acquis leur entiere maturité.

Il y a une foule d'insectes dont les mâles meurent avant l'hyver, au lieu que les femelles, qui portent les œufs fécondés par les mâles, ne les déposent qu'au printems de l'année suivante, & périssent alors, après que leurs petits sont éclos. Il arrive quelquefois de trouver au printems, surtout après que l'hyver a été court & doux, des insectes, tant mâles que femelles, des especes au sujet desquelles l'expérience fournit des preuves suffisantes, qu'elles meurent encore avant l'hyver. Les endroits où on les rencontre, la douceur de l'hyver, & la conjecture même qu'on est fondé à faire, que ce sont des restes des insectes tardifs de l'année précédente; qui, à cause de la saison où ils existoient, n'ont pu s'accoupler, tout cela, dis-je, nous offre un cas extraordinaire, mais qui ne sert qu'à confirmer d'autant mieux le sentiment que nous avons exposé ci-dessus.

Mais, pour revenir aux plantes durables, dont il est connu qu'elles ont le pouvoir de se propager par plusieurs voyes, outre celle des semences; remarquons, que suivant que leur accroissement est plus lent ou plus rapide, il leur faut un espace de tems proportionné, & quelquefois très long, avant que de porter des semences fécondes, savoir de 3. 4. 6. 8. 10. 20. 30. à 40 années, mais aussi, dans ces derniers cas, elles parviennent jusqu'à la plus haute vieillesse. La culture & l'art peuvent produire des effets nombreux & variés sur ces plantes, en retardant un certain espace de tems leur fructification; & en atten-

attendant le reste de leur accroissement va son train, jusqu'à ce qu'à la fin elles portent des fleurs & des fruits. Mais, si l'on continue ces opérations jusqu'à ce que la moëlle qui sert à former de nouvelles plantes ait perdu toute sa vivacité, les jets annuels s'affoibliront de plus en plus, de façon que la plante deviendra tout à fait stérile, & qu'elle périra sans avoir jamais eu, ni fleurs,. ni fruits.

En nous occupant de l'examen des circonstances susdites, & en passant pour cet effet plusieurs especes de plante en revue, nous avons fait une attention particuliere à deux especes, qui, dans nos contrées & à cause de la situation où elles s'y trouvent, n'ont jamais produit, ni fleurs, ni semences. Tout au moins, si la chose est arrivée, on a eu lieu de la mettre à bon droit au nombre des cas les plus rares.

La premiere de ces Plantes est la *Lavendula latifolia sterilis Morisoni*, que plusieurs Auteurs qualifient, *Lavendula non florida*. Cette plante, que son âge & sa foiblesse font approcher de sa fin, se trouve dans la belle collection du Jardin Botanique de l'Académie Royale à Berlin; & elle y est venue avec d'autres plantes rares de la Succession d'Orange du Roi Guillaume III. Le défunt Jardinier *Michelmann* a fait pendant trente ans plusieurs essais sur cette plante pour qu'elle produisit des fleurs, vu qu'elle a trois ou quatre pieds de haut, & que le tige est presque de la grosseur du bras. J'ai aussi pris des rejettons & des boutures de cette plante, que j'ai mis dans des terres mêlangées de toutes sortes de manieres, dans de l'eau, ou dans de la mousse, me proposant d'arriver au même but; mais il n'a jamais été possible d'obtenir ni fleurs, ni semences, de cette plante.

On pourroit lui associer celle qu'on nomme *Syringa nana*, *nunquam florens*, & la *Mentha Sinica*, *rarius florens* de *Boerhaave*, dont le Jardinier Anglois *Miller* fait mention dans son grand Ouvrage sur les Jardins.

La seconde plante, que j'ai cultivée pendant plusieurs années avec beaucoup de soin, mais sans aucun effet, rélativement à la pro-

duction des fleurs & des fruits, & afin de pouvoir en déduire une détermination certaine de ſon eſpece, c'eſt le petit buis, que divers Auteurs nomment *Buxus humilis;* plante tout à fait commune, fort baſſe, & ayant des feuïlles rondes: quelques uns l'appellent auſſi le buis nain. Il ſeroit ſuperflu d'en donner ici une deſcription plus étendue, puisqu'on s'en ſert depuis une infinité d'années, dans les grands jardins & dans les petits, pour border les plattes bandes & faire les compartimens des parterres; uſage que l'on pouſſe même trop loin au détriment du terroir. Peut-être que les Jardiniers du commun ont cru que c'étoit l'unique ou la meilleure plante qu'on pût employer à ces uſages: cependant il en exiſte pluſieurs autres, & qui ſont plus convenables.

Les anciens Botaniſtes, de concert avec les Curieux en fait de Plantes & les Jardiniers, ont diſtingué le buis en grand & petit, ou haut & bas; mais ils ont toujours déclaré qu'ils n'y avoient trouvé, ni fleurs, ni fruits. Quelques uns néanmoins ont cru qu'il fleuriſſoit, mais très rarement; d'autres ont prétendu qu'il ne fleuriſſoit jamais: mais ils ſe ſont tous accordés à regarder le petit buis comme une eſpece naturellement différente du grand. Pour moi, après pluſieurs années d'expérience, je ſuis au contraire obligé de me ranger au ſentiment, ſuivant lequel le petit buis ne doit être regardé que comme une ſimple variété du grand. On aura pleinement raiſon ſi l'on croit que le petit buis eſt tel, en partie parce qu'il eſt encore jeune, en partie à cauſe qu'en le rognant fréquemment, on ne ceſſe de le retarder, & de le mettre tellement en arriere, que la plûpart du tems il dégénere & devient ſtérile.

Mais, après ce retardement & cette dégéneration du buis, il ne laiſſe pas de pouvoir arriver, qu'une partie de ces obſtacles ſoyent levés, ou ceſſent d'eux-mêmes, de ſorte que la plante revient peu à peu à ſes propriétés naturelles, ſavoir tout auſſi longtems qu'il lui reſte une force d'accroiſſement ſuffiſante. Je puis produire à cet égard des preuves de fait, qui mettent la choſe au deſſus de toute contradiction; ce

ce ſont de grandes branches de cette eſpece de buis, chargées de fleurs & de fruits, que j'ai l'honneur de mettre dans ce moment ſous les yeux de l'Académie.

J'ai trouvé ces branches en aſſez bon nombre dans un lieu particulier & dans une circonſtance particuliere. Mais, comme peut-être dans les tems précédens on y a fait fort peu d'attention, & qu'on n'a réellement pas cherché, ni par conſéquent trouvé, des fleurs dans le cas en queſtion, il a paru ſuffiſant pour établir une diſtinction formelle, entre le buis qui fleurit & celui qui ne fleurit pas. A' préſent qu'il ſe manifeſte des fleurs & des fruits, qui n'indiquent pas la moindre différence entre le grand & le petit buis, & que l'accroiſſement complet de celui-ci lui a donné plus de reſſemblance avec celui-là, on ne doit plus balancer à réduire ces deux plantes à une ſeule eſpece naturelle.

Voici le fait. Ces plantes en fleur que je préſente ici, je les ai trouvées dans le cours de la préſente année 1757, à Droſſen dans la nouvelle Marche, ſous un tas de buis non fleuri, dans un jardin qui étoit un peu demeuré en friche. Les pieces du parterre étoient bordées de ce buis, dont la figure extérieure avoit ſouffert, dans quelques endroits en tout, & ailleurs en partie, de fort grands changemens. Je me réjouis beaucoup d'un cas auſſi rare, auſſi imprévu, & des plus intéreſſans qui puiſſent s'offrir dans ce genre.

Il y avoit environ trente ans que le buis de ce jardin avoit été planté; & depuis 1733 jusqu'à 1757 il n'avoit été, ni taillé, ni replanté. Le jardin étoit couvert d'ombre, & dans un fond, près d'une eau courante, & entre pluſieurs ſources; le terroir étoit mol, gras, & marécageux. Le buis s'y étoit élevé à une hauteur de deux à quatre pieds, & avoit deux à trois pouces d'épaiſſeur. Son buis & ſon écorce étoient beaucoup plus ſpongieux que de coûtume.

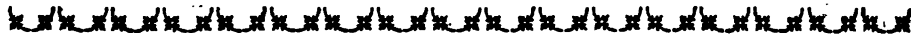
En conſidérant les branches de ce buis ainſi accru, on pouvoit parfaitement bien remarquer, comment, à meſure que la plante avoit vieilli, les petites feuilles avoient ſouffert des altérations ſucceſſives dans leur figure. Celles qui étoient tout en bas avoient conſervé leur rondeur & leur petiteſſe; & à meſure qu'elles alloient en s'élevant, elles

les devenoient plus grandes & plus pointues. A' la fin je trouvai des indices que ce buis avoit déjà fleuri & porté des fruits depuis plusieurs années. Je fis transporter quelques unes des plus belles tiges dans le Jardin Botanique Royal de Berlin; mais elles y ont bientôt péri.

Le petit buis est donc une plante tout à fait remarquable, qui, tant qu'elle demeure jeune, n'a offert ici que des branches & des tiges avec leurs rejettons, qui servent à la propager en les séparant de la racine; de sorte qu'en continuant à tailler régulierement ce buis tout les deux ou trois ans, & à le transplanter, il conserve sa stérilité, ses feuilles rondes & courtes, & sa petite stature. Quand tout cela dure un long espace de tems, ce buis dégénére à la fin, & devient tout à fait méconnoissable, jusqu'à ce que, par négligence, on par mépris, il arrive de le laisser pendant plusieurs années jouïr d'un repos, & prendre une nourriture, qui le ramenent insensiblement à son état naturel.

La longue stérilité de l'espece de Lierre dite *Hedera corymbosa Lobelii* lui mérite une place ici. Elle reçoit cette dénomination, quand, devenue vieille & forte, elle porte des fleurs & des fruits. Mais, tant qu'elle est encore jeune & stérile, on l'appelle *Hedera helix*, *sive sterilis*; &, quelque différence extérieure qu'il y ait d'abord entre celle-ci & la précédente, le cours des années les conduit à la fin à une parfaite ressemblance, comme nous venons de voir que cela arrive au petit buis. En attendant, le lierre & le buis peuvent-être associés ensemble, comme deux plantes qui ne fleurissent que dans un âge fort avancé & très rarement; ce qui nous conduit à cette conclusion, „ c'est que toutes les plantes, conformément à une loi qui leur est „ prescrite, fleurissent & portent des semences fécondes dans un tems „ déterminé & à un certain âge; & qu'ensuite, au moyen de ces se- „ mences, elles propagent & conservent sans interruption leurs espe- „ ces naturelles." Il n'importe après cela qu'outre cette voye de multiplication diverses plantes en ayent encore plusieurs autres, par lesquelles elles tirent en quelque sorte leur réproduction d'elles-mêmes, & qu'on rencontre en effet à chaque pas dans le régne végétal.

SUR



SUR LE BITUME D'ALSACE,

PAR M. SPIELMANN.

Traduit de l'Allemand. (*)

Le Rhin qui tire sa source des montagnes de la Suisse, coule de Bâle vers Coblenz dans une vallée d'environ soixante lieues de longuer; elle est bornée au midi par le mont Jura, à l'orient & à l'occident par deux chaines de montagnes: celle du côté oriental est la plus haute: elle avance, de même que celle du côté occidental, par différens contours dans cette vallée, ce qui la rend très inégale. En se rapprochant beaucoup vers Coblenz, ces montagnes semblent former une espèce de pointe.

Les deux chaines de montagnes ont des noms différens, suivant leurs diverses situations; celle que l'on voit à l'occident est connue sous les noms de *Vôges*, Waßgauisch Geburg, & de *Hundsruck;* les Vôges en occupent la partie meridionale, & le Hundsruck la Septentrionale. Il en est de même de celle qui est à l'orient; sa partie méridionale s'appelle *Forêt Noire*, & la septentrionale *Odenwald*.

Il n'y a rien de plus beau, ni de plus instructif pour un Philosophe qui est curieux de la formation de notre globe, que la vuë de ces montagnes. Etant placé sur une colline à une petite distance du Rhin, & promenant ses yeux à l'entour, il observe les effets charmants que produisent ces montagnes par leur différentes gradations; les plus éloignées de l'observateur sont les plus hautes, & les autres, en se rapprochant de lui, deviennent toujours plus basses, jusques à ce qu'elles aboutissent enfin à une plaine riante. Au delà du Rhin qui par-

(*) Ce Mémoire a été fourni à l'Académie déjà traduit.

partage cette plaine, on voit comment les prairies, montant peu à peu, forment d'abord d'agréables collines & de fertiles côteaux; ensuite des montagnes plus hautes, qui, s'élevant toujours davantage, vont enfin se perdre dans les nuës; ce qui représente un amphithéatre dont la vue est ravissante.

Cette vallée produit toutes les choses nécessaires à la vie, de sorte que ses habitans pourroient se passer de productions étrangeres, s'ils étoient assés raisonnables pour se borner aux commodités seules, & pour ne pas rechercher des choses qui, non seulement sont superflues, mais même nuisibles à leur santé.

L'Alsace occupe la partie la plus méridionale de cette vallée; elle renferme dans sa petite étendue, non seulement les susdites production utiles & nécessaires, mais l'on y trouve encore des choses remarquables, qu'on chercheroit en vain dans des régions plus vastes.

Le Bitume qu'on y rencontre mérite particulierement l'attention des Naturalistes; il y en a dans la partie méridionale de cette Province, qu'on nomme le *Sundgau*, auprès du village de *Hirzbach*, à une lieue d'*Altkirch*. Il est très probable que la partie septentrionale, au delà de *Haguenau*, en est toute imbibée; on le travaille depuis longtems à *Lampertsloch;* on en a découvert à *Drachenbronn;* il s'en trouve dans la *forêt de Sulz;* il y en a à *Philippsbourg;* j'en possede qui a été tiré du voisinage de *Birmesenz*. *Ruland*, dans son *Hydriatice*, fait mention du bitume qui se trouve dans les eaux de *Waldsbronn*, dans la *Comté de Bitsch;* j'en ai vu qui surnage en forme de pellicule sur un ruisseau auprès de *Sturzelbronn;* les analyses des eaux de *Niederbronn*, & d'un puits dans le *Jægerthal*, m'ont fait voir qu'il se continue jusques à ces endroits.

Thurneisen, dans son *Traité sur les eaux minerales*, L. VI. Ch. 38. parle d'un ancien puits près de *Gersbach*, dans le *Leberthal*, d'où suinte du Bitume; il en donne une assés ample description, dont un anonyme a envoyé une copie mutilée à la Société Royale de Londres: elle se trouve dans l'*Abridgement* de *Lowthorp*, Tome II. p. 460. Plusieurs

ſieurs Auteurs comme *Baccius*, *Ettmuller*, *Valentini*, *Bohnare*, en parlant de ce bitume, ſe ſont contentés, ou de ſe copier les uns les autres, ou de décrire ſimplement ce qui s'en trouve dans les *Mémoires de la Société de Londres*. Il eſt vrai qu'on ne voit plus de bitume dans le *Leberthal;* & il n'y a même perſonne qui puiſſe ſe ſouvenir d'en avoir ſeulement entendu parler: mais différens accidens, arrivés depuis près de deux ſiècles, ne peuvent-ils pas avoir tari une ſource, dont la mine ne ceſſe pas pour cela d'exiſter?

Quoiqu'on trouve du bitume dans différens endroits de la Province, on ne le travaille pourtant que dans les environs de *Sulz;* c'eſt auſſi celui-ci qui ſera l'objet de cette Diſſertation.

Je crois qu'il eſt néceſſaire de donner une deſcription du terrain où il exiſte; j'en ſerai par là plus clair, & ceux qui aiment à regarder les choſes d'un oeil philoſophique, en ſeront aidés dans leurs ſpéculations.

Sulz eſt un bourg ſitué au pied des *Vôges*, entouré de hauteurs, qui en s'élevant forment les grandes montagnes, im Waßgauiſchen Vorgebürg. Il eſt eloigné de *Strasbourg* de neuf lieues; la *forêt d'Haguenau*, dans laquelle il y a quantité de pins, eſt à ſon midi à deux lieues de diſtance. Il y a cinq lieues entre ce bourg & le *Rhin;* & dans tout l'eſpace qui eſt entre ce fleuve & *Sulz*, il n'y a que des forêts, excepté quelques petites collines, qu'on voit près de ce bourg.

Les collines près de *Sulz* ont environ quarante toiſes de hauteur; leur terre eſt argilleuſe, & produit pour la plus grande partie du froment d'hyver & de l'épeautre, une moindre quantité d'avoine, d'orge, & du mays; mais on eſt obligé de la labourer bien profondément avant de l'enſemencer, & de la laiſſer une année en friche, ſi on en veut tirer de bons grains. On y cultive auſſi des vignes, qui donnent un très bon vin; il pourroit ſervir à confirmer l'opinion de *Glauber* qui prétend, *Pharmacop. Spagyriq.* P. III. p. 208. que le goût exquis des meilleurs vins du Rhin leur vient du *petroleum* qui ſe trouve dans leur terroir.

Les autres collines qui ne ſont pas labourées, ſont couvertes de chênes & de hêtres. Autrefois elle portoient auſſi des pins, mais aujourdhui il n'y en a presque plus.

Les collines ſont ſéparées par des prairies de douze jusqu'à cent toiſes de largeur; & on remarque qu'elles ſont couvertes d'arbres jusqu'au bas de leurs pentes, comme ſi autrefois elles n'avoient formé qu'une ſeule montagne, & qu'elles euſſent été enſuite ſéparées par quelque accident; de ſorte que les arbres dont elles étoient couvertes, ſe ſont trouvés placés ſur leurs pentes, ſans avoir ſouffert aucun dérangement, pour y former une tapiſſerie naturelle. Or, comme on ne ſçauroit ſoupçonner que le terrain ait pû ſe détacher ſans que les arbres qu'il portoit en euſſent ſouffert, les mêmes collines confirment la théorie qui eſt aujourdhui communément reçue; ſavoir que les collines contigues aux grandes montagnes en ont été ſeparées par la deſcente des eaux, dont celles-ci ont été ci-devant couvertes, & que ces mêmes eaux ayant repoſé, par différentes cauſes, ſur les côteaux, ont auſſi fendu & ſéparé en pluſieurs parties ceux-ci. Les côtés extérieurs ayant été attenués par l'action de l'air, & engraiſſés par des plantes pourries & des charognes, qui y étoient portées par le vent & cent autres cauſes, ont été rendus propres à faire germer les ſemences des arbres & d'autres plantes que le hazard y amenoit.

Il y a une vallée étroite, qui continue depuis *Sulz* jusques au village de *Lobſanne*, dans la direction d'Ouëſt; elle a une lieue de longueur. Derriere *Lobſanne*, la vallée s'éleve, ſe rétrécit, & aboutit à une forêt qui s'approche des montagnes dans la direction de Nord-Oueſt; ſa partie la plus voiſine du bourg s'appelle *bois de la paroiſſe de Sulz*, Sultzer Kirchſpiel Wald. Dans ce bois il y a un moulin qui eſt mû par l'eau de ſept fontaines, qui ont leur ſource dans le voiſinage: le moulin en a tiré ſon nom, ſieben Bronnen Mühl. Le bois change de nom au delà du moulin, & s'appelle Dracher Bronnen Wald, du village auquel il aboutit. Les champs d'*Hælſchloch*, village ſitué à une lieue de *Sulz*, vers le midi, ſont parſemés de ſcories de

fer.

fer. On a encore découvert près de là des traces de charbon de terre; on en a aussi trouvé à *Bierlebach*, village distant d'une demi-lieue du moulin des sept fontaines, vers le Nord.

On a depuis longtems découvert dans les prairies attenantes, au pied d'une colline située à une lieue de *Sulz* vers l'Occident, entre les villages de *Merkwiler* & *Lampertsloch*, dans le baillage de *Wærth*, des fontaines d'eau, sur lesquelles nageoit du bitume, dont les paysans se servent à différens usages; comme on peut le voir dans les extraits des Auteurs qui en ont parlé, lesquels je joins ici pour ne rien omettre de tout ce regarde l'histoire de mon objet. Je passe l'usage médicinal auquel on a employé le bitume de *Lampertsloch*; il ne différe pas de celui qu'on attend de tout bitume, lequel se trouve dans tous les Auteurs qui ont écrit sur la matiere médicale.

Tabernæ-Montanus assure, dans la Préface de son Wasserschatz datée de 1584, qu'il y a à *Lampertsloch* un fontaine d'huile qui rend sur la fin d'Avril, & dans le mois de Mai, une si grande quantité d'huile que les paysans la ramassent avec de grandes cruches, pour la brûler dans leurs lampes, & pour graisser les roues de leurs chariots.

Hertzog, dans sa *Chronique d'Alsace*, imprimée en 1592, fait mention d'une fontaine qui est auprès de *Lampertsloch*, qui fournit au mois de Mai une matiere noire & onctueuse, ressemblante à la Thériaque, & dont l'odeur est forte comme celle du *petroleum*, avec laquelle les pauvres gens graissent les roues; à cela il ajoute qu'il y a, pas loin de là, une pierre noire, qu'on peut pêtrir comme de la cire, & qui a la même odeur que la fontaine susdite.

Roeslin, dans ses Wasgauischen Gebürgs Gelegenheiten, imprimées en 1593, parle d'un bitume qui se trouve auprès de *Lampertsloch*, en forme d'une pierre, dont l'odeur est très forte, & qui s'amollit étant tenu quelque tems dans les mains. Il dit encore, qu'il y a au pied de cette montagne une source, sur laquelle nage une graisse

onctueuse, semblable à de l'huile, & que pendant l'été elle se rassemble en plus grande quantité que pendant l'hyver.

Libavius, *dans ses Singularia*, P. III. L. 1. Ch. 5. & 9. dit qu'on trouve du bitume en Alsace, comme aussi des mines de *Chalcantum*, & des sources bitumineuses. L. II. Ch. 10. il parle du bitume de *Lampertsloch*, & soupçonne qu'on en pourroit faire du *Xerasphaltum*, ou goudron.

Jean Volcck a donné, l'an 1625, un petit Traité sur notre bitume, sous le titre de **Hanauischen Erdbalsams**, *Petrolei* **oder weissen Agsteins Beschreibung.** Il y dit, que le terrain où l'on trouve le *petroleum* est couvert de pyrites; qu'il fournit une eau médicinale qui a la couleur du petit lait; qu'il y a, à la distance d'une demi lieue, sur la montagne, une mine de fer très riche: il ajoute qu'il a distillé de ce bitume une huile qui ressemble à l'huile de Karabé: il marque de plus que les paysans s'en servoient pour graisser leurs chariots, pour garantir les vernis, les couleurs, les bois, & autres matieres, contre la pourriture & les vers. Il prétend, que ce bitume mêlé avec du goudron conserve les cordes & les voiles des vaisseaux, & conseille d'enduire la partie qui est dans l'eau d'un mélange composé de ce bitume, de souffre, & de chaux, pour la préserver des vers; à cela il ajoûte qu'on peut s'en servir au lieu de suif, & pour apprêter le cuir, assurant que par ce moyen il devient non seulement souple, mais acquiert même une belle couleur & du lustre, qu'il préserve aussi le fer de la rouïlle, & peut tenir lieu de chandelles.

Kuffer dit aussi deux mots du bitume de *Lampertsloch*, dans sa **Beschreibung des Marggrafen Bads**, imprimée en 1624.

Reisel dit, dans sa **Beschreibung des Niederbronnen Bads**, imprimée en 1664, qu'on trouve à *Lampertsloch* plusieurs mines de soufre, de pyrites, & de cire fossile, comme aussi des rochers entiers de bitume & du *petroleum* liquide, dont les veines descendent très profondément dans la terre.

D'Ich-

D'Ichtersheim, dans sa *Topographia Alsatiæ*, 1706, ne dit que deux mots sur notre bitume; encore n'est-ce qu'une répétition de ce que *Hertzog* en a dit.

Boecler, dans sa *Cynosura Materiæ Medicæ*, qui a vu le jour en 1729, parle d'un *petroleum* noir, nageant sur l'eau à *Lampertsloch*, qu'il dit avoir été employé jusqu'à son temps à de vils usages.

Monsieur *Hoefel*, présentement Physicien de Deux-ponts, a donné une dissertation à Strasbourg en 1734, qui a pour titre *Historia balsami mineralis Alsatiæ, seu Petrolei vallis Sti. Lamperti*, der Hanauische Erdbalsam, Lamprechtslocher Oel, oder Bächelbronn. Cette Dissertation contient une description des plus exactes que nous ayons jusqu'à présent de ce bitume; mais je ne sçaurois donner ici un extrait complet de ce beau Traité, sans passer les bornes que je me suis prescrites. Je me contenterai dont d'en transcrire les principales choses qui conviennent à mon but.

„ Il y a, dit il, à l'orient de *Lampertsloch* une source entourée de planches, qui a douze pieds de profondeur sur cinq de large; l'eau de cette source est couverte d'un bitume dont on pouvoit ramasser autrefois quatre livres par jour; mais, depuis que plusieurs petites sources ont percé aux environs, on n'en peut plus recueillir qu'une livre; il s'y en trouve en plus grande quantité au printems qu'aux autres saisons; la permission annuelle de la ramasser ne se donne qu'au plus offrant; on en sent l'odeur à une demi-lieue à la ronde; les insectes qui voltigent sur la source sont suffoqués par les vapeurs qui en exhalent, & tombent dedans. Son fond est argilleux; & à cent quatre vingt pas de là on découvre une mine de bitume sablonneuse, dont la veine est couverte dans quelques endroits d'un demi-pied de terre, & dans d'autres de deux pieds; elle a vingt pieds de largeur sur quatre de profondeur. J'ai trouvé, continue-t-il, au fond de la mine des pyrites jaunes & blanches. L'eau de cette source ne differe pas de celle des autres fontaines. Cinq livres de la mine ont donné par la distillation une

„ once

„ once de phlegme, & huit onces d'une huile empyreumatique; il eſt
„ reſté dans la cornue un ſable noir & blanc, dont l'aimant a attiré
„ quelques particules; l'huile de la ſource a donné par la diſtillation
„ les mêmes produits que la mine. On a tiré de l'huile empyreuma-
„ tique, après pluſieurs rectifications, beaucoup d'huile très fluide
„ & jaunâtre; je n'ai pu, dit-il, encore faire du ſuccin de ce *petro-*
„ *leum*, ni avec le ſel de Glauber, ni avec l'eſprit de nitre."

Monſieur *Schœpflin*, qui, par un effet de ſon attention ordinaire, ne laiſſe rien échapper, fait quelque mention du bitume de *Lampertsloch* dans le premier volume de ſon *Alſatia Illuſtrata*, & renvoye le lecteur à la Diſſertation de Monſieur *Hoefel.*

Je viens d'indiquer tout ce qu'on a écrit juſques ici ſur cette matiere, tant pour rendre juſtice a ceux qui l'ont traitée avant moi, que pour faire voir qu'il y a encore bien des choſes à deſirer là deſſus, & que le bitume des environs de Sulz a été travaillé avec ſuccès depuis.

On a tiré tout le bitume dont on s'eſt ſervi jusques à l'année 1742, des fontaines d'une prairie marécageuſe, comme le ſont ordinairement celles qui ſe trouvent entre des montagnes. Elle eſt ſituée vers le Sud-Oueſt, au pied d'une colline, qui a *Lampersloch* au Nord, & *Merkweiler* au Sud: la hauteur de la colline eſt de trente toiſes environ, & ſon ſommet eſt large d'un quart de lieue. L'eau de pluſieurs fontaines chargées de bitume s'écoule ſur cette prairie; l'une d'entr'elles eſt la plus remarquable par ſon abondance & par ſon ancienneté: & c'eſt d'elle que tous les Auteurs cités ci-deſſus ont parlé, & dont on a tiré le bitume principalement. On a vu de tems en tems naitre de nouvelles ſources, qui ont fait tarir les anciennes; mais la plus grande s'eſt toujours conſervée: les petites ſources qui ſubſiſtent aujourdhui, tariſſent pendant l'été, & je ne doute nullement que ſi l'on continue de travailler à la mine, & de faire écouler les eaux de la montagne, les fontaines de la prairie ne tariſſent un jour entierement. La grande ſource eſt au ſud de la mine, de niveau avec la prairie; d'un côté elle a quinze pieds de profondeur, dix-huit de

l'autre,

l'autre, & cinq pieds quarrés de largeur; ses eaux n'augmentent pas beaucoup, quoique celles des environs croissent considérablement. Il y a environ douze ans qu'on a vuidé les eaux de cette source, ce qui a fait tomber sa garniture de planches, en sorte qu'il n'en est resté que quelques unes à sa partie supérieure; mais on a rétabli la garniture il y a quelque temps. L'eau de la source est bleuâtre, à peu près comme le petit lait, ce qui est causé par les parties huileuses qui y surnagent; elle n'a pourtant aucun goût.

On se souviendra que Monsieur *Hoefel* assure, que le plus de bitume qu'on pouvoit ramasser de son temps sur les fontaines, étoit quatre livres par jour: dans l'année 1742, on a trouvé le moyen d'en tirer plus de quintaux qu'autrefois de livres.

Monsieur *Tirnis*, Suisse, commença cette année à fouiller dans la superficie de la terre. Monsieur *de la Sablonniere*, qui avoit déjà travaillé à la mine d'asphalte de Neufchâtel, a poussé le travail plus loin; & ayant pénétré jusqu'à l'intérieur de la montagne, il a découvert le lit qu'on travaille actuellement. C'est en 1745 qu'il commença à s'y mettre avec vigueur, & c'est de lui que vient le nom de *la Sablonniere* qu'on donne aujourdhui à l'enclos de la mine qu'on travaille sur la colline dont j'ai parlé. Depuis il a fait bâtir auprès d'elle une petite maison pour le Directeur, & une grange spacieuse pour la préparation du bitume.

On a commencé à creuser près du pied de la colline. La bouche, ou l'ouverture du conduit, (Stollen Mundloch) est située du côté de l'orient, & la galerie vers l'occident; elle a environ deux cens toises de longueur: il y a encore plusieurs autres galeries qu'on a fait depuis pour tirer la mine. On a encore pratiqué trois puits dans la colline, dont le plus ancien qui est ruiné à present avoit vingt-deux pieds de profondeur: les deux autres, dont l'un a treize toises de profondeur, & l'autre qui n'a été creusé que cette année, aboutissent à des galeries, dont l'une s'étend du Sud-Ouest au Nord-Ouest, & a environ cent toises de longueur.

Le nouveau puits qui a soixante-deux pieds, aboutit à une galerie longue de vingt toises, ou environ.

Les galeries de la colline ont en général huit pieds de hauteur, dont deux, qui sont les plus proches de leur fonds, sont garnies d'une planche sur laquelle on marche; & au dessous de laquelle les eaux se peuvent rassembler, lesquelles sont conduites par des canaux jusqu'à la pompe qui les tire au jour.

L'exemple de Messieurs *Tirnis* & *de la Sablonniere* a encouragé différens Curieux à fouiller dans d'autres endroits du voisinage de la colline que je viens de décrire.

Il y a environ deux ans qu'on a commencé de tirer aussi la mine de bitume de la Forêt de la paroisse de Sulz. L'ouverture de la galerie principale est dans le point de la vallée qui se termine dans cette Forêt: cette galerie avance de trois ou quatre toises vers le Sud, elle se tourne après vers l'Ouest, & de là vers le Nord-Ouest; elle a cinq pieds de hauteur, & deux pieds & demi de longeur; elle a actuellement vingt toises, ou environ. On a pratiqué proche de l'entrée de la galerie un puits d'où on tire la mine, par des cuveaux, comme cela se pratique aussi à la colline mentionnée ci-dessus; on pompe par le même puits qui a cinq toises de profondeur les eaux.

Cet établissement s'appelle *le Saupferch*, parce que c'est ici où couchent les cochons qu'on envoye au gland.

A une demi-lieue du *Saupferch*, du côté du Nord, on a trouvé une couche de bitume, à quelques pieds sous la terre, & large de cent vingt pas. Celle-ci n'est pas travaillée faute d'entrepreneurs, qui veuillent y employer quelque argent.

Le puits du *Saupferch* commence par une couche de sable, après laquelle vient une mine de bitume; sous celle-ci une couche de charbon de terre en pelotons, & enfin une d'argille.

En creusant le puits de la colline, on a premierement trouvé une couche de terre de potier, d'un jaune-gris, qui a jusques à quatre pieds

pieds de largeur; ensuite une terre sablonneuse dans laquelle on a remarqué des veines d'un rouge brun; après cela un banc d'argille, tantôt blanche, tantôt grise; & enfin la mine de bitume, dessous laquelle se voit un banc d'argille semblable à celui qui est au dessus: l'argille est d'autant plus dure qu'elle est plus profonde. Il s'y trouve aussi des pyrites dispersés par pelotons; mais, plus on y pénétre, moins on en découvre.

Les vapeurs souterraines s'élevent quelquefois dans la miniere de *Lampertsloch*, ou de la colline, en si grande quantité, qu'elles font un dommage considérable. Il est arrivé plus d'une fois, & encore tout récemment, que des eaux qui paroissoient onctueuses au goût & au tact, ont percé dans la galerie, que le bitume qui nageoit sur elles s'est enflammé, & que l'air a été si prodigieusement ébranlé, que non seulement les ouvriers ont été jettés par terre, mais que les tuiles de la maisonnette du puits ont été brisées, & qu'on a entendu, à la distance d'un quart d'heure, un bruit comme si on avoit tiré un canon.

Le bitume qu'on tire des trois endroits qui sont exploités aujourd'hui, différe à quelques égards. Je décrirai ci-après celui qu'on tire de la colline de *Lampertsloch*. Celui du *Saupferch* est plus puant que les autres; celui enfin qui est proche de la terre, est le plus tenace de tous; aussi y a-t-on trouvé du véritable bitume, assés solide, qui n'étoit incorporé dans aucune autre substance.

On se sert pour arriver à la mine de bitume de deux instrumens. L'un est une pêle de fer, qui fait un angle aigu avec le manche, & dont la partie antérieure est formée en demi-lune.

L'autre est un coin de fer, attaché à un manche. C'est le bitume qu'on tire de la mine de la colline, qui a acquis la plus grande réputation; c'est aussi celui qui a fait le sujet de mes expériences, que je vais rapporter, après avoir dit deux mots sur la nature de la mine, & sur la façon d'en tirer le bitume.

On appelle la mine sur les lieux où on la tire hors de la terre, *Mine d'Asphalte*; c'est une terre noire, plus ou moins onctueuse au

 tact,

mêt, à proportion quelle approche d'avantage de la superficie de la terre. On la tire en grandes masses qui, étant exposées à l'air, tombent en petits morceaux, parce que les parties fluides qui les unissoient, en exhalent. *Linnæus* fait mention de cette terre dans le *Museum Tessinn.* p. 40. sous le nom de *minera bitumen friabile.*

Cette terre est très improprement nommée une mine, car dans le fond elle n'est qu'un sable imprégné de bitume, qu'on en sépare de la maniere suivante: on met cette terre dans des chaudrons de fer; on la fait bouillir avec de l'eau, sur la superficie de laquelle le bitume monte par ce moyen; on trouve au fond de la chaudiere un sable blanc précipité. Le bitume qu'on en retire de cette façon contient encore plusieurs parties de sable, dont on n'a pu le séparer entiérement, ce qui ne se fait qu'en faisant fondre le bitume retiré du sable, dans une chaudiere de fer, & en le faisant bouillir pendant quelque tems. Par là le sable qui s'y trouve encore mêlé, se précipite au fond de la chaudiere; & le bitume qui est au dessus du sable précipité, se trouve entierement purifié.

Rien n'est plus simple que cette méthode pour retirer le bitume du sable dans lequel la Nature l'a caché: l'eau mise en mouvement par la chaleur pénétre dans les interstices du sable, & en détache le bitume qui s'y trouve. Celui-ci qui est plus leger que l'eau, & qui n'en peut être dissous, monte à la superficie, & s'y assemble; le sable au contraire tombe par son poids au fond du vaisseau.

Ce qui reste de sable dans le bitume, & qui n'en peut être séparé par cette premiere opération, est précipité par la seconde, dans laquelle on fond le bitume, c'est à dire qu'on divise ses parties, & que le sable qu'elles tenoient envelopé, se retire par son poids, & entraîne avec soi quelques particules bitumineuses qui n'ont pû s'en séparer entierement. Ce sable ressemble parfaitement à la terre bitumineuse tirée de la miniere; il en a aussi l'odeur, & s'enflamme facilement, lorsqu'on le jette au feu; dans la fabrique même on s'en sert en guise de bois.

La Nature sépare le sable du bitume beaucoup plus aisément: les eaux souterraines desquelles on sçait combien de force leur mouvement possede, en passant par le lit du sable bitumineux, se chargent de bitume; le courant supplée ici au mouvement que nous excitons dans la fabrique par le bouillonement: le sable qui est obligé de s'en détacher par la fusion, se sépare du bitume que les eaux souterraines ont chargé, sous les passages de ces eaux par des couches sablonneuses & argilleuses, au travers desquelles ces eaux se filtrent avant qu'elles percent au jour.

Une livre de sable bitumineux m'a donné deux onces de bitume bien net, & quatorze de sable, dont une once s'est précipitée du bitume par le raffinage.

J'ai distillé une livre de sable qui restoit après le raffinage du bitume, & j'en ai eu deux gros d'eau, six gros d'huile subtile, & cinq gros d'huile épaisse, substances dans lesquelles le feu décompose le bitume, comme je le dirai plus bas. Il paroit par ces expériences, que chaque livre de sable qui se précipite pendant la purification du bitume, en contient au-delà d'une once & demie; & comme on retire d'une livre de terre bitumineuse une once de ce sable, on perd sur chaque livre un gros environ de bitume, qu'on ne sauroit en retirer. Cette perte peut être aisément négligée.

Le bitume séparé de sa mine est une matiere noire, d'une odeur assez forte, qui lui est propre; elle n'est, ni bonne, ni mauvaise, & ne peut sans prévention être comparée à celle du succin. Quand on jette du feu sur cette matiere, elle ne s'enflamme pas; mais, en la jettant sur du feu, elle s'enflamme aussitôt & donne une fumée blanche. J'ai ramassé cette fumée, & j'en ai eu une suye très fine, mais point brillante. Le bitume brûle dans la lampe comme une huile faite par expression, sans qu'il en résulte aucune odeur désagréable; il tient le milieu par sa ténacité entre le miel & la thérébentine. Quant à son poids spécifique, on peut le comparer par la table ci-jointe, avec celui de diffé-

différentes substances que j'ai pesées dans ma chambre, dans une même heure.

Huile de girofles -	1. 070.	Huile d'Olives d'Amendes douces	0. 923.
Eau commune -	1. 019.		
Vinaigre distillé -	1. 015.	de Thérébentine	0. 903.
		Acide de sel dulcifié	0. 884.
Bitume de Lampertsloch	1. 000	nitre dulcifié -	0. 873.
Esprit de sel ammoniac fait sans eau - -	0. 980.	vitriol dulcifié Alcohol - -	0. 845.
Huile de lin -	0. 946.	Q. E. Végétal, ou Aether Naphte distillée du bitume	0. 808.
Beure de Cacao. -	0. 942.		

Si l'on expose notre bitume à l'air pendant un certain tems, il perd non seulement de son poids, mais il devient même plus tenace, & cela plus ou moins à proportion que l'air est chaud; ce qui fait que, dans les grandes chaleurs, on sent l'odeur de la mine à la distance de quarante pas. Les vapeurs qu'exhalent le bitume qui surnage ne sont en aucune maniere nuisibles; car les mouches, les oiseaux, & les autres animaux, qui en approchent, n'en sont point incommodés: il est vrai qu'on y trouve quelquefois des insectes noyés, mais cela ne vient point des vapeurs nuisibles de la fontaine; ces petits animaux y périssent plutôt faute de nourriture; leurs ailes étant chargées par cette matiere tenace, ils ne sauroient s'envoler.

En faisant bouillir cette matiere, elle petille d'abord beaucoup, à cause des particules aqueuses qui s'y trouvent mêlées, & devient plus tenace; en continuant de la faire bouillir jusqu'à ce qu'elle soit réduite à la moitié de son poids, elle devient dure & cassante comme de la poix, en se réfroidissant. J'en ai tenu une partie réduite à cette consistance pendant quelque tems dans l'eau bouillante; elle est devenue très molle, & capable de recevoir toutes sortes de formes, sans cependant s'attacher aux doigts.

Je

Je conclus de ces expériences, que cette matiere est aussi propre pour poisser les navires que le goudron végétal, & qu'elle peut être encore préférable à ce dernier, en ce qu'elle préserve les vaisseaux de la vermine, qui au contraire y est attirée par l'odeur du pin, qui est très agréable aux vers.

Le même bitume évaporé à un plus grand degré, devient un véritable asphalte.

On comprend par ce que je viens dire sur la matiere qu'on tire de la mine de *Lampertsloch*, que le nom qui lui convient le mieux est celui de bitume liquide; terme par lequel les Anciens ont dénoté une huile tenace qui sort de la terre. *Dioscoride*, L. I. Ch. 99. dit qu'on brûle le bitume liquide dans les lampes; or on sçait que les huiles trop fluides ne sont pas propres à cet usage. *Pline*, dans son *Histoire Naturelle*, L. VI. Ch. 23. parle d'une Nation qui perfectionne le bitume; & L. VII. Ch. 15. il dit que le bitume est tenace & gluant. L. XXXV. Ch. 4. il donne le nom de bitume à une liqueur grasse & huileuse qui nage sur une fontaine. *Galien*, *de Simpl. Medicam. facult.* L. I. Ch. 17. assure que la substance des bitumes est crasse & terrestre.

On appelle notre bitume dans l'endroit où on le fabrique, Goudron, parce que les entrepreneurs avoient dessein de le vendre pour calfater les vaisseaux. Il paroit parce que j'en ai dit plus haut qu'on l'y pourroit adapter effectivement, quoiqu'on ne l'employe jusques ici qu'à graisser les voitures; à cette fin on y mêle du savon & du suif, pour le rendre plus propre à cet usage.

On nomme notre bitume aussi *petroleum*, parce que, dit-on, c'est une huile qui sort des rochers; mais rien ne retarde plus le progrés qu'on peut faire dans l'Histoire naturelle que la mauvaise coûtume de s'attacher aux écorces étymologiques, en négligeant d'approfondir la nature des choses, qui en est le but principal. L'Histoire naturelle est une science de pratique plutôt que de spéculation, en ce qu'elle fait connoitre, par des faits, la nature des corps utiles aux hommes.

Il

Il faut en effet mettre une grande différence entre les matieres fossiles inflammables, connues en général sous le nom de *petroleum*. *Mercatus*, dans sa *Metallotheca*, p. 81. distingue les bitumes fluides qui deviennent tenaces, de ceux qui ne le deviennent pas. Je suis très surpris que les Auteurs modernes ayent negligé cette distinction, sans laquelle il est impossible de se former une idée juste des huiles fossiles. J'admets donc deux sortes de ces huiles, dont les unes deviennent épaisses & solides par l'évaporation, & se ramollissent ensuite par la chaleur, de maniere qu'elles sont susceptibles de toute sorte de formes. Je les appelle *bitumes*. Les autres s'évaporent entierement par la chaleur, & il n'en reste qu'un peu de terre noire, qui est une partie huileuse brulée; je les nomme *petroleum*. Il est très probable que les Anciens ont compris le *petroleum* sous le terme de *Naphte*; car le mot de *petroleum* n'a commencé à être usité qu'au seizième siecle, comme on peut le voir dans *Agricola*, *de Natur. Fossil.* L. IV.

J'ai vû que quelques auteurs citent *Mesuë*, au sujet du *petroleum*; mais je n'ai pu trouver ce mot dans l'édition des deux Livres de cet Auteur, qui a paru à Venise en 1689. Je vois au contraire dans son *Grabadin*, à l'article *Oleum Philosophorum*, qu'il distingue l'huile des Philosophes en naturelle & en artificielle; la naturelle en minérale & en marine, & qu'il appelle cette derniére *Naphte*. Il est donc clair qu'il entend par huile des Philosophes naturelle minérale, ce qu'on appelle aujourdhui *petroleum*.

Le bitume de *Lampertsloch* dissout les substances animales & végétales suivantes: Adragant, Animé, Bdellium, Camfre, Caranna, Cire, Colofon, Copal, Encens, Encens de village, Euphorbe, Huile d'olives, Huile de térébentine, Gomme ammoniac, Gomme de lierre, les trois especes de Laques, Mastic, Myrrhe, Opopanax, Phosphore, (cette dissolution luit dans l'obscurité,) Sagapenum, Sang de Dragon, Styrax, Tacamahac, Térébentine.

Il est inutile d'avertir que le bitume devient d'autant plus solide, qu'il a dissous une plus grande quantité de substances solides, & que l'artiste

l'artiste le peut adapter à différens usages, en y joignant différentes substances auxquelles il s'unit.

Il ne dissout point le benjoin, l'assa fœtida, le galbanum, & le cachou.

L'huile de vitriol ne s'échauffe pas, étant versée sur le bitume; mais il se forme de ce mêlange une masse solide & noire, qui n'a aucune transparence. Cette masse étant distillée, donne un esprit acide très volatil; & elle sublime au col de la cornue, & du récipient, des soufres: dans la cornue il reste une terre noire & insipide. Il seroit superflu d'expliquer comment l'acide vitriolique a été volatilisé, & comment le soufre a été produit dans cette expérience. L'eau forte, l'esprit de nitre de Glauber, & l'esprit de sel, n'agissent point sur notre bitume; ils n'en dissolvent rien, même aprés de longues digestions. Quand on le fait bouillir avec l'esprit de nitre, les vapeurs acides le poussent hors du vaisseau, à moins qu'il ne soit fort grand; le bitume devient en même tems plus tenace, & perd sa couleur pour en prendre une jaune-rougeâtre; ce changement de couleur vient sans doute de l'acide nitreux, qui s'attache au bitume, & qui augmente sa tenacité.

L'esprit de vin alkoholisé ne produit aucun changement avec le bitume; la tenacité de celui-ci en paroit être la raison, car le *petroleum* de Neufchâtel, qu'on tire de sa mine par la distillation, se dissout dans l'alkohol; & personne n'ignore que les huiles faites par expression deviennent dissolubles dans l'alkohol quand elles ont été atténuées par la distillation. Ce n'est pas ici que je rendrai raison de ce phénomene; mais je ne saurois passer sous silence que quelques Auteurs se trompent, quand ils assurent que tout *petroleum* dont l'alcohol dissout quelque chose, est falsifié par une substance résineuse. Ceux qu'on retire de leurs mines par la distillation, montrent le contraire; & encore ne vois-je pas pourquoi la chaleur souterraine ne pourroit pas atténuer les bitumes qu'elle fait sortir de la terre sous une forme fluide, au même point qu'ils acquierent par la distillation.

En mêlant notre bitume avec du sel alcali fixe, il n'en résulte rien de semblable au savon; l'acide du bitume qui réduit l'alcali en sel neutre, en est la raison. En calcinant le mêlange du bitume avec l'alcali, jusques à ce qu'il ne fume plus, & en tirant tout le sel qui y est contenu, on obtient un sel dont la premiere crystallisation est couverte d'une pellicule tant soit peu visqueuse, & dont les crystaux exposés à une chaleur médiocre perdent leur transparence; & quand on en jette sur des charbons, on apperçoit à peine qu'ils décrépitent. L'eau froide ne peut pas les dissoudre, à moins qu'on ne les dissolve, & crystallise de nouveau; quand on fait fondre ces crystaux dans un creuset avec des charbons, ils ne donnent point de foye de soufre; leur goût est un peu amer, & ils précipitent le mercure en forme de chaux blanche.

Ce que je viens de dire sur les crystaux formés par l'acide contenu dans notre bitume & par le sel alcali, démontre que cet acide est celui du sel commun, qui se joignant à l'alcali produit ce qu'on appelle communément *Sel digestif de Sylvius*. La figure de ces crystaux n'a pas été bien formée, leur décrépitation a été imparfaite, & ils n'ont pû se dissoudre dans l'eau froide, parce qu'il y avoit encore quelques particules huileuses qui leur étoient adhérentes.

Notre bitume, mêlé avec l'alun, & calciné à propos, forme ce qu'on appelle *pyrophore*, ou un souffre qui est retenu dans la terre poreuse de l'alun, lequel étant suffoqué tout ardent, s'enflamme de nouveau quand on lui redonne l'air. Messieurs *Sachs* & *Hæfel*, l'un dans sa dissertation de *Pyrophoris*, l'autre dans sa Dissertation sur *le bitume de Lampertsloch*, ont fait la même expérience.

J'ai précipité avec une lessive faite de notre bitume calciné avec le sel de tartre, une dissolution d'une partie de vitriol de Mars, & de deux parties d'alun; ce mêlange m'a donné une chaux jaunâtre. Je fus curieux de sçavoir pourquoi l'alcali rendu huileux ne précipitoit pas le fer sous la forme d'une chaux bleue; & s'il faloit nécessairement

pour

pour cet effet un phlogiſtique animal; ou ſi l'acide a empêché jusques ici de faire le bleu de Pruſſe avec toute autre choſe qu'avec le charbon animal.

L'Abbé *Menon* m'a fait naître cette idée par les deux Traités qu'il a préſentés à l'Académie Royale des Sciences de Paris, & qui ſont contenus dans le premier Tome des *Mémoires Etrangers*. Pour m'éclaircir à cet égard, j'ai pris du ſel alcali, & l'ayant calciné avec de l'huile qui j'avois tirée de notre bitume, après l'avoir diſtillé ſur le ſel de tartre, j'ai verſé la leſſive que j'en ai retirée dans une diſſolution de vitriol, de Mars, & d'alun, & j'ai eu une chaux bien bleuë.

Ayant cémenté le bitume avec du fer, je n'ai remarqué dans celui-ci aucun changement, comme je l'avois prévû, étant bien perſuadé que l'acide empêche le fer de ſe changer en acier, quoiqu'on lui ajoute le principe inflammable. Trois parties du même bitume diſſolvent une partie de ſouffre; cette ſolution acquiert une odeur ſulphureuſe, & le bitume en devient plus épais. On ſera peut-être ſurpris d'apprendre qu'il faut plus de bitume pour diſſoudre une certaine quantité de ſouffre qu'il ne faut des huiles faites par expreſſion, qui diſſolvent communément la moitié de leur poids de ſouffre.

La diſſolution du ſouffre dans le bitume paroit contraire à l'axiome, que plus les graiſſes ſont tenaces, & plus elles diſſolvent de ſouffre; mais on verra, en faiſant l'analyſe de notre bitume, que ſa quatrième partie n'eſt qu'une ſimple terre, & que la ſeptième partie de ſon poids eſt une huile très ſubtile, qui s'exhale à une chaleur beaucoup inférieure à celle qui eſt néceſſaire pour faire bouillir le bitume. Or, comme ce bitume ne peut diſſoudre le ſouffre, à moins qu'on ne les faſſe bouillir enſemble, l'huile ſubtile doit par conſéquent s'envoler pendant que la diſſolution ſe fait: mais, ſi on déduit du bitume la terre & l'huile ſubtile qui ne ſont rien à la diſſolution, on connoitra facilement que l'huile du bitume, qui ſeule peut diſſoudre le ſouffre, en diſſout une quantité auſſi grande que les huiles faites par expreſſion.

 L'am-

L'ambre gris & le ſuccin ſe diſſolvent parfaitement dans notre bitume, de même que l'arſenic, qui ſe ſublime en arſenic rouge, quand on diſtille la diſſolution.

J'ai diſtillé une livre de bitume; j'ai ai tiré onze onces d'une huile empyreumatique, & quatre de terre morte, avec deux gros d'eau, dans laquelle je ne pouvois remarquer aucune partie ſaline.

Je ne diſconviens pas qu'une partie de l'eau que j'en ai tirée ne ſoit provenüe de la décompoſition de quelques parties huileuſes. Perſonne n'ignore qu'il ſe décompoſe toujours quelque portion des huiles auſſi ſouvent qu'on les diſtille; mais le petillement de la matiere pendant l'opération, qui fait auſſi qu'on ne peut pas obtenir l'huile ſubtile dans la premiere diſtillation, m'a convaincu qu'il y avoit encore de l'eau dont on s'eſt ſervi pour la ſéparation du bitume de ſa mine, mêlée avec le bitume, & qui en ſort lorsqu'on le diſtille.

J'ai mis l'huile tirée du bitume dans une cornue; j'en ai bien nettoyé le col; & ayant changé pluſieurs fois de récipient, j'en ai tiré deux onces, & deux gros d'une huile très legere, parfaitement claire, & qui n'avoit aucune couleur. Une goutte de cette huile verſée ſur de l'eau s'étend beaucoup, & ne fait point de bruit; elle a une odeur très forte, & elle attire la flamme quand on la lui préſente; elle brûle ſur l'eau, & étant verſée dans une ſolution d'or, elle en attire le métal, & devient noire; expoſée à l'air pendant quelques jours, dans un verre débouché, elle reſte claire; elle eſt enfin parfaitement diſſoluble dans l'alcohol. Cette huile diſtillée de nouveau monte ſans aucun changement par une chaleur médiocre, & laiſſe au fond de la cornue une legere croute noirâtre. Rien n'eſt plus naturel que ce peu de terre qui reſte après la diſtillation des huiles les plus ſubtiles; pluſieurs ſe ſont imaginé qu'elle en étoit une partie hétérogene, & qu'à meſure qu'on priveroit les huiles de cette terre, elles en deviendroient plus ſubtiles. C'eſt par cette raiſon que les uns ont diſtillé l'huile plu-

ſieurs

ſieurs fois, & que les autres y ont ajoûté différentes ſubſtances ſur lesquelles ils ont voulu les rectifier; mais, ni les uns, ni les autres, ne ſont parvenus à avoir une huile qui n'ait point laiſſé, après la diſtillation, une terre noire au fond de la cornuë. Auſſi eſt-il impoſſible d'y parvenir; car les parties d'huile qui s'attachent aux parois de la cornuë, ſeront toujours brûlées par la chaleur qui eſt néceſſaire à la diſtillation: & c'eſt admettre une choſe impoſſible, que de ſuppoſer une huile qui n'a aucune terre, parce que l'eſſence de l'huile conſiſte dans le phlogiſtique. Et qui pourroit nier que le phlogiſtique ne ſoit une terre? L'éther, cette huile ſi ſubtile, laiſſe toujours une croûte noirâtre au fond de la cornue, quand on le diſtille ſans addition. Je ne ſçaurois m'imaginer que l'huile dont je viens de parler, ſoit formée par l'action du feu. J'ai dit ci-deſſus qu'elle eſt parfaitement claire & fluide; or chacun ſçait que, plus les huiles ont ſouffert du feu, plus elles deviennent tenaces & colorées: par conſéquent il n'eſt pas probable que l'huile en queſtion ſoit formée par le feu. Ajoutons que notre huile étant une fois ſéparée du bitume, on n'en peut plus rien retirer de pareil, à quelque feu qu'on l'expoſe. Je n'héſite donc point à la mettre au rang des huiles eſſentielles éthérées.

On n'aura pas lieu de douter que cette huile ne ſoit la véritable *Naphte*, tant des anciens que des modernes, ſi l'on veut ſe donner la peine de conſulter, entre autres Auteurs, *Dioſcoride*, *Mat. Med.* L. II. Ch. 101; *Pline*, *Hiſt. Natural.* L. II. Ch. 105; *Plutarque*, dans *la Vie d'Alexandre*; *Strabon*, *Geograph.* L. XV; *Linnæus*, *Syſtem. Natur.* *Wallerius*, *Mineral.* §. 99. De même que l'argent eſt toujours argent, de quelque pays qu'il vienne, & que celui qu'on tire des mines ne diffère pas de celui que la Nature nous offre tout formé, quand l'un & l'autre a été bien raffiné; ainſi la naphte ſera toujours la même, qu'elle ſoit trouvée en Syrie, en Perſe, en Italie, ou en Alſace; quoique la Nature la donne toute pure dans certains pays, & dans d'autres mêlée avec différentes matieres dont on eſt obligé de la ſéparer artificiellement.

Après la naphte, on a diſtillé quatre onces d'une huile jaune tirant ſur le rouge, dont l'odeur eſt moins pénétrante que celle de la naphte. Je ne diſconviens pas que cette huile n'ait ſouffert de l'action du feu; elle y a été trop longtemps expoſée pour n'en avoir point été altérée. On trouve dans différens pays des huiles qui ſortent de la terre, parfaitement ſemblables à celle-ci. Les Duchés de Modene, & de Parme, de même que les Provinces de Languedoc & d'Auvergne, nous en fourniſſent des exemples. Ceux qui ſeront curieux d'en ſavoir davantage, pourront conſulter *Agricola*, *de Natur Foſſil.* & *Libavius*, *Singularia*, P. III. Ce que je viens d'alléguer au ſujet de la naphte, ſuffit auſſi pour prouver, que l'huile dont je parle ne differe pas de celles que la Nature produit toutes formées, & qui n'ont pas beſoin d'être ſéparées par l'art des matieres hétérogenes, avec leſquelles elles ont été mêlées dans les entrailles de la terre, & qui ſont connues aujourdhui ſous le nom de *petroleum* blanc, ou *petroleum* rouge.

Après la diſtillation du *petroleum*, j'ai obtenu par un feu plus fort quatre onces & demie d'une huile fort épaiſſe, d'une odeur déſagréable, & qui reſſemble parfaitement à l'huile épaiſſe qui ſort la derniere, quand on diſtille la térébentine. Elle paroit quelquefois bleüe, d'autres fois rougeâtre, ſelon les différentes ſituations dans leſquelles on la conſidere. Comme je ſoupçonnois que l'épaiſſeur de cette huile venoit en partie de l'acide qui lui eſt joint, je l'ai diſtillé avec la moitié de ſon poids de ſel de tartre, & par le moyen d'un feu violent, j'en ai obtenu une grande quantité d'huile ſemblable au *petroleum*; & le ſel de tartre qui eſt reſté dans la cornue, s'eſt trouvé changé en ſel digeſtif, qui a très bien décrépité ſur les charbons, & a produit de très beaux cryſtaux quadrangulaires. Le ſel digeſtif étoit plus pur & plus aiſé à reconnoitre que celui que j'ai obtenu par la calcination du bitume avec l'alcali, parce qu'il étoit moins chargé de particules huileuſes.

Je

Je ne puis m'empêcher de remarquer, que les cryſtaux dont je viens de parler, avoient une odeur ſemblable à celle du foye de ſouffre; mais il ne s'eſt fait aucun précipité lorsque j'ai verſé du vinaigre dans la ſolution.

Monſieur *Pott*, *Obſervat. & Animadverſ. Collat.* I. a obſervé que le ſel commun fondu avec des charbons forme une maſſe qui ſent le ſouffre, mais qui, diſſoute dans l'eau, & mêlée avec des acides, ne précipite aucune matiere. Ne pourroit-t-on pas regarder ces obſervations, comme des preuves de l'analogie de l'acide du ſel avec l'acide vitriolique ?

On voit par ce que j'ai dit jusques ici à combien & à quels uſages on peut employer notre bitume. Auſſi eſt-il évident qu'il eſt une huile éthérée, dont une grande partie a été condenſée par l'acide du ſel commun.

Nous trouvons aux environs de *Sulz* du ſable, du bitume, des pyrites, & du ſel commun. Ce ſont autant de choſes qui ſe rencontrent au fond de la mer. Jusques ici on n'a point trouvé de pétrifications dans les collines dont je parle. Y a-t-il quelques communications ſouterraines entre notre ſel & la mer, par où il puiſſe tirer ſon ſel & ſon bitume ? Mais le tremblement de terre qui a ébranlé le 1. Novembre 1755, tous les endroits attenants à la mer, ne s'y eſt point fait ſentir. Ce bitume diſtille-t-il par la chaleur ſouterraine des fôrets de pins englouties dans la terre ? Sa grande reſſemblance avec l'huile qu'on diſtille des pins, & dont on fait la poix, rend cette conjecture très probable; mais les Hiſtoriens ne font point mention d'un accident ſi conſidérable: & d'ailleurs combien ne faudroit-il pas de forêts ſouterraines, pour fournir une auſſi grande quantité de bitume, qui coule au moins depuis près de deux ſiecles, & qui ſuffit pour imbiber un lit de ſable d'une grandeur très conſidérable; encore n'a-t-on jamais découvert ſous la terre de ces environs, ni feuilles, ni arbres.

Je

Je n'entreprendrai pas de propoſer quelque choſe de poſitif ſur l'origine de notre bitume, car cela me conduiroit aux grandes queſtions ſur la théorie de la terre, & ſur l'origine des foſſiles ; queſtions tant de fois agitées, & avec ſi peu de ſuccès.

J'ajoûte ſeulement que notre bitume ne paroit gueres différer du *Tar de Barbados;* & que les puits de poix qui ſont aux environs de *Clermont*, dont parle Mr. d'*Argenville*, dans ſon *Enumeration Foſſil. Gallic.* reſſemblent beaucoup aux collines de *Sulz.*

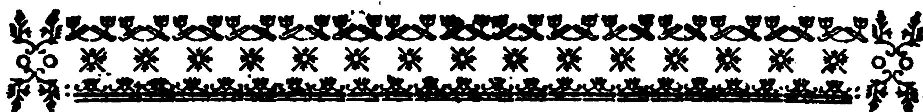


MÉMOI-

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.





RECHERCHES SUR LA CONNOISSANCE ME'CANIQUE DES CORPS.

PAR M. EULER.

I.

On peut établir une triple connoiſſance des corps, la géométrique, la mécanique, & la phyſique. La connoiſſance géométrique ne regarde que l'étendue & la figure des corps: c'eſt la partie de la Géométrie, qui eſt nommée la *Stéréometrie*, qui renferme cette connoiſſance. La connoiſſance mécanique conſidere les corps entant qu'ils ſont matiere, ſans avoir égard aux qualités dont la matiere eſt douée; & il s'agit ici de connoitre, non ſeulement la quantité de matiere dont chaque corps eſt composé, qu'on nomme ſa maſſe; mais auſſi la maniere dont la matiere eſt diſtribuée par toute l'étendue des corps. Cette connoiſſance eſt abſolument néceſſaire lorsqu'il eſt queſtion du mouvement des corps; & c'eſt par cette raiſon, qu'elle eſt nommée mécanique. En fin la connoiſſance phyſique des corps renferme toutes les autres propriétés & qualités des corps, qui ſont le propre objet de la Phyſique. Table I.

II. La connoiſſance mécanique des corps eſt le fondement de la Mécanique, puisqu'on ne ſauroit déterminer le mouvement des corps ſans connoitre leur maſſe, & comment la matiere eſt diſtribuée par toute leur étendue. C'eſt de là qu'on a tiré l'idée du centre de gravité, dont la connoiſſance eſt, comme on ſait, de la derniere importance par toute la Mécanique. L'idée du centre d'oscillation y doit auſſi être rapportée, au lieu de laquelle on peut ſubſtituer celle des *momens d'inertie*, dont je me ſuis ſervi jusqu'ici avec bien du ſuccès dans mes

recherches mécaniques. Mais je viens de découvrir encore d'autres idées sur cette matiere, qui semblent porter notre connoissance mécanique à un beaucoup plus haut degré de perfection: du moins m'ont elles servi à resoudre des problemes mécaniques, qui m'avoient paru intraitables sans leur secours. Toutes ces idées jointes ensemble fourniroient un systeme assès complet de la connoissance mécanique des corps.

La masse des corps.

III. La premiere idée que la connoissance mécanique des corps nous présente, est celle de leur masse, qui est l'assemblage de toute la matiere, dont le corps est composé. Or la matiere n'entre en considération, qu'entant qu'elle est douée de l'inertie; de sorte que la masse est la mesure de l'inertie, ou de cette qualité des corps, par laquelle ils s'efforcent de demeurer dans le même état, ou de repos, ou de mouvement uniforme rectiligne. En examinant les phénomenes de la gravité, on a trouvé que le poids de chaque corps est proportionnel à sa masse, du moins dans la même région de la terre; & partant il est permis de regarder le poids de chaque corps comme la mesure de sa masse. S'il est question des corps qui se trouvent loin de la terre, leur masse sera exprimée par le poids que ces corps auroient, s'ils étoient placés à la surface de la terre, & même dans la région qu'on aura choisie pour y fixer cette mesure. Ou bien, il suffit de connoitre le rapport de la masse d'un tel corps à celle d'un corps sur la terre, dont le poids est connu. On comprend, sans que j'aye besoin d'en avertir, que je parle ici du poids que les corps auroient dans le vuide.

Le centre de gravité.

IV. Si la matiere dont un corps est composé, étoit également distribuée par toute son étendue, la connoissance de sa masse seroit suffisante pour en connoitre toutes les rélations au mouvement; & la connoissance géométrique de sa figure fourniroit toutes les autres idées, qui entrent dans la considération du mouvement: de tels corps sont apellés homogenes. Mais, si la matiere est inégalement distribuée par l'étendue du corps, il en faut tenir compte dans la Mécanique; & de là résultent plusieurs idées, qui dépendent de la distribution de la matiere.

tiere par l'étendue du corps, dont la plus connue est celle du centre de gravité. Tout le monde sait, qu'il se trouve dans chaque corps un certain point, autour du quel la pesanteur est quasi également distribuée, & dans lequel on se puisse imaginer, comme si toute la masse du corps y seroit réunie. Mais cette idée est trop vague, & demande bien des éclaircissemens & des rectifications.

V. D'abord qu'est-ce que cette égale distribution de la matiere ou de la pesanteur autour du centre de gravité? S'imagine-t-on que, si l'on coupe un corps par un plan, qui passe par son centre de gravité, les deux parties seront également pesantes? Cela seroit bien vrai dans un globe ou dans un cylindre homogene, mais un cone, quoiqu'il soit homogene, détruit cette explication; car le centre de gravité d'un tel cone se trouvant dans son axe, à une distance de la base, qui est le quart de sa hauteur, si l'on coupe le cone par un plan parallele à sa base, & qui passe par son centre de gravité, le cone retranché sera au cone entier comme 27 à 64. donc il sera plus petit que la moitié. Or, si le corps n'est pas homogene, il n'arrive presque jamais, que les sections faites par son centre de gravité le partagent en deux parties égales, ou également pesantes.

VI. Il en est de même de l'autre propriété alléguée du centre de gravité, qui supose qu'on puisse toujours concevoir la masse ou le poids entier du corps comme réuni dans son centre de gravité. Cela n'est vrai, que lorsqu'il s'agit de l'état d'equilibre, ou d'un mouvement purement progressif des corps, où toutes les parties se meuvent à chaque instant avec des vitesses égales suivant la même direction. Or, dès que le mouvement est gyratoire, ou se fait autour d'un axe fixe, cette suposition n'a plus lieu: & l'on sait que le mouvement d'un pendule est bien différent de celui qu'il auroit, si toute sa masse étoit réunie dans son centre de gravité. C'est alors à un autre point qu'il faut faire attention, & qu'on nomme le centre d'oscillation du pendule.

VII. De là il est évident qu'il faut mieux fixer l'idée du centre de gravité. Et d'abord, il est constant, qu'il y a dans chaque corps un

certain point, qui tient un certain milieu entre la matiere qui compose le corps, dont la connoiſſance eſt de la derniere importance dans toute la Mécanique. Quand le corps ſe trouve à la ſurface de la terre, ce point eſt bien le même qu'on nomme ſon centre de gravité; mais, quand même le corps ne ſe trouveroit dans aucune liaiſon avec la terre, ou qu'il ne ſeroit pas aſſujetti à l'action de la gravité, ce point ne lui ſeroit pas moins eſſentiel, & entreroit également dans la détermination de ſes mouvemens. Donc, puiſque ce point eſt abſolument indépendant de la gravité, & qu'il eſt déterminé uniquement par la diſtribution de la matiere dont le corps eſt compoſé, je le nommerai plutôt le *centre de maſſe*, ou le *centre d'inertie* de chaque corps.

VIII. Il faut auſſi conſidérer, que ce centre d'inertie ne convient avec le centre de gravité du corps, que lorsque les directions de la gravité ſur tous les élémens du corps ſont paralleles entr'elles, & que le poids de chaque élément eſt proportionnel à ſa maſſe, comme on peut le ſuppoſer, quand le corps ſe trouve à la ſurface de la terre, & que ſon étendue eſt quaſi infiniment petite par rapport à la diſtance au centre de la terre. Mais, ſi le corps étoit extrèmement grand, de ſorte que, ni les directions de la gravité ne ſeroient plus paralleles entr'elles, ni les forces dont les parties du corps ſont ſollicitées, proportionnelles à leurs maſſes; l'idée même du centre de gravité n'auroit plus lieu, quoique celle du centre d'inertie lui fût également eſſentielle.

Le centre d'inertie.

IX. Par ces raiſons il convient de ſéparer tout à fait l'idée du centre d'inertie de l'action de la gravité. Il s'agit donc de donner une juſte définition de ce point, que je nomme le centre d'inertie de chaque corps. Si nous regardons à l'origine de cette idée, que fournit la Mécanique, on conſidere des forces appliquées à chaque élément du corps, qui ſoient proportionnelles chacune à l'inertie, ou la maſſe de l'élément, auquel elles ſont appliquées, & que leurs directions ſoient paralleles entr'elles. Alors on cherche la direction moyenne de toutes ces forces élémentaires; & l'on obſerve que cette direction moyenne

ne

ne passe toujours par un certain point du corps, quelque direction qu'on donne aux forces élémentaires. C'est donc ce point, que je nomme le centre d'inertie de chaque corps, & qui est le même que son centre de gravité, lorsque le corps se trouve aux environs de la Terre, & qu'il n'est pas trop grand, pour qu'on puisse considérer les forces élémentaires de la gravité comme proportionnelles aux masses des élémens, & leurs directions comme paralleles entr'elles.

X. Mais, pour dégager cette définition de la considération des forces, qu'on rapporte le corps à un plan quelconque, en multipliant la masse de chaque élément par sa distance à ce plan; & la somme de tous ces produits sera toujours égale au produit de la masse entiere du corps par la distance de son centre d'inertie au même plan. C'est en cela que consiste la nature du centre d'inertie. Mais on a raison de douter si cette définition est possible, puisqu'elle semble plus que déterminée. Car, prenant à volonté trois plans, auxquels on rapporte le corps de la maniere prescrite, il est clair que de là le centre d'inertie sera déjà déterminé. Il est donc encore douteux, si ce point aura la même propriété à l'égard de tous les autres plans: au moins n'est-il pas permis de le supposer; mais cela demande une démonstration particuliere, sans laquelle la définition donnée seroit absurde.

Le moment d'un corps par rapport à un plan.

XI. Pour rendre cette définition plus intelligible, je nommerai le moment d'un corps par rapport à un plan donné, la somme de tous les produits, qui résultent en multipliant la masse de chaque élément du corps par sa distance au-dit plan. Cela posé, je dis, qu'il se trouve dans chaque corps un certain point de cette nature, que le moment du corps par rapport à un plan quelconque est toujours égal à la masse entiere du corps multipliée par la distance du dit point au même plan. Ensuite, ayant démontré l'existence de ce point, la définition n'aura plus de difficulté en disant, que c'est ce point qu'on nomme le centre d'inertie d'un corps. Il faut remarquer ici, que, si le plan coupe le corps, de sorte qu'une partie du corps se trouve d'un côté & l'autre de l'autre côté du plan, le moment d'une partie par rapport au plan

plan doit être pris négativement à l'égard de l'autre; tout comme la nature du calcul exige, où les distances, qui tombent à l'autre côté du plan, doivent être censées négatives.

XII. Voilà donc un Théoreme, dont la démonstration doit précéder notre définition. Pour cet effet, je remarque d'abord que, s'il y a un point dans le corps, qui a la propriété décrite par rapport à un certain plan, il aura la même propriété par rapport à tout autre plan parallele à celui là. Car, soit LMN un corps, dont la masse $= M$, & I le point en question, dont la distance au plan proposé soit $= f$. Qu'on considere un élément quelconque du corps en Z, dont la masse soit $= dM$, & la distance au même plan $= x$. Le moment du corps par rapport à ce plan sera donc $= \int x\, dM$, & par l'hypothese $\int x\, dM = Mf$. Qu'on prenne maintenant un autre plan parallele au précédent à la distance $= e$, & puisque l'élément dM en Z se trouve à la distance $e + x$, le moment du corps par rapport à ce plan sera $= \int (e + x)\, dM = Me + \int x\, dM = M\,(e + f)$ à cause de $\int x\, dM = Mf$. Or $e + f$ étant la distance du point I à ce nouveau plan, le moment du corps est égal au produit de la masse M par cette distance du point I à ce plan.

Fig. 1.

Fig. 2.

XIII. Rapportons maintenant le corps à trois plans AOB, AOC, & BOC, perpendiculaires entr'eux, les trois droites AO, BO, & CO, se croisans perpendiculairement à ce point O, & l'on pourra marquer le point I dans le corps, qui ait la propriété prescrite par rapport à ces trois plans proposés. Que IH soit perpendiculaire au plan AOB, & HG à la droite OA; & nommant les ligges OG $= g$, & HI $= h$, la droite f sera la distance du point I au plan BOC, g celle au plan AOC, & h celle au plan AOB. Qu'on considere un élément quelconque du corps en Z, dont la masse soit $= dM$, la masse entiere étant $= M$, & tirant pareillement la droite ZY perpendiculaire au plan AOB, & YX à la droite OA, soient OX $= x$, XY $= y$ & YZ $= z$. De là le moment du corps par rapport au plan BOC sera $\int x\, dM = Mf$, par rapport au plan

plan AOC $= \int y\,dM = Mg$; & par rapport au plan AOB $= \int z\,dM = Mh$: d'où trouvant les trois lignes f, g, h, le lieu du point T sera déterminé.

XIV. Il y a donc certainement dans chaque corps un point I, qui a la propriété prescrite par rapport aux trois plans perpendiculaires entr'eux; & partant il faut prouver, que la même propriété convient au point I par rapport à tout autre plan. Or il suffit de le prouver à l'égard d'un plan quelconque, qui passe par le point O. Car, après avoir démontré cette propriété à l'égard de tous les plans qui passent par le point O, puisqu'elle a lieu aussi pour tous les plans qui leur sont paralleles, elle sera vraye pour tous les plans possibles.

XV. Considérons donc un plan quelconque qui passe par le point O, & qui coupe le plan AOB par la droite OS, faisant avec OA l'angle AOS $= \zeta$, & que ce plan soit incliné au plan AOB vers B de l'angle $= \eta$. Il s'agit donc de trouver la distance du point Z à ce nouveau plan. Pour cet effet, ayant tiré YP à OS, perpendiculaire, on aura OP $= x \cos\zeta + y \sin\zeta$ & YP $= y \cos\zeta - x \sin\zeta$. Que ce nouveau plan coupe la droite YZ au point Q, & QP étant perpendiculaire à OP, l'angle YPQ sera la mesure de l'inclinaison, & partant YPQ $= \eta$. Donc YQ $= (y \cos\zeta - x \sin\zeta) \operatorname{tang} \eta$, & de là QZ $= z - (y \cos\zeta - x \sin\zeta) \operatorname{tang} \eta$. Maintenant, tirant ZR perpendiculaire à PQR, elle sera perpendiculaire au plan proposé; & à cause de l'angle ZQR $= 90^\circ - \eta$, on aura ZR $=$ QZ. sin ZQR $= z \cos\eta - y \cos\zeta \sin\eta + x \sin\zeta \sin\eta$.

XVI. Or cette ligne ZR exprimant la distance du point Z au plan proposé, le moment du corps par rapport à ce plan, à cause des angles ζ & η constans, sera

$$\cos\eta . \int z\,dM - \cos\zeta \sin\eta \int y\,dM + \sin\zeta \sin\eta \int x\,dM$$

& puisque $\int x\,dM = Mf$, $\int y\,dM = Mg$, $\int z\,dM = Mh$, ce moment s'exprimera en sorte

$$Mh \cos\eta - Mg \cos\zeta \sin\eta + Mf \sin\zeta \sin\eta.$$

 Mais,

Mais, ſi nous menons du point I une perpendiculaire au plan propoſé OPQ, nous la trouverons par un ſemblable raiſonnement en employant les lettres f, g, h, au lieu de x, y, z, exprimée en ſorte

$$h \operatorname{cof} \eta - g \operatorname{cof} \zeta \sin \eta + f \sin \zeta \sin \eta$$

laquelle étant multipliée par la maſſe du corps M, donne un produit égal au moment du corps par rapport au plan propoſé OPQ.

XVII. Voilà donc cette vérité rigoureuſement démontrée; qu'il y a dans chaque corps un point de telle nature, que le moment du corps par rapport à un plan quelconque eſt toujours égal au produit de la maſſe du corps par la diſtance dudit point au même plan. Donc, pour trouver un tel moment, on peut toujours conſidérer toute la maſſe du corps comme réunie dans le centre d'inertie, puisqu' alors la maſſe multipliée par la diſtance de ce point au plan donne le moment du corps par rapport à ce plan. Comme la connoiſſance de ces momens eſt d'un très grand uſage dans la Mécanique, il eſt de la derniere importance de connoître ce centre d'inertie de tous les corps, dont on veut rechercher les mouvemens; & c'eſt un article très eſſentiel qui appartient à la connoiſſance mécanique des corps.

XVIII. Si le plan auquel on veut rapporter le corps, paſſe par ſon centre d'inertie, le moment du corps par rapport à ce plan eſt $= o$. Ou bien le corps en eſt partagé en deux parties, dont les momens par rapport à ce plan ſont égaux. Donc, ſi l'on fait paſſer les trois plans AOB, AOC, BOC, que j'ai employés ci-deſſus pour cette recherche, par le centre d'inertie même du corps, de ſorte que ce centre ſe trouve au point O, les trois coordonnées $OX = x$. $XY = y$, $YZ = z$, qui déterminent le lieu de chaque élément du corps dM ſuppoſé en Z, ont cette propriété très remarquable, que

$$\int x\,dM = o; \qquad \int y\,dM = o, \qquad \int z\,dM = o.$$

C'eſt à dire, la ſomme de tous les produits de chaque élément du corps par chacune de ſes trois coordonnées ſe réduit à rien; ou bien,

chacu-

chacune de ces trois ſommes contient autant de produits négatifs que d'affirmatifs. D'où l'on voit que le centre d'inertie ſe trouve au dedans du corps, qu'on peut nommer *le milieu mécanique du corps*.

XIX. C'eſt une verité auſſi importante que remarquable, qu'il y a dans chaque corps un tel point, que je nomme ſon centre d'inertie, & qui eſt d'ailleurs connu ſous le nom de ſon centre de gravité. Mais, puisqu'il lui eſt également eſſentiel, quand même il n'y auroit point de gravité, & qu'il dépend uniquement de ſon inertie, cette raiſon étoit ſuffiſante pour en changer le nom. L'idée des momens auxquels le centre d'inertie ſe rapporte, a auſſi quelque choſe de ſingulier; puisqu'en conſidérant les maſſes mêmes, il n'eſt pas poſſible d'aſſigner dans tous les corps un tel point, par lequel tous les plans tirés les partageroient en deux parties égales. Car, quoique trois plans, dont chacun diviſe le corps en deux parties égales, ſe croiſent dans un point, il ne s'enſuit pas que d'autres plans, qu'on feroit paſſer par le même point, diviſeroient auſſi le corps en deux parties égales, comme nous avons vu que cela arrive à l'égard des moments.

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à une ligne.

XX. Tant que le mouvement d'un corps eſt progreſſif, ou que tous ſes élémens ſe meuvent à chaque inſtant avec des viteſſes égales ſelon la même direction, il n'y a que le centre d'inertie avec la maſſe du corps, qui entre dans la détermination de ſon mouvement, de quelque façon que la matiere ſoit diſtribuée par l'étendue du corps. Mais, quand le corps ſe meut en tournant autour d'un certain axe, il ne ſuffit pas qu'on ſache ſon centre d'inertie; il y a encore une rélation tout à fait particuliere dont la détermination du mouvement dépend. C'eſt ce que je nomme *le moment d'inertie du corps*, par rapport à l'axe, autour duquel le corps tourne, & qui eſt la ſomme de tous les produits qui réſultent en multipliant la maſſe de chaque élément du corps par le quarré de ſa diſtance à cet axe, ou bien à une ligne droite quelconque, qu'on regarde comme l'axe autour duquel le corps tourne.

XXI. Puisque chacun de ces produits élémentaires renferme le quarré d'une ligne, aucun ne sauroit jamais devenir négatif: & partant le moment d'inertie d'un corps par rapport à une ligne est toujours positif, & d'autant plus grand que la masse du corps est grande, & que ses parties sont éloignées de cette ligne. Il est donc nécessaire de connoitre tous les momens d'inertie d'un corps par rapport à toutes les lignes droites, autour desquelles il pourroit tourner: & partant on demande une méthode, par laquelle on puisse aisément trouver tous ces momens. Or, quoique le nombre de ces lignes soit infini, je ferai premierement voir, qu'il suffit d'avoir trouvé ces momens d'inertie par rapport aux lignes droites qui passent par le centre d'inertie du corps; ensuite, je montrerai qu'il suffit de connoitre seulement trois momens d'inertie par rapport à trois certaines lignes qui passent par son centre d'inertie, & que de ceux-ci il est ensuite fort aisé de conclure les momens d'inertie par rapport à toutes les lignes possibles, quelque position qu'elles ayent à l'égard du corps.

Fig. 3. XXII. Je dis donc premierement, que connoissant le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe ID, qui passe par son centre d'inertie I, il est aisé d'en trouver le moment d'inertie du même corps par rapport à une autre ligne droite OT, parallele à l'axe ID. Car, soit un élément du corps, dont la masse $= dM$ en Z, d'où l'on tire au plan IDOT la perpendiculaire ZY; & de Y la droite YXV, perpendiculaire aux lignes ID & OT. Qu'on nomme $IX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, & puisque I est le centre d'inertie du corps, on aura, par ce que je viens de démontrer, $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, & $\int z\,dM = 0$. Or la droite $XZ = \sqrt{(yy + zz)}$ marquant la distance de l'élément du corps dM en Z à l'axe ID, le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe sera $= \int dM\,(yy + zz)$, en étendant cette intégrale par toute la masse du corps. Donc, la valeur de cette intégrale $\int dM\,(yy + zz)$ est supposée être connue.

XXIII. Soit maintenant la distance entre les deux lignes paralleles ID & OD, savoir l'intervalle $IO = XV = e$, & on aura la distance

ce de l'élément du corps dM en Z à la ligne droite OT, qui sera ZV $= \sqrt{((e+y)^2 + zz)}$, à cause de VY $= e+y$. Donc, le moment d'inertie du corps par rapport à la ligne OT devient $=$ $\int d\mathrm{M}((e+y)^2 + zz) = \int d\mathrm{M}(ee + 2ey + yy + zz) =$ $\int ee d\mathrm{M} + 2e\int y d\mathrm{M} + \int d\mathrm{M}(yy + zz)$. Or, posant la masse entiere du corps $=$ M, on aura $\int ee d\mathrm{M} = \mathrm{M}ee$, & à cause de $\int y d\mathrm{M} = 0$, le moment d'inertie du corps par rapport à la ligne OT étant $= \mathrm{M}ee + \int d\mathrm{M}(yy + zz)$, surpasse toujours le moment d'inertie par rapport à l'axe ID; & l'excès est égal au produit de la masse du corps M par le quarré ee de la distance entre les lignes ID & OT.

XXIV. De là on voit que si l'on considere les momens d'inertie d'un corps par rapport à une infinité de lignes, qui sont toutes paralleles entr'elles, le plus petit de tous ces momens sera toujours celui, qui répond à la ligne qui passe par le centre d'inertie du corps: ce qui est une proprieté bien remarquable de ce point. La recherche des momens d'inertie d'un corps se reduit donc aux seules lignes qui passent par son centre d'inertie, de sorte qu'ayant trouvé tous ces momens d'inertie, on en peut déduire aisément les momens d'inertie par rapport à toutes les lignes possibles. Car, quelque ligne qui puisse être proposée, on n'a qu'à lui tirer une parallele par le centre d'inertie, dont l'intervalle soit $= e$. Qu'on prenne ensuite le moment d'inertie par rapport à cette ligne tirée par le centre d'inertie, & qu'on y ajoute le produit Mee, pour avoir le moment d'inertie par rapport à la ligne proposée.

XXV. Mais la recherche des momens d'inertie par rapport à toutes les droites qui passent par le centre d'inertie du corps, demanderoit encore un travail infini, s'il n'y avoit point quelque rapport entr'eux, de sorte qu'en connoissant quelques uns, on en puisse déterminer les autres. Pour découvrir un tel rapport, considérons la chose en général, & supposons que nous connoissons les momens d'inertie d'un corps par rapport à trois axes IA, IB, IC, qui se croisent perpendiculairement entr'eux au centre d'inertie du corps I. Ensuite, Fig. 4.

voyons ce qu'il faudroit connoitre au delà pour déterminer le moment d'inertie du même corps par rapport à tout autre axe IF, qui passe aussi par le centre l'inertie I. Pour cet effet, soit un élément quelconque du corps, dont la masse $= dM$ en Z, d'où l'on tire au plan AIB la perpendiculaire ZY, & de Y à l'axe IA la perpendiculaire YX. Alors, nommant les coordonnées $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, je suppose qu'on connoisse à chaque point déterminé par ces coordonnées l'élément de masse dM qui s'y trouve.

XXVI. De là il est évident, que le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe IA sera $= \int dM(yy + zz)$ par rapport à l'axe $IB = \int dM(xx + zz)$, & par rapport à l'axe $IC = \int dM(xx + yy)$. Donc, posant les intégrales suivantes étendues par toute la substance du corps,

$$\int xx\,dM = A, \quad \int yy\,dM = B, \quad \int zz\,dM = C$$

les momens d'inertie seront déterminés ensorte:

Mom. d'inertie par rapport à l'axe $IA = B + C$
Mom. d'inertie par rapport à l'axe $IB = A + C$
Mom. d'inertie par rapport à l'axe $IC = A + B$

d'où nous connoissons d'abord cette belle propriété, que chacun de ces trois momens d'inertie est plus petit que la somme des deux autres, puisque les quantités A, B, C, sont nécessairement positives.

XXVII. Pour la position d'un autre axe quelconque IF, qui passe aussi par le centre d'inertie I, qu'on conçoive un plan perpendiculaire au plan ABC, dans lequel se trouve cet axe IF, l'intersection avec le plan ABC étant la droite IE, & soient les angles $AIE = \eta$, $EIF = \theta$. Qu'on mene de Y à la droite IE la perpendiculaire YP, & on aura $IP = x\cos\eta + y\sin\eta$, & $PY = y\cos\eta - x\sin\eta$. Qu'on tire de P la droite PK parallele & égale à $YZ = z$, laquelle se trouvera dans le plan EIF, & coupera la droite IF quelquepart en Q, de sorte que

PQ

$$PQ = IP.\ \mathrm{tang}\,\theta = (x\cos\eta + y\sin\eta)\,\mathrm{tang}\,\theta \quad \&$$
$$IQ = IP : \cos\theta = (x\cos\eta + y\sin\eta) : \cos\theta$$

donc $QR = z - (x\cos\eta + y\sin\eta)\,\mathrm{tang}\,\theta$.

Baissons enfin de R sur IF la perpendiculaire RS, & puisque l'angle $QRS = FIE = \theta$, nous aurons,

$$RS = QR\cos\theta = z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta, \quad \&$$
$$QS = QR\sin\theta = z\sin\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta^2 : \cos\theta.$$

Ajoûtons y $IQ = (x\cos\eta + y\sin\eta) : \cos\theta$, & à cause de $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta^2}{\cos\theta} = \cos\theta$, nous obtiendrons :

$$IS = z\sin\theta + (x\cos\eta - y\sin\eta)\cos\theta.$$

XXVIII. Maintenant ces trois lignes

$$IS = z\sin\theta + (x\cos\eta + y\sin\eta)\cos\theta$$
$$SR = z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta$$
$$RZ = PY = y\cos\eta - x\sin\eta$$

étant perpendiculaires entr'elles, & paralleles à des directions fixes, dont l'une est le nouvel axe IF, une autre perpendiculaire à IE dans le plan AIB, & la troisième perpendiculaire aux deux autres, & partant aussi donnée; on les peut regarder comme trois autres coordonnées paralleles à trois autres axes perpendiculaires entr'eux. De là la droite ZS exprimant la distance du point Z à l'axe IF, le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe sera

$$\int dM(RZ^2 + SR^2) = \int dM((y\cos\eta - x\sin\eta)^2 + (z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta)^2)$$

qui se reduit à cette forme

$$\int dM \left\{ \begin{array}{l} + xx\sin\eta^2 + yy\cos\eta^2 + zz\cos\theta^2 - 2xy\sin\eta\cos\eta - 2xz\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2yz\sin\eta\sin\theta\cos\theta \\ + xx\cos\eta^2\sin\theta^2 + yy\sin\eta^2\sin\theta^2 \quad + 2xy\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2 \end{array} \right\}$$

XXIX.

XXIX. Ayant ſuppoſé $\int xx\,dM = A$, $\int yy\,dM = B$, $\int zz\,dM = C$, ſi nous ſuppoſons de plus les intégrales ſuivantes priſes par toute l'étendue du corps: $\int yz\,dM = D$; $\int xz\,dM = E$; $\int xy\,dM = F$ le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe. I F ſera

$$A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2 \sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2 \sin\theta^2) - C\cos\theta^2 - 2D\sin\eta\sin\theta\cos\theta - 2E\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2F\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2$$

Donc, ſi nous ſavions, outre les moments d'inertie par rapport aux axes I A, I B, I C, encore les valeurs des intégrales D, E, F, nous ſerions en état d'aſſigner le moment d'inertie du corps par rapport à tout autre axe I F tiré par le centre d'inertie, & partant auſſi par rapport à toutes les lignes droites.

XXX. Mais, pour rendre cette méthode encore plus ſimple, & pour éclaircir mieux la théorie des momens d'inertie, il eſt bon de conſidérer plus en détail les momens d'inertie par rapport à tous les axes tirés par le centre d'inertie. Et dabord, je remarque, puiſqu' aucun de ces momens ne ſauroit devenir infini, ni évanouir, qu'il doit y avoir parmi eux tant un plus grand qu'un plus petit; & il eſt important de connoitre parmi cette infinité d'axes celui auquel répond le moment le plus grand, de même que le plus petit. Enſuite, en réfléchiſſant ſur l'uſâge dans la Mécânique, on ſait que le corps ne ſauroit tourner librement, qu'autour d'un tel axe, par rapport auquel toutes les forces centrifuges des élémens du corps ſe détruiſent mutuellement. Or l'une & l'autre de ces deux conditions reviennent au même; ce qui eſt encore une très remarquable proprieté dans la théorie des momens d'inertie.

XXXI. Pour prouver cette belle harmonie, cherchons premierement quelle poſition doit avoir l'axe I F, afin que le moment d'inertie qui lui répond ſoit, ou le plus grand, ou le plus petit. Pour cet effet, on n'a qu'à différentier la formule trouvée pour le moment d'inertie par rapport à l'axe I F, en ſuppoſant les angles η & θ variables, & à egaler les différentiels à zero: Or la variabilité de l'angle η nous fournit cette équation:

$$2A(\sin\eta\cos\eta - \sin\eta\cos\eta\sin\theta^2) + 2B(\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2 - \sin\eta\cos\eta)$$
$$-2D\cos\eta\sin\theta\cos\theta + 2E\sin\eta\sin\theta\cos\theta - 2F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta^2 = 0$$

qui se réduit à cette forme:

$$A\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - B\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - D\cos\eta\sin\theta\cos\theta + E\sin\eta\sin\theta\cos\theta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta^2 = 0$$

Mais la variabilité de l'angle θ donne cette équation

$$2A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta + 2B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta - 2C\sin\theta\cos\theta - 2D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2)$$
$$-2E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + 4F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$

ou bien celle-ci:

$$A\cos\eta^2\sin\theta\cos\theta + B\sin\eta^2\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2)$$
$$-E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + 2F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = 0$$

De ces deux équations on déterminera les deux angles η & θ, & partant la position de l'axe IF, par rapport auquel le moment d'inertie est, ou le plus grand, ou le plus petit.

XXXII. Voyons maintenant, aussi quelle doit être la position de l'axe IF, afin que le corps puisse tourner librement autour de lui, ou que les forces centrifuges des élémens du corps se détruisent mutuellement. On sait que la force centrifuge de l'élément dM en Z est proportionnelle au produit de sa masse dM par la distance ZS de l'axe IF, ou bien à $ZS.\,dM$, & qu'elle agit selon la direction SZ. Décomposons cette force selon les directions SR, & RZ. & nous aurons la force selon $SR = SR.\,dM$, & selon $RZ = RZ.\,dM$. Ces deux forces étant en deux plans fixes, il faut que les unes & les autres se détruisent séparément, & non seulement les forces mêmes, mais aussi leurs moments. Or, puisque $SR = z\cos\theta - (x\cos\eta + y\sin\eta)\sin\theta$ & $RZ = PY = y\cos\eta - x\sin\eta$, il est évident qu'il y aura, tant $\int SR.\,dM = 0$, que $\int RZ.\,dM = 0$ puisque nous avons déjà, par la condition du centre d'inertie I, $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, $\int z\,dM = 0$.

XXXIII. Il reste donc que les momens aussi de ces doubles forces se détruisent mutuellement. Rapportons ces momens au point fixe I, ou multiplions les forces trouvées & appliquées au point S par la distance $IS = z \sin\theta + (x \cos\eta + y \sin\eta) \cos\theta$, & il faudra qu'il provienne tant $\int SR.\, IS.\, dM = o$ que $\int RZ.\, IS.\, dM = o$. Voilà donc deux équations pour la détermination de l'axe IF, qui, en substituant les valeurs assignées, seront

$$\int dM \left\{ \begin{array}{l} zz\sin\theta c\theta - xxc\eta^2 \sin\theta c\theta - yy\sin\eta^2 \sin\theta c\theta + xzc\eta c\theta^2 + yz\sin\eta c\theta^2 - 2xy\sin\eta c\eta \sin\theta c\theta \\ \qquad - xzc\eta\sin\theta^2 - yz\sin\eta\sin\theta^2 \end{array} \right\} = o$$

&

$$\int dM \left\{ \begin{array}{l} -xx\sin\eta c\eta c\theta + yy\sin\eta c\eta c\theta - xz\sin\eta\sin\theta + yz c\eta \sin\theta + xy\cos\eta^2 \cos\theta \\ \qquad - xy\sin\eta^2 \cos\theta \end{array} \right\} = o$$

Il faut étendre ces deux intégrales par toute la substance du corps pour avoir deux équations finies, d'où l'on puisse déterminer les deux angles η & θ.

XXXIV. Puisque les angles η & θ sont constans, nous n'avons qu'à mettre pour les formules intégrales $\int xx\, dM$, $\int yy\, dM$, &c. les valeurs supposés, & nous obtiendrons ces deux équations finies:

$$- A\cos\eta^2 \sin\theta \cos\theta - B\sin\eta^2 \sin\theta \cos\theta + C\sin\theta\cos\theta$$
$$+ D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) + E\cos\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) - 2F\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta = o$$
$$- A\sin\eta c\eta c\theta + B\sin\eta c\eta c\theta + Dc\eta\sin\theta - E\sin\eta\sin\theta + F(c\eta^2 - \sin\eta^2)c\theta = o,$$

lesquelles conviennent parfaitement avec les deux équations trouvées ci-dessus. Donc les axes, autour desquels un corps peut tourner librement, ont en même tems cette belle propriété que, par rapport à eux, le moment d'inertie du corps est, ou un plus grand, ou un plus petit. Il est donc de la derniere importance de connoitre ces axes dans chaque corps; & je les distinguerai des autres par le titre d'*axes principaux du corps*.

XXXV. Les axes principaux d'un corps ſont donc de certaines lignes droites, qui paſſent par le centre d'inertie du corps, autour desquelles le corps peut tourner librement, de ſorte que les forces centrifuges des élémens du corps ſe détruiſent mutuellement; & qui ont encore en même tems cette belle propriété, que les momens d'inertie par rapport à ces axes ſont, ou un *maximum*, ou un *minimum*. Par cette derniere propriété on comprend qu'il y a dans chaque corps au moins deux axes principaux; car, puisque de tous les momens d'inertie rapportés à des axes qui paſſent par le centre d'inertie, aucun ne ſauroit devenir, ni infini, ni évanouiſſant; il faut bien, que parmi eux il y en ait un, qui ſoit le plus grand, & un qui ſoit le plus petit. Mais on verra dans la ſuite, qu'il y a effectivement dans chaque corps trois axes principaux, qui ſe croiſent au centre d'inertie à angles droits; ce qui eſt une propriété auſſi remarquable, que celle que nous venons d'obſerver.

Les axes principaux des corps.

XXXVI. Donc, pour trouver les axes principaux d'un corps, nous n'avons qu'à réſoudre les deux équations, auxquelles nous avons été conduits par l'une & l'autre conſidération, & à en déterminer les deux angles $AIE = \eta$ & $EIF = \theta$, en regardant les ſix intégrales comme connues:

$\int xx\,dM = A$; $\int yy\,dM = B$, $\int zz\,dM = C$; $\int yz\,dM = D$, $\int xz\,dM = E$, $\int xy\,dM = F$

Or nos deux équations à réſoudre ſont:

I. $(A-B)\sin\eta\cos\eta\cos\theta - (D\cos\eta - E\sin\eta)\sin\theta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)\cos\theta = 0$

II. $(A\,cs\eta^2 + B\,sn\eta^2)\,sn\theta\,cs\theta - C\,sn\theta\,cs\theta - (D\,sn\eta + E\,cs\eta)(cs\theta^2 - sn\theta^2) + 2F\,sn\eta\,cs\eta\,sn\theta\,cs\theta = 0.$

dont celle-ci, à cauſe de $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ & $\cos\theta^2 - \sin\theta^2 = \cos 2\theta$, ſe réduit à cette forme:

II. $(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin 2\theta - C\sin 2\theta - 2(D\sin + E\cos\eta)\cos 2\theta + 2F\sin\eta\cos\eta\sin 2\theta = 0$

La premiere donne d'abord la tangente de l'angle θ

$$\tang\theta = \frac{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{D\cos\eta - E\sin\eta}$$

& la seconde la tangente du double angle:

$$\mathrm{tang}\, 2\,\theta = \frac{2\,D \sin\eta + 2\,E \cos\eta}{A \cos\eta^2 + B \sin\eta^2 - C + 2\,F \sin\eta \cos\eta}.$$

XXXVII. Or, puisque $\mathrm{tang}\,\theta - \cot\theta + 2 \cot 2\,\theta = 0$, nous en tirons cette équation:

$$\frac{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}{D\cos\eta - E\sin\eta} - \frac{D\cos\eta + E\sin\eta}{(A-B)\sin\eta\cos\eta - F(\cos\eta^2 - \sin\eta^2)}$$
$$+ \frac{A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2\,F\sin\eta\cos\eta}{D\sin\eta + \cos\eta} = 0$$

& joignant le premier & dernier membre ensemble, on trouve

$$\frac{(AD-CD-EF)c\eta + (DF-BE+CE)\sin\eta}{(D\cos\eta - E\sin\eta)(D\sin\eta + E\cos\eta)} - \frac{D\cos\eta + E\sin\eta}{(A-B)\sin\eta c\eta - Fc\eta^2 + F\sin\eta^2} = 0$$

& posant $\mathrm{tang}\,\eta = t$ il en résulte cette équation cubique:

$$t^3(DFF-DEE+(C-B)EF) - tt(E^3 - 2DDE + EFF + (B+C-2A)DF + (A-B)(B-C)E)$$
$$- t(D^3 - 2DEE + DFF + (A+C-2B)EF + (A-B)(C-A)D) + EFF - DDE + (C-A)DF = 0$$

dont la racine donne la tangente de l'angle η. De là on trouvera aussi l'angle θ, & partant la position de l'axe IF sera déterminée.

XXXVIII. Puisque cette équation cubique:

$$+ (DFF - DEE + (C-B)EF)\,t^3$$
$$- (EFF + E^3 - 2DDE + (B+C-2A)DF + (B-A)(C-B)E)\,tt$$
$$- (DFF + D^3 - 2DEE + (A+C-2B)EF + (A-B)(C-A)D)\,t$$
$$+ EFF - DDE + (C-A)DF = 0$$

a certainement une racine réelle, on en trouve un axe principal: pour les deux autres racines, il ne paroit pas de l'équation, si elles sont réelles, ou imaginaires. Mais, puisque nous savons déjà qu'il doit y avoir au moins deux axes principaux, cette équation aura nécessairement

ment plus qu'une racine réelle. D'où il est certain que toutes les racines sont réelles; & puisque chacune indique un axe principal, il s'ensuit, qu'il se trouve dans tout corps trois axes principaux.

XXXIX. Mais, ayant trouvé un axe principal par la méthode précédente, il sera fort aisé de trouver les deux autres par la méthode suivante. Soit I A cet axe principal, qu'on aura déjà trouvé, & qu'on en prenne à volonté deux autres IB & IC, qui soient tant entr'eux qu'au premier I A perpendiculaires, pour y rapporter les élémens du corps par les trois coordonnées $IX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$. Soit encore $\int xx\,dM = A$, $\int yy\,dM = B$ & $\int zz\,dM = C$, où il ne faut pas confondre ces lettres avec celles, que nous avons employées dans la recherche précédente. Maintenant, puisque I A est un axe principal, & que les forces centrifuges se détruisent mutuellement, lorsque le corps tourne autour de cet axe, il faut que les intégrales $\int yx\,dM$ & $\int xz\,dM$ évanouissent. Donc, dans les intégrations précédentes, nous aurons $E = o$ & $F = o$; mais la formule $\int yz\,dM = D$ pourra encore avoir une valeur finie. Fig. 4.

XL. Supposant donc que I A est un axe principal du corps, soit IF un autre axe principal; & posant, pour en trouver la position, les angles $AIE = \eta$ & $EIF = \theta$, nous aurons par le même calcul dont nous nous sommes servi ci-dessus, à cause de $E = o$ & $F = o$, ces équations:

I. $(A - B) \sin\eta \cos\eta \cos\theta - D \cos\eta \sin\theta = o$

II. $(A\cos\eta^2 + B\sin\eta^2)\sin\theta\cos\theta - C\sin\theta\cos\theta - D\sin\eta(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = o$

dont la premiere donne, ou $\cos\eta = o$, ou $\tang\theta = \frac{(A - B)\sin\eta}{D}$.

Or cette derniere valeur étant substituée dans l'autre équation, en produit une, qui étant divisible par $D\sin\eta$ donne $(A-B)(A-C)-DD = o$ qui ne détermine rien. Il faut donc qu'il soit, ou $\sin\eta = o$ ou $\cos\eta = o$. Mais la valeur $\sin\eta = o$ donne aussi $\tang\theta = o$;

 ce

ce qui conduit au même axe IA déjà connue. Il ne reste donc que la valeur $\cos\eta = 0$, d'où l'angle AIE devient droit.

XLI. Il est donc clair que, pour que l'axe IF soit aussi principal, l'angle AIE doit être droit, ou $\eta = 90°$; ce qui montre, que l'autre axe principal IF est perpendiculaire à l'axe connu IA. Or, posant $\eta = 90°$, l'autre équation qui devient $(B-C)\sin\theta\cos\theta - D(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = 0$ donne $\tan 2\theta = \frac{2D}{B-C}$. Cette équation fournit une double valeur pour l'angle θ; car, si l'une est $\theta = \zeta$, l'autre sera $\theta = \zeta + 90°$: de sorte que voilà en tout trois axes principaux qui sont perpendiculaires entr'eux. C'est bien un paradoxe, puisque la condition du plus grand & plus petit semble ne devoir donner que deux axes principaux, à l'un desquels réponde le plus grand, & à l'autre le plus petit moment d'inertie. Mais on sait que la méthode des plus grands & plus petits donne souvent aussi des cas, qui ne sont, ni l'un, ni l'autre; pourvu que les changemens élémentaires y évanouissent; & c'est ici précisément le cas.

XLII. Voilà donc une vérité bien importante, qui est, que dans chaque corps il y a trois axes principaux, qui se croisent à angles droits dans le centre d'inertie. Ces axes principaux ont une double propriété fort remarquable; l'une, que le corps peut tourner librement autour de chacun d'eux; l'autre, que des momens d'inertie par rapport à ces trois axes, un est le plus grand, un autre le plus petit de tous les possibles, & le troisième tient un tel milieu entre les deux autres, que, quoiqu'on change l'axe infiniment peu, le changement qui en résulte dans le moment d'inertie, évanouïsse. Cependant il peut arriver que deux axes deviennent indefinis, auquel cas tous les axes situés dans leur plan peuvent être également censés principaux; comme si dans la formule $\tan 2\theta = \frac{2D}{B-C}$, devenoit & $D = 0$ & $B = C$. Car alors l'angle θ pourroit être pris à volonté. Il peut même aussi arriver que toutes les lignes tirées par le centre d'inertie acquier-

acquierrent la propriété des axes principaux, comme dans un globe homogène.

Les trois momens d'inertie principaux.

XLIII. Ayant expliqué la méthode de déterminer les trois axes principaux de chaque corps, on les peut regarder comme connus dans la Mécanique, de même que les momens d'inertie par rapport à ces axes, que je nommerai *les trois momens principaux d'un corps.* Et alors on sera en état d'entreprendre les plus profondes recherches, dont on ne sauroit surmonter les obstacles sans ce secours. Puisque les trois axes principaux sont perpendiculaires entr'eux, il sera bon de les employer au lieu des trois directrices, auxquelles on rapporte les élémens du corps par le moyen de trois coordonnées qui leur sont paralleles. Soient donc pour un corps quelconque les droites IA, IB & IC, ses trois axes principaux, auxquels soient paralleles les coordonnées $IX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, qui déterminent la position de l'élément dM situé en Z; & on pourra regarder cet élément comme connu à l'égard des trois coordonnées x, y, z, auxquelles il est rapporté.

XLIV. Puisque les lignes IA, IB, IC, sont les axes principaux du corps, les intégrales $\int yz\,dM$, $\int xz\,dM$, $\int xy\,dM$ évanouïssent, ou l'on aura dans les formules supérieures $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, de sorte que les trois autres $\int xx\,dM = A$, $\int yy\,dM = B$, & $\int zz\,dM = C$ demeurent seulement dans le calcul. Or, posant la masse du corps $= M$, soient ses momens d'inertie principaux par rapport à l'axe $IA = Maa$, à l'axe $IB = Mbb$, & à l'axe $IC = Mcc$; & on aura par les intégrales

$$Maa = B + C; \quad Mbb = A + C; \quad Mcc = A - B$$

& partant réciproquement :

$$A = \tfrac{1}{2}M(bb + cc - aa), \quad B = \tfrac{1}{2}M(aa + cc - bb); \quad C = \tfrac{1}{2}M(aa + bb - cc)$$

De

De là le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque IF déterminé par les angles $AIS = \eta$ & $EIF = \theta$ sera par le §. 29.

$$\tfrac{1}{2}M(bb+cc-aa)(\sin\eta^2+\cos\eta^2\sin\theta^2)+\tfrac{1}{2}M(aa+cc-bb)(\cos\eta^2+\sin\eta^2\sin\theta^2)$$
$$+\tfrac{1}{2}M(aa+bb-cc)\cos\theta^2$$

qui se réduit à cette forme plus simple,

$$Maa\cos\eta^2\cos\theta^2 + Mbb\sin\eta^2\cos\theta^2 + Mcc\sin\theta^2$$

XLV. Ayant donc trouvé les trois momens d'inertie principaux Maa, Mbb, & Mcc, d'un corps, il est fort aisé d'en déterminer le moment d'inertie par rapport à tout autre axe quelconque IF, tiré par le centre d'inertie. Et pour rendre cette détermination plus évidente, j'observe que $\cos\eta\cos\theta$ exprime le cosinus de l'angle, que fait l'axe IF avec le principal IA. De même $\sin\eta\cos\theta$ exprime le cosinus de l'angle, que fait l'axe IF avec le principal IB; & $\sin\theta$ le cosinus de l'angle que fait l'axe IF avec le principal IC. Donc, si nous posons les angles $AIF = \alpha$; $BIF = \beta$: $CIF = \gamma$, que fait l'axe IF avec les trois axes principaux IA, IB, IC par rapport auxquels les momens d'inertie sont supposés Maa, Mbb, Mcc, le moment d'inertie par rapport à l'axe IF est $= Maa\cos\alpha^2 + Mbb\cos\beta^2 + Mcc\cos\gamma^2$. Où il faut remarquer que $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$, puisque $\cos\alpha = \cos\eta\cos\theta$, $\cos\beta = \sin\eta\cos\theta$ & $\cos\gamma = \sin\theta$. Donc, si Maa est le plus grand, Mcc le plus petit, & Mbb le moyen moment principal; le moment d'inertie par rapport à l'axe IF sera $= Maa - M(aa-bb)\cos\beta^2 - M(aa-cc)\cos\gamma^2$, & partant moindre que Maa, ou $= Mcc + M(aa-cc)\cos\alpha^2 + M(aa-bb)\cos\beta^2$, & partant plus grand que Mcc.

XLVI. Ensuite, on peut aussi voir combien il s'en faut, qu'un axe quelconque IF n'ait la propriété d'un axe principal. Car, pour qu'il fût tel, il faudroit qu'il fût tant $\int SR.\ IS.\ dM = 0$, que $\int RZ.\ IS.\ dM = 0$. Or, à cause de $D = 0$. $E = 0$. $F = 0$, nous avons par le §. XXXIV.

 $\int SR$

$\int$SR. IS. $dM = (C - A \cos\eta^2 - B \sin\eta^2) \sin\theta \cos\theta$ &

$\int$RZ. IS. $dM = (B - A) \sin\eta \cos\eta \cos\theta$,

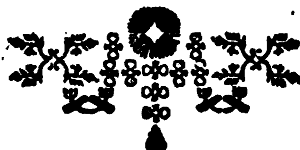
& substituant pour A, B, C, les valeurs des momens principaux,

$\int$SR. IS. $dM = M(aa \cos\eta^2 + bb \sin\eta^2 - cc)\sin\theta \cos\theta = M((aa-cc)\cos\alpha^2 + (bb-cc)\cos\beta^2) \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$

$\int$RZ. IS. $dM = M(aa - bb) \sin\eta \cos\eta \cos\theta = M(aa - bb) \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin\gamma}$

D'où l'on voit, que, si les trois momens principaux sont égaux entr'eux, ou $aa = bb = cc$, toutes les lignes IF auront la propriété des axes principaux. Mais, s'ils sont inégaux entr'eux, il n'y a que les trois axes principaux IA, IB & IC.

XLVII. Si deux momens principaux sont égaux entr'eux, savoir $M bb = M aa$, l'axe IF aura la propriété d'un axe principal, pourvu qu'il y ait $\cos\gamma = 0$ ou $\theta = 0$. Dans le cas donc que les momens d'inertie des deux axes principaux IA & IB sont égaux entr'eux, toute ligne IE tirée du centre d'inertie I dans le plan AIB aura la propriété d'un axe principal; & à cause de $\cos\gamma = 0$ & $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1$, le moment d'inertie par rapport à toutes les lignes IE sera $= M aa = M bb$. Il en est de même si deux autres momens d'inertie principaux sont égaux entr'eux; & toute autre ligne tirée de I dans le plan de ces deux axes principaux aura le même moment d'inertie, & la propriété d'un axe principal. Il y a donc dans ces cas une infinité d'axes principaux. Or, dans le cas où tous les trois moments d'inertie principaux sont égaux entr'eux, toutes les lignes tirées du centre d'inertie seront des axes principaux.





DU MOUVEMENT DE ROTATION DES CORPS SOLIDES AUTOUR D'UN AXE VARIABLE.

PAR M. EULER.

I.

Table II. Le ſujet que je me propoſe de traiter ici, eſt de la derniere importance dans la Mécanique; & j'ai déjà fait pluſieurs efforts pour le mettre dans tout ſon jour. Mais, quoique le calcul ait aſſès bien réuſſi, & que j'aye découvert des formules analytiques qui déterminent tous les changemens dont le mouvement d'un corps autour d'un axe variable eſt ſusceptible, leur application étoit pourtant aſſujettie à des difficultés qui m'ont paru preſque tout à fait inſurmontables. Or, depuis que j'ai dévelopé les principes de la connoiſſance mécanique des corps, la belle propriété des trois axes principaux dont chaque corps eſt doué, m'a enfin mis en état de vaincre toutes ces difficultés, & d'établir les regles ſur lesquelles eſt fondé le mouvement de rotation autour d'un axe variable, en ſorte qu'on en peut faire aiſément l'application à tous les cas propoſés.

II. Or, d'abord il faut ſe rappeller, que quel que ſoit le mouvement d'un corps ſolide, on le peut toujours décompoſer en deux, dont l'un eſt le mouvement progreſſif, ou celui de ſon centre d'inertie, & l'autre eſt le mouvement de rotation qui reſteroit au corps, ſi on lui ôtoit le mouvement progreſſif, en ſuppoſant que l'eſpace fut transporté à chaque inſtant d'un mouvement égal & contraire. Il eſt démontré dans la Mécanique, que chacun de ces deux mouvemens ſuit des

des regles particulieres, & qu'on peut déterminer chacun à part, ſans avoir égard à l'autre. Ainſi, pour déterminer le mouvement progreſſif, on conçoit la maſſe entiere du corps comme réunie dans ſon centre d'inertie, & on cherche l'effet des forces qui y agiſſent, conformément aux premiers principes de la Mécanique, ſans ſe mettre en peine ſi le corps a outre cela un mouvement de rotation, ou non? Et quand il s'agit du mouvement de rotation, il eſt permis de faire abſtraction du mouvement progreſſif. C'eſt la grande propriété du centre d'inertie, qui nous procure cette commodité dans les recherches mécaniques.

III. Je m'arrêterai ici uniquement au mouvement de rotation, & partant je conſidérerai le centre d'inertie du corps comme fixe. Alors il eſt aiſé de voir, que, quel que ſoit le mouvement du corps, il s'y trouvera à chaque inſtant une ligne droite, qui paſſe par le centre d'inertie, où le mouvement évanouït, & autour de laquelle le corps tourne à cet inſtant; c'eſt cette ligne qui eſt nommée l'axe de rotation. Donc, pour avoir une connoiſſance parfaite d'un tel mouvement, il faut qu'on puiſſe aſſigner pour chaque inſtant, tant l'axe de rotation autour duquel le corps tourne alors, que la viteſſe avec laquelle il tourne. Par conſéquent un tel mouvement eſt ſuſceptible d'un double changement, l'un dans la viteſſe de rotation, & l'autre dans la poſition de l'axe même de rotation. C'eſt donc auſſi à ce double changement que ſe réduit l'effet de toutes les forces, qui agiſſent ſur le corps. Lorſque l'axe de rotation demeure invariable, de ſorte que les forces exercent leur effet ſeulement ſur la viteſſe de rotation, les regles ſont déjà aſſez connues pour déterminer ce mouvement. Mais il n'en eſt pas de même à l'égard de la variabilité de l'axe de rotation.

IV. Tout revient donc à découvrir des regles, moyennant lesquelles on puiſſe aſſigner ces deux changemens pour un tems infiniment petit, le corps ayant un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque, & étant ſollicité par des forces quelconques. La recherche & l'explication de ces régles ſera donc le ſujet de ce Mémoire. Or le plus ſûr

 moyen

moyen de trouver ces régles eſt de regarder l'un & l'autre de ces deux changemens comme connu, & de chercher les forces requiſes pour les produire. Car, ayant réſolu cette queſtion en général, il ſera aiſé de renverſer la concluſion, & d'aſſigner les changemens que des forces données doivent produire. Voilà donc le plan de la méthode que je ſuivrai pour arriver au but propoſé; où il eſt clair, que tous les raiſonnemens ſeront tirés des premiers principes de la Mécanique, qui déterminent les accélérations élémentaires que des forces quelconques doivent produire dans les élémens de la matiere, dont le corps eſt composé.

Fig. 1. V. Soit donc propoſé un corps quelconque, dont la maſſe $= M$, & ſon centre d'inertie en I, que je conſidere comme fixe. Que ce corps tourne à l'inſtant préſent autour d'un axe de rotation quelconque IO, paſſant par ſon centre d'inertie I; & que la viteſſe angulaire ſoit $= \varepsilon$, de ſorte que ε marque l'angle décrit par cette viteſſe dans le tems d'une ſeconde, le ſinus total étant exprimé par l'unité. De là on connoitra aiſément la vraye viteſſe de chaque élément du corps. Car, poſant ſa diſtance à l'axe de rotation $= r$, l'expreſſion εr donnera l'eſpace décrit par cette viteſſe dans une ſeconde, puisque ε marque un nombre abſolu. Mais, pour remener ce mouvement aux principes de Mécanique, il faut le rapporter à des directions fixes indépendantes du corps; qui ſoient les droites IA, IB, IC, perpendiculaires entr'elles au centre d'inertie I, & que le mouvement de rotation ſe faſſe dans le ſens ABC. Pour rapporter l'axe de rotation IO à ces directions fixes, poſons les angles dont il y eſt incliné,

$$AIO = \alpha, \quad BIO = \beta, \quad CIO = \gamma$$

& puisque les angles AIB, AIC, BIC ſont droits, on aura:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

VI. Suppoſons de plus que ce mouvement ne ſoit pas uniforme, & que l'axe de rotation IO ne demeure pas le même, mais qu'après le tems infiniment petit dt, la viteſſe angulaire ε acquierre un accroiſſe-

ment

ment $= d\nu$; & que la situation de l'axe de rotation IO change en sorte que les angles α, β, γ, soient augmentés de leurs différentiels $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, qui auront pourtant un tel rapport entr'eux qu'il devienne $d\alpha \sin\alpha \cos\alpha + d\beta \sin\beta \cos\beta + d\gamma \sin\gamma \cos\gamma = 0$. Il faut remarquer que dt signifie l'élément du tems t écoulé jusqu'à present; & j'arrangerai le calcul en sorte que le tems t soit exprimé en secondes, & partant par un nombre absolu. Voilà donc non seulement l'état du mouvement, où je suppose que le corps se trouve actuellement, qui est renfermé dans les quantités α, β, γ, & ν; mais je tiendrai aussi compte de la variabilité de ces quantités pendant le tems infiniment petit dt, puisque les fractions $\frac{d\nu}{dt}$ & $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ contiennent tant le changement de la vitesse angulaire, que le changement qui se fait dans la position de l'axe de rotation.

VII. Ayant établi ces changemens élémentaires, tant à l'égard de la vitesse angulaire que de l'axe de rotation, cherchons les forces qui sont requises pour produire précisément ces mêmes changemens. Pour cet effet il faut considérer un élément quelconque du corps, & chercher la direction & la vitesse dont il se meut à présent: ensuite, tenant compte de la variabilité de la vitesse & de l'axe de rotation, il sera aisé d'en conclurre le changement élémentaire que doit subir le mouvement de l'élément proposé, tant par rapport à sa vitesse qu'à sa direction. De là on connoitra les forces requises pour produire ce changement, & l'assemblage de toutes ces forces élémentaires fournira les forces finies que nous cherchons. Or, pour faciliter cette recherche, il sera bon de décomposer le mouvement de chaque élément du corps selon les trois directions fixes, IA, IB, & IC, puisqu'il est démontré que chacun de ces mouvemens partiaux suit, par rapport à l'accélération, les mêmes loix, que s'il existoit tout seul, & qu'il ne fût pas accompagné des autres. C'est conformément à ce plan que je déterminerai les forces dont il est question.

VIII. Soit donc en Z un élément quelconque du corps, dont la masse soit posée $= dM$. Tirons du point Z au plan AIB la perpendiculaire ZY, & de Y à la directrice IA la perpendiculaire YX, pour avoir les trois coordonnées paralleles aux trois directrices fixes IA, IB, IC, que nous nommerons

$$IX = x, \quad XY = y, \quad \& \quad YZ = z.$$

Maintenant, pour connoitre le mouvement de cet élément, il faut tirer de Z à l'axe de rotation IO la perpendiculaire ZP, & alors la vitesse du point Z sera $= \varepsilon . ZP$. Or, pour connoitre la direction de ce mouvement, qu'on conçoive un plan perpendiculaire à l'axe de rotation au point P, & la perpendiculaire tirée dans ce plan à la droite ZP au point Z, qui tende dans le sens ABC, donnera la direction du mouvement. Ensuite, ce mouvement doit être décomposé selon les directions Za, Zb, Zc, que je suppose paralleles aux directions fixes IA, IB, IC.

IX. Cette décomposition du mouvement du point Z demanderoit bien des lignes à tirer, qui embrouilleroient beaucoup la figure & fatigueroient l'imagination. Pour prévenir cet inconvénient, je réduirai cette recherche à la Trigonométrie sphérique. Soient donc dans une surface sphérique, décrite autour du centre d'inertie I, les points A, B, C, les poles des directions fixes IA, IB, IC, de sorte que les arcs de grands cercles AB, BC, CA, soient des quarts de cercles perpendiculaires entr'eux. Soit de plus O le point, où l'axe de rotation IO passe par la surface sphérique; & on aura les arcs $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$. Soit outre cela Z le point où la droite IZ de la fig. 1. passe par la surface sphérique, & posant cette distance $IZ = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = s$, on aura pour les arcs de grands cercles, Fig. 2.

$$\cos AZ = \frac{x}{s}, \quad \cos BZ = \frac{y}{s}; \quad \cos CZ = \frac{z}{s}.$$

Or, puisque dans la fig. 1. la perpendiculaire ZP est $= s \sin ZIO$,

& que

& que l'arc OZ fig. 2. eſt la meſure de l'angle ZIO, on aura la viteſſe du point Z $=$ *us* ſin OZ.

X. Tirons l'arc ZR perpendiculaire à l'arc OZ, & prenons-le égal à un quart de cercle, en ſorte qu'il tende dans le ſens ABC; & ſa tangente en Z donnera la direction du mouvement du point Z, à laquelle le rayon IR ſera parallele, quoique le centre I ne ſoit pas exprimé dans la figure. Maintenant, pour décompoſer le mouvement ſelon les directions Z*a*, Z*b*, Z*c*, fig. 1. on n'a qu'à décompoſer un mouvement qui ſe feroit dans la direction IR avec la viteſſe $=$ *us* ſin OZ, ſelon les trois directions IA, IB, IC, puiſque ces directions ſont paralleles à celles-là. Pour cet effet, tirons les arcs de grands cercles AR, BR, CR, & par les regles de la compoſition du mouvement, nous aurons pour le point Z,

la viteſſe ſuivant la direction IA, ou Z*a* $=$ *us* ſin OZ. coſ AR,

la viteſſe ſuivant la direction IB, ou Z*b* $=$ *us* ſin OZ. coſ BR,

la viteſſe ſuivant la direction IC, ou Z*c* $=$ *us* ſin O Z. coſ CR.

XI. Pour exprimer analytiquement ces formules, il faut obſerver que, puiſque R eſt le pole du cercle OZ, l'arc RO ſera un quart de cercle, & l'angle ROZ droit. Donc, le triangle AOR fournit cette détermination:

coſ AR $=$ ſin AO. coſ AOR $=$ $-$ ſin AO. ſin AOZ,

parce que cſ AOR $=$ cſ(360°-AOR) $=$ cſ(ROZ+AOZ) $=$ -ſn AOZ.
De là on aura ſin OZ. coſ AR $=$ $-$ ſin AO. ſin OZ. ſin AOZ.
Mais, du triangle AOZ on tire ſin OZ. ſin AOZ $=$ ſin AZ. ſin OAZ, de ſorte que ſin OZ. coſ AR $=$ $-$ ſin AO. ſin AZ. ſin OAZ.

Or, ayant OAZ $=$ BAO $-$ BAZ, les triangles BAO, BAZ, & CAO, CAZ, où AB, AC ſont des quarts de cercles, & BAC un angle droit, donnent

coſ B

$$\cos BAO = \frac{\cos BO}{\sin AO} = \frac{\cos\beta}{\sin AO};\ \sin BAO = \cos CAO = \frac{\cos CO}{\sin AO} = \frac{\cos\gamma}{\sin AO}$$

$$\cos BAZ = \frac{\cos BZ}{\sin AZ} = \frac{y}{s \sin AZ};\ \sin BAZ = \cos CAZ = \frac{\cos CZ}{\sin AZ} = \frac{z}{s \sin AZ}$$

& partant $\sin OAZ = \frac{y \cos\gamma - z \cos\beta}{s \sin AO. \sin AZ}$: donc

$$\sin OZ \cos AR = \frac{z \cos\beta - y \cos\gamma}{s}.$$

XII. Par une semblable réduction on trouvera

$$\sin OZ. \cos BR = \frac{x \cos\gamma - z \cos\alpha}{s} \ \&\ \sin OZ. \cos CR = \frac{y \cos\alpha - x \cos\beta}{s},$$

& partant les trois vitesses du point Z selon les directions Za, Zb, Zc, seront exprimées de la sorte.

Fig. 1. La vitesse suivant la direction $Za = \varepsilon\ (z \cos\beta - y \cos\gamma) = u$

La vitesse suivant la direction $Zb = \varepsilon\ (x \cos\gamma - z \cos\alpha) = v$

La vitesse suivant la direction $Zc = \varepsilon\ (y \cos\alpha - x \cos\beta) = w$

que j'indiquerai pour abréger par les lettres u, v, w. Pour en trouver les accroissemens qu'elles prendront dans l'élément du tems dt, il faut remarquer que, non seulement les quantités ε, α, β, γ, croissent de leurs différentiels, mais qu'il faut aussi avoir égard à la variabilité des coordonnées x, y, z, dont les différentiels seront les espaces parcourus dans le tems dt par les vitesses u, v, w, qui conviennent aux mêmes directions. Et partant on aura

$$dx = u\, dt = \varepsilon\, dt\ (z \cos\beta - y \cos\gamma)$$
$$dy = v\, dt = \varepsilon\, dt\ (x \cos\gamma - z \cos\alpha)$$
$$dz = w\, dt = \varepsilon\, dt\ (y \cos\alpha - x \cos\beta)$$

XIII. Ce-

XIII. Cela remarqué, nous aurons les différentiels suivans de nos trois vitesses u, v, w;

$$du = zd.\, u\cos\beta - yd.\, u\cos\gamma + u.dt\,(w\cos\beta - v\cos\gamma)$$

& en substituant pour w & v leurs valeurs, nous trouverons tant du, que dv & dw exprimés en sorte

$$du = zd.\, u\cos\beta - yd.\, u\cos\gamma + uudt\,(y\cos\alpha\, c\beta + z\cos\alpha\, c\gamma - x\sin\alpha^2)$$

$$dv = xd.\, u\cos\gamma - zd.\, u\cos\alpha + uudt\,(z\cos\beta\, c\gamma + x\cos\beta\, c\alpha - y\sin\beta^2)$$

$$dw = yd.\, u\cos\alpha - xd.\, u\cos\beta + uudt\,(x\cos\gamma\, c\alpha + y\cos\gamma\, c\beta - z\sin\gamma^2)$$

puisque $\sin\alpha^2 = \cos\beta^2 + c\gamma^2$; $\sin\beta^2 = \cos\alpha^2 + c\gamma^2$; $\sin\gamma^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2$.

Maintenant il faut chercher les forces qui doivent agir sur l'élément du corps en Z, suivant les directions Za, Zb, Zc, pour qu'elles y produisent précisément ces accélérations que nous venons de trouver, pour en conclurre ensuite, par la voye d'intégration, les forces totales dont le corps doit être sollicité, afin que les changemens supposés y soient produits.

XIV. Or, si un corps dont la masse $= m$ se meut sur une ligne droite avec la vitesse v, étant sollicité suivant la même direction par une force $= p$, on sait que l'incrément de la vitesse dv produit dans l'élément du tems dt est proportionnel à la formule $\frac{pdt}{m}$. Mais, pour réduire le calcul à des mesures absolües, si l'on exprime la masse m par le poids que le corps auroit sur la terre, la force p par un poids qui lui soit égal, le tems t en secondes, & la vitesse v par l'espace parcouru dans une seconde; il faut introduire la hauteur g, par laquelle un corps grave tombe dans une seconde à l'endroit où l'on aura estimé le poids du corps. Alors la formule $dv = \frac{2gpdt}{m}$ conduira aux justes mesures. Donc, sachant l'accroissement de la vitesse dv engendré dans le tems dt, avec la masse du corps m, la force requise

 pour

pour produire cette accélération sera: $p = \frac{m\, dv}{2 g\, dt}$ agissant selon la direction du mouvement. Cette maniere d'ajuster le calcul à des mesures absolues différe de celle dont je me suis servi autrefois; mais elle est beaucoup plus commode.

XV. Donc, pour imprimer à l'élément du corps en Z, dont la masse $= dM$, les trois accélérations trouvées selon les directions Za, Zb, Zc, il faut qu'il soit sollicité selon les mêmes directions par ces forces élémentaires.

$$\text{Suivant } Za \text{ par la force } = \frac{dM}{2 g\, dt} \cdot du$$

$$\text{Suivant } Zb \text{ par la force } = \frac{dM}{2 g\, dt} \cdot dv$$

$$\text{Suivant } Zc \text{ par la force } = \frac{dM}{2 g\, dt} \cdot dw$$

Il s'agit à present d'assembler toutes ces forces élémentaires par toute l'étendue du corps; où il est clair qu'il faut uniquement avoir égard à la variabilité du point Z avec l'élément de matiere dM qui s'y trouve, puisque nous cherchons les forces qui doivent agir dans l'instant présent, sans avoir égard à leur variabilité dans la suite. Nous n'aurons donc d'autres variables que les trois coordonnées x, y, z, & les lettres α, β, γ, δ, avec leurs différentiels seront traitées comme constantes.

XVI. Puisque nous ne regardons ici qu'à l'instant présent, rien n'empêche d'établir en sorte les trois directions fixes, IA, IB, IC, de façon qu'elles conviennent avec les axes principaux du corps; & c'est cette considération qui nous met en état de surmonter les difficultés que j'avois rencontrées en suivant d'autres méthodes. On pourroit objecter, que les variations des angles α, β, γ, étant rapportées aux directions fixes, ne sauroient être tirées de leur rélation aux axes principaux, qui s'écartent des directions fixes dès le premier instant. Mais,

Mais, puisque les axes principaux tournent avec le corps autour de l'axe de rotation IO, ils en conservent les mêmes distances que les directions fixes, de sorte que, si l'axe de rotation demeuroit fixe, les angles α, β, γ; seroient constans à l'un & l'autre égard. Et si l'axe de rotation IO varie, il variera précisément autant à l'égard des axes principaux du corps que des directions fixes. Par cette raison il sera permis de supposer que les axes principaux du corps conviennent à l'instant présent avec les trois directions fixes IA, IB, IC.

XVII. Cette supposition nous procure ce grand avantage, que nous pourrons intégrer fort aisément les formules différentielles dont nous avons besoin. Car, d'abord la nature du centre d'inertie I nous fournit ces intégrales

$$\int x\,dM = 0, \quad \int y\,dM = 0, \quad \& \int z\,dM = 0.$$

Ensuite la propriété des axes principaux donne:

$$\int xy\,dM = 0; \quad \int xz\,dM = 0; \quad \& \int yz\,dM = 0.$$

Outre cela, si nous introduisons les momens d'inertie principaux du corps, & que nous posions

le moment d'inertie par rapport à l'axe IA $= Maa$
le moment d'inertie par rapport à l'axe IB $= Mbb$
le moment d'inertie par rapport à l'axe IC $= Mcc$,

nous aurons encore ces intégrales,

$$\int xx\,dM = \tfrac{1}{2}M(bb+cc-aa); \int yy\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa+cc-bb); \int zz\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa+bb-cc)$$

XVIII. Maintenant il est évident, puisque les formules trouvées pour les différentiels du, dv, dw, ne contiennent que les premieres dimensions des coordonnées x, y, z, qui sont les seules variables que nous ayons à considérer, que les intégrales des forces élémentaires évanouiront; de sorte que

$$\int \frac{du\,dM}{2g\,dt} = 0; \quad \int \frac{dv\,dM}{2g\,dt} = 0; \quad \int \frac{dw\,dM}{2g\,dt} = 0.$$

 Cela

Cela s'entend aussi de la condition, que le centre d'inertie I demeure en repos; car, s'il y avoit des forces finies qui agissoient sur le corps, elles lui imprimeroient un mouvement progressif, dont je fais ici abstraction. Mais, puisqu'il s'agit ici uniquement du mouvement de rotation, il faut avoir égard, non tant aux forces sollicitantes elles-mêmes, qui évanouissent, comme nous venons de le voir, qu'à leurs momens. Par cette raison, nous obtiendrons les forces requises pour produire les changemens supposés dans le mouvement du corps, quand nous intégrerons les momens des forces élémentaires par rapport aux trois axes principaux du corps.

XIX. Or les forces élémentaires trouvées au §. XV. donnent par rapport aux axes principaux les momens suivans;

Le moment de forces par rapport à l'axe IA,

$$\frac{dM}{2g\,dt}(y\,dw - z\,dv) \text{ dans le sens BC.}$$

Le moment de forces par rapport à l'axe IB,

$$\frac{dM}{2g\,dt}(z\,du - x\,dw) \text{ dans le sens CA.}$$

Le moment de forces par rapport à l'axe IC,

$$\frac{2g\,dt}{dM}(x\,dv - y\,du) \text{ dans le sens AB.}$$

Il faut à présent substituer au lieu des différentiels du, dv, dw, leurs valeurs trouvées dans le §. XII. & ensuite chercher les intégrales de ces formules. pour avoir les momens entiers des forces par rapport aux trois axes principaux du corps.

XX. Faisons ces opérations pour le premier moment élémentaire, par rapport à l'axe principal IA, puisqu'il sera aisé d'en conclure les deux autres par la seule analogie. Or l'expression $y\,dw - z\,dv$ se changera par la substitution en celle ici:

$$(yy + zz)\, d.\, \vartheta \cos\alpha - yz\, d.\, \vartheta \cos\beta - xz\, d.\, \vartheta \cos\gamma$$

$$+ \vartheta\vartheta dt\, (xy \cos\alpha \cos\gamma - xy \cos\alpha \cos\beta + (yy - zz) \cos\beta\, \mathrm{cs}\,\gamma + yz (\sin\beta^2 - \sin\gamma^2))$$

laquelle étant multipliée par $\frac{dM}{2g\,dt}$, & intégrée par la seule variabilité des trois coordonnées x, y, z, donnera, à cause de $\int xy\, dM = 0$, $\int xz\, dM = 0$, $\int yz\, dM = 0$, l'expression suivante,

$$\frac{d.\, \vartheta \cos\alpha}{2g\,dt} \int (yy + zz)\, dM + \frac{\vartheta\vartheta \cos\beta \cos\gamma}{2g} \int (yy - zz)\, dM.$$

Donc, en y introduisant les momens principaux d'inertie, à cause de $\int (yy + zz)\, dM = M aa$ & $\int (yy - zz)\, dM = M\,(cc - bb)$, ce moment de forces sera

$$\frac{M aa\, d.\, \vartheta \cos\alpha}{2g\,dt} + \frac{M\,(cc - bb)\; \vartheta\vartheta \cos\beta \cos\gamma}{2g}.$$

XXI. Donc, pour produire dans le mouvement du corps les changemens élémentaires supposés, tant à l'égard de la vitesse angulaire, que de la position de l'axe de rotation, si nous posons les momens de forces

par rapport à l'axe principal $IA = P$ dans le sens BC,
par rapport à l'axe principal $IB = Q$ dans le sens CA,
par rapport à l'axe principal $IC = R$ dans le sens AB,

nous aurons:

$$P = Maa.\ \frac{d.\, \vartheta \cos\alpha}{2g\,dt} + M\,(cc - bb).\ \frac{\vartheta\vartheta \cos\beta \cos\gamma}{2g}$$

$$Q = Mbb.\ \frac{d.\, \vartheta \cos\beta}{2g\,dt} + M\,(aa - cc).\ \frac{\vartheta\vartheta \cos\gamma \cos\alpha}{2g}$$

$$R = Mcc.\ \frac{d.\, \vartheta \cos\gamma}{2g\,dt} + M\,(bb - aa).\ \frac{\vartheta\vartheta \cos\alpha \cos\beta}{2g}$$

 Et

Et partant réciproquement ces trois momens de forces produiront précisément les changemens supposés.

XXII. Il faut donc des forces pour produire ces changemens, à moins que les trois valeurs trouvées pour P, Q, & R, n'évanouissent; ce qui pourra bien arriver, quoique, ni la vitesse angulaire ȣ, ni les angles α, β, γ, ne demeurent les mêmes. Mais supposons, que, tant la vitesse angulaire ȣ que la position de l'axe de rotation doive demeurer la même; & pour cet effet il faut que le corps soit sollicité par ces trois momens de forces:

$$P = M(cc-bb).\ \frac{ȣȣ \cos\beta \cos\gamma}{2g}; \quad Q = M(aa-cc)\ \frac{ȣȣ \cos\gamma \cos\alpha}{2g}.$$

$$\& \quad R = M(bb-aa).\ \frac{ȣȣ \cos\alpha \cos\beta}{2g}$$

lesquels n'évanouissent pas tous à la fois, à moins que des trois cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, deux n'évanouissent. Cela arrive si l'un des angles α, β, γ, évanouït, ou bien, si l'axe de rotation convient avec un des trois axes principaux. Or j'ai déjà fait voir, qu'un corps ne sauroit tourner librement autour d'un axe, à moins que ce ne soit un axe principal du corps: & cette même propriété m'a conduit à la connoissance des axes principaux.

XXIII. Maintenant nous sommes en état de résoudre le probleme direct, auquel cette récherche aboutit principalement, & qui est conçu en ces termes:

Un corps étant sollicité par des forces quelconques, pendant qu'il tourne autour d'un axe de rotation donné avec une vitesse angulaire donnée, déterminer les changemens élémentaires, qui seront produits tant dans la vitesse angulaire que dans la position de l'axe de rotation.

Il ne s'agit ici que d'un instant de tems, auquel je regarde la position des axes principaux comme connue, qui soient IA, IB, IC, par rapport

port auxquels les momens d'inertie du corps soient Maa, Mbb, Mcc; où M marque la masse du corps. Que le corps tourne donc à présent autour de l'axe IO, dans le sens ABC, avec la vitesse angulaire $= \varkappa$, & que la position de cet axe soit déterminée par ces angles que l'axe de rotation fait avec les axes principaux, $AIO = \alpha$, $BIO = \beta$, $CIO = \gamma$.

XXIV. Pour les forces sollicitantes, qu'on cherche leurs momens par rapport aux axes principaux du corps, qui soient

pour l'axe IA $=$ P dans le sens BC,
pour l'axe IB $=$ Q dans le sens CA,
pour l'axe IC $=$ R dans le sens AB.

Alors, pendant l'élément du tems dt, la vitesse angulaire $\varkappa$ prendra un accroissement $= d\varkappa$, & l'axe de rotation changera de situation par rapport aux axes principaux du corps, en sorte que les angles α, β, γ, seront augmentés de leurs différentiels $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$. Et ces changemens élémentaires seront déterminés par les trois équations suivantes:

$$d.\ \varkappa \operatorname{cos}\alpha + \frac{cc - bb}{aa}.\ \varkappa\varkappa\, dt \operatorname{cos}\beta \operatorname{cos}\gamma = \frac{2gP\,dt}{Maa}$$

$$d.\ \varkappa \operatorname{cos}\beta + \frac{aa - cc}{bb}.\ \varkappa\varkappa\, dt \operatorname{cos}\alpha \operatorname{cos}\gamma = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}$$

$$d.\ \varkappa \operatorname{cos}\gamma + \frac{bb - aa}{cc}.\ \varkappa\varkappa\, dt \operatorname{cos}\alpha \operatorname{cos}\beta = \frac{2gR\,dt}{Mcc}.$$

C'est donc la solution du probleme proposé.

XXV. De ces formules on peut d'abord résoudre cette question, qui seroit d'ailleurs fort difficile:

Si le corps étant en repos est sollicité par des forces quelconques, trouver l'axe IO, autour duquel le corps commencera à tourner, & la vitesse angulaire infiniment petite, qu'il recevra dans l'élément du tems dt

Ici

Ici les momens de forces P, Q, R, sont donnés; & l'on a $u = 0$. d'où il faut chercher les angles α, β, γ, avec le différentiel du. On aura donc à résoudre ces équations:

$$du \cos\alpha = \frac{2gP\,dt}{Maa}; \quad du \cos\beta = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}; \quad du \cos\gamma = \frac{2gR\,dt}{Mcc}$$

d'où nous tirons d'abord $\cos\beta = \frac{Qaa}{Pbb}\cos\alpha$ & $\cos\gamma = \frac{Raa}{Pcc}\cos\alpha$

& de là à l'aide de l'équation $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$,

$$1 = \cos\alpha^2 \left(1 + \frac{QQa^4}{PPb^4} + \frac{RRa^4}{PPc^4}\right) \text{ \& } \cos\alpha = \frac{P}{aa} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$$

& les deux autres angles β, γ, seront déterminés ainsi:

$$\cos\beta = \frac{Q}{bb} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}, \text{ \& } \cos\gamma = \frac{R}{cc} : \sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}.$$

& la vitesse élementaire $du = \frac{2g\,dt}{M}\sqrt{\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)}$.

XXVI. Les trois équations générales que nous venons de trouver, peuvent être transformées en plusieurs formes. Ainsi, si nous multiplions la premiere par $\cos\alpha$, la seconde par $\cos\beta$, la troisieme par $\cos\gamma$, leur somme donnera:

$$du + \left(\frac{cc-bb}{aa} + \frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc}\right) uu\,dt \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{2g\,dt}{M}\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

où $\frac{cc-bb}{aa} + \frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc} = -\frac{(cc-bb)(aa-cc)(bb-aa)}{aa\,bb\,cc}$

d'où l'on voit que, si deux des momens principaux sont égaux entr'eux, le second terme s'en va toujours; & alors, s'il n'y a point de forces solli-

sollicitantes, la vitesse angulaire ne change point. On voit aussi, que, si le corps tourne autour d'un axe principal IA, de sorte que $\alpha = 0$, $\beta = 90°$, $\gamma = 90°$, & que les forces sollicitantes ne donnent qu'un moment P par rapport au même axe, de sorte que $Q = 0$, & $R = 0$,

on aura $d\varkappa = \frac{2gP\,dt}{Maa}$; & outre cela $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$:

ou bien, l'axe de rotation ne sera point changé; & l'effet de la force P sera employé à accélérer le mouvement de rotation. Or c'est précisément la formule connue depuis longtems.

XXVII. Mais, si l'on veut déterminer le mouvement de rotation tout entier d'un corps sollicité par des forces quelconques, il faut avoir égard aux changemens continuels des axes principaux du corps, & y rapporter à chaque instant l'axe de rotation, & les momens des forces sollicitantes. Donc, la position des axes principaux étant variable, il les faut rapporter à des directions fixes du Monde. Pour cet effet je considere une sphere fixe, décrite autour du centre d'inertie du corps, qui soit représentée dans la fig. 3. où PQSR est un cercle fixe, & P un point fixe. Qu'après le tems $= t$ sec. les axes principaux du corps répondent aux points A, B, C, d'où ayant tiré au point P les arcs de grands cercles AP, BP, & CP, soient ces arcs $AP = l$, $BP = m$, $CP = n$, & les angles $QPA = \lambda$. $QPB = \mu$, $QPC = \nu$. De là on a d'abord Fig. 3.

$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. ensuite $\cos(\mu - \lambda) = -\frac{\cos l \cos m}{\sin l \sin m}$,

$$\cos(\nu - \lambda) = -\frac{\cos l \cos n}{\sin l \sin n}, \quad \& \cos(\mu - \nu) = -\frac{\cos m \cos n}{\sin m \sin n}.$$

XXVIII. Que le corps tourne à présent autour de l'axe IO, avec la vitesse angulaire $= \varkappa$, dans le sens ABC; & pour la position du point O soient les arcs de grands cercles $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$, & comme les trois coordonnées de ci-dessus n'entrent plus en considé-

ration, posons pour abréger nos formules: $\mathfrak{v}\cos\alpha = x$, $\mathfrak{v}\cos\beta = y$, & $\mathfrak{v}\cos\gamma = z$; & nous aurons $\mathfrak{v}\mathfrak{v} = xx + yy + zz$. Ensuite, cherchons les momens des forces sollicitantes par rapport aux axes principaux, IA, IB, IC, du corps, qui soient P, Q, R, dans les sens BC, CA, & AB. Cela posé, nos équations pour déterminer les variables x, y, z, seront:

$$dx + \frac{cc - bb}{aa} . yz\,dt = \frac{2g\mathrm{P}\,dt}{\mathrm{M}aa}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{bb} . xz\,dt = \frac{2g\mathrm{Q}\,dt}{\mathrm{M}bb}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc} . xy\,dt = \frac{2g\mathrm{R}\,dt}{\mathrm{M}cc}$$

& ayant trouvé ces quantités x, y, z, on aura les angles α, β, γ, par les formules $\cos\alpha = \frac{x}{\mathfrak{v}}$; $\cos\beta = \frac{y}{\mathfrak{v}}$; $\cos\gamma = \frac{z}{\mathfrak{v}}$.

XXIX. Mais il faut aussi considérer qu'à cause du mouvement de rotation les points A, B, C, & partant les arcs l, m, n, & les angles λ, μ, ν, sont variables. Le point A tournera autour du point O avec la vitesse $= \mathfrak{v}\sin \mathrm{OA} = \mathfrak{v}\sin\alpha$, dans le sens BC; & partant, dans le tems dt, le point A décrira le petit arc $\mathrm{A}a = \mathfrak{v}\,dt\sin\alpha$, perpendiculaire à l'arc OA. Donc, tirant $a\alpha$ perpendiculaire à l'arc PA, nous aurons $dl = -\mathrm{A}\alpha$, & $d\lambda = -\frac{a\alpha}{\sin l}$; mais, à cause de l'angle $\mathrm{OA}a$ droit, on trouve $\mathrm{A}\alpha = \mathfrak{v}\,dt\sin\alpha . \sin \mathrm{OAP}$, & $a\alpha = \mathfrak{v}\,dt\sin\alpha . \cos \mathrm{OAP}$. Or le triangle BAP fournit: $\cos \mathrm{BAP} = \frac{\cos m}{\sin l}$, & le triangle CAP donne $\cos \mathrm{CAP} =$

— sin

$-\sin BAP = \frac{\cos n}{\sin l}$; ou, $\sin BAP = \frac{-\cos n}{\sin l}$. De la même maniere les triangles BAO & CAO donnent:

$$\cos BAO = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha};\quad \cos CAO = \sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$

D'où, puisque l'angle $OAP = BAP + BAO$, il s'ensuit

$$\sin OAP = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin\alpha\ \sin l}\ \&\ \cos OAP = \frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin\alpha\ \sin l}$$

XXX. Substituons ces valeurs, & nous aurons

$$dl = \frac{-u\,dt\,(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n)}{\sin l}\ \&\ d\lambda = \frac{-u\,dt\,(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)}{\sin l^2}$$

où, si nous mettons au lieu de $u\cos\beta$, $u\cos\gamma$, les valeurs y & z, nous obtiendrons les six équations qu'il faut encore joindre aux trois que nous avons déjà trouvées ci dessus §. 28.

$$dl\sin l = dt\,(y\cos n - z\cos m);\quad d\lambda\sin l^2 = -dt\,(y\cos m + z\cos n)$$

$$dm\sin m = dt\,(z\cos l - x\cos n);\quad d\mu\sin m^2 = -dt\,(z\cos n + x\cos l)$$

$$dn\sin n = dt\,(x\cos m - y\cos l);\quad d\nu\sin n^2 = -dt\,(x\cos l + y\cos m)$$

Voilà donc neuf équations, dans lesquelles est renfermée la solution de tous les problêmes, où il s'agit du mouvement de rotation de quelque corps solide. Or il faut remarquer, qu'à cause de la rélation entre les quantités l, m, n, & λ, μ, ν, il suffit de prendre trois des six dernieres, savoir deux du premier rang, & une de l'autre.

XXXI. Il est bon de remarquer encore quelques belles rélations entre les arcs & angles l, m, n, & λ, μ, ν. J'ai déjà exprimé les cosinus de la différence entre deux de ces angles; mais on en peut aussi aisément donner leurs sinus. Car, du triangle APB on tire

 sin

$\sin(\mu - \lambda) : 1 = \sin BAP : \sin m$ or $\sin BAP = \frac{-\cos n}{\sin l}$; & partant

$\sin(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m}$. Voilà donc les rélations suivantes

$$\sin(\mu-\lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m};\ \sin(\nu-\mu) = \frac{-\cos l}{\sin m \sin n};\ \sin(\lambda-\nu) = \frac{-\cos m}{\sin l \sin n}$$

$$\cos(\mu-\lambda) = \frac{-\cos l \,\mathrm{cs}\, m}{\sin l \sin m};\ \cos(\nu-\mu) = \frac{-\cos m \,\mathrm{cs}\, n}{\sin m \sin n};\ \mathrm{cs}(\lambda-\nu) = \frac{-\cos l \,\mathrm{cs}\, n}{\sin l \sin n}$$

De là nous pouvons déduire celles-ci:

$$\sin\mu = \frac{-\sin\lambda \cos l \,\mathrm{cs}\, m - \mathrm{cs}\lambda \,\mathrm{cs}\, n}{\sin l \sin m};\ \cos\mu = \frac{-\cos\lambda \,\mathrm{cs}\, l \,\mathrm{cs}\, m + \sin\lambda \,\mathrm{cs}\, n}{\sin l \sin m}$$

$$\sin\nu = \frac{-\sin\lambda \cos l \,\mathrm{cs}\, n + \cos\lambda \,\mathrm{cs}\, m}{\sin l \sin n};\ \cos\nu = \frac{-\cos\lambda \,\mathrm{cs}\, l \,\mathrm{cs}\, n - \sin\lambda \,\mathrm{cs}\, m}{\sin l \sin n}.$$

XXXII. En comparant cette méthode de déterminer le mouvement de rotation avec les essais que j'ai proposés autrefois, on y remarquera d'abord des avantages très réels, surtout à l'égard de l'application à tous les cas qu'on veut examiner. Et quand on rencontrera encore des difficultés, à cause de la multitude des variables, ce n'est plus dans la Mécanique qu'il faut chercher les moyens de les surmonter, puisqu'il semble que la nature d'un tel mouvement n'est pas susceptible d'un calcul plus simple. Tout dépendra à présent de l'adresse du calculateur, qui doit puiser dans l'Analyse les secours nécessaires pour résoudre les équations qui renferment la détermination du mouvement: mais il n'est pas douteux, qu'il n'y ait une infinité de cas qui soient absolument irrésolubles à cause des bornes de l'Analyse. Pour donner un exemple de l'application de cette méthode, soit proposé le probleme suivant.

Un

Un corps solide n'étant sollicité par aucune force, s'il a reçu un mouvement de rotation quelconque autour d'un axe différent de ses axes principaux, déterminer la continuation de son mouvement.

XXXIII. Ayant donc $P = o$, $Q = o$, & $R = o$, nous aurons à résoudre les équations suivantes:

$$\text{I.}\quad dx + \frac{cc-bb}{aa}\, yzdt = o$$

$$\text{II.}\quad dy + \frac{aa-cc}{bb}\, xzdt = o$$

$$\text{III.}\quad dz + \frac{bb-aa}{cc}\, xydt = o$$

IV. $dl \sin l = dt(y \cos n - z \,\mathrm{cs}\, m)$; VII. $d\lambda \sin l^2 = -dt(y \,\mathrm{cs}\, m + z \,\mathrm{cs}\, n)$

V. $dm \sin m = dt(z \cos l - x \,\mathrm{cs}\, n)$; VIII. $d\mu \sin m^2 = -dt(z \,\mathrm{cs}\, n + x \,\mathrm{cs}\, l)$

VI. $dn \sin n = dt(x \,\mathrm{cs}\, m - y \,\mathrm{cs}\, l)$; IX. $d\nu \sin n^2 = -dt(x \,\mathrm{cs}\, l + y \,\mathrm{cs}\, m)$

Des trois premieres nous tirons d'abord:

$$\frac{aaxdx}{bb-cc} = \frac{bbydy}{cc-aa} = \frac{cczdz}{aa-bb} = xyzdt$$

Donc, posant $xyzdt = du$, & pour abréger,

$$\frac{bb-cc}{aa} = A;\quad \frac{cc-aa}{bb} = B;\quad \frac{aa-bb}{cc} = C,$$

nous trouverons en intégrant,

$$xx = 2Au + \mathfrak{A};\quad yy = 2Bu + \mathfrak{B};\quad zz = 2Cu + \mathfrak{C},$$

& de là $\quad dt = \dfrac{du}{\sqrt{(2Au+\mathfrak{A})(2Bu+\mathfrak{B})(2Cu+\mathfrak{C})}}$

 XXXIV.

XXXIV. Par rapport aux lettres A, B, C, il faut remarquer que $Aaa + Bbb + Ccc = 0$, & $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$. De là il eſt évident que $aaxx + bbyy + cczz$ ſera égal à une quantité conſtante $\mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc$. Or cette expreſſion ſe réduit à celle-ci $uu(aa \cos\alpha^2 + bb \cos\beta^2 + cc \cos\gamma^2)$, où la formule $aa \cos\alpha^2 + bb \cos\beta^2 + cc \cos\gamma^2$ étant multipliée par la maſſe du corps M, exprime le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation IO, autour duquel le corps tourne à préſent. Donc, poſant ce moment d'inertie $= Mrr$, la quantité $Mrr\,uu$, qui exprime ce qu'on nomme la force vive du corps, demeure invariable, ou bien le corps conſervera toujours la même force vive. Puisque dans le mouvement progreſſif, s'il n'y a point de forces ſollicitantes, le corps conſerve toujours la même viteſſe, il s'enſuit, quelque mouvement qu'on imprime à un corps, qu'il conſervera toujours la même force vive.

XXXV. La derniere équation différentielle trouvée §. XXXIII ſert à déterminer pour tout tems t la variable u, et de là on définira les quantités

$$x = \sqrt{(2Au + \mathfrak{A})};\ y = \sqrt{(2Bu + \mathfrak{B})};\ z = \sqrt{(2Cu + \mathfrak{C})}$$

D'où la viteſſe angulaire dont le corps tourne à préſent, ſera

$$u = \sqrt{(2(A + B + C)u + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$$

Or pour la poſition de l'axe de rotation IO à l'égard des axes principaux du corps, laquelle eſt déterminée par les angles α, β, γ, on aura

$$\cos\alpha = \frac{x}{u};\ \cos\beta = \frac{y}{u};\ \cos\gamma = \frac{z}{u}.$$

Mais nous ne ſavons pas encore la poſition des axes principaux du corps pour l'inſtant préſent, qu'il faut chercher par la réſolution des ſix autres équations, les trois premieres étant deja parfaitement réſolues.

XXXVI. Pour faciliter cette recherche, il eſt bon d'obſerver que les trois premieres équations y peuvent beaucoup contribuer. Car, ſi nous

si nous multiplions la premiere par aa cos l, la seconde par bb cos m, et la troisieme par cc cos n, nous obtiendrons cette somme:

$$0 = aadx \cos l + bbdy \cos m + ccdz \cos n + ccyzdt \cos l - bbyzdt \cos l + aaxzdt \cos m - ccxzdt \cos m + bbxydt \cos n - aaxydt \cos n$$

laquelle, par les équations IV. V. & VI. se change en cette forme:

$$0 = aadx \cos l + bbdy \cos m + ccdz \cos n - aaxdl \sin l - bbydm \sin m - ccxdn \sin n$$

qui étant intégiable donne

$$aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n = \text{Const.} = \mathfrak{D}$$

& nous avions déjà $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. Donc, si nous avions encore une seule équation intégrale entre les arcs l, m, et n, nous pourrions déterminer chacun à part. Or les équations IV. V. VI. fournissent cette équation differentielle assès simple

$$xdl \sin l + ydm \sin m + zdn \sin n = 0$$

XXXVII. Au lieu des arcs l, m, n introduisons une nouvelle variable v, en posant $x \cos l + y \cos m + z \cos n = v$, & à cause de la proprieté remarquée nous aurons:

$$dv = dx \cos l + dy \cos m + dz \cos n \text{ ou}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{A \cos l}{x} + \frac{B \cos m}{y} + \frac{C \cos n}{z}.$$

& maintenant tout revient à déterminer v par u. Pour cet effet il faut chercher les valeurs de cos l, cos m, cos n, de ces trois équations:

$$\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$$

$$aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n = \mathfrak{D}$$

$$x \cos l + y \cos m + z \cos n = v$$

dont la résolution mene enfin à cette formule irrationelle

$$\sqrt{\begin{Bmatrix} + AAa^4yyzz - \mathfrak{D}\mathfrak{D}(xx + yy + zz) \\ + BBb^4xxzz + 2\mathfrak{D}v(aaxx + bbyy + cczz) \\ + CCc^4xxyy - vv(a^4xx + b^4yy + c^4zz) \end{Bmatrix}}$$

XXXVIII.

XXXVIII. Mettons pour abréger le ſigne $\surd(\,.\,.\,)$ pour cette formule, & l'on trouvera les valeurs ſuivantes:

$$\cos l = \frac{\mathfrak{D}x(Cccyy - Bbbzz) + bbccxv(Bzz - Cyy) + Aaayz\surd(\ldots)}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

$$\cos m = \frac{\mathfrak{D}y(Aaazz - Cccxx) + aaccyv(Cxx - Azz) + Bbbxz\surd(..)}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

$$\cos n = \frac{\mathfrak{D}z\,(Bbbxx - Aavyy + aabbzv(Ayy - Bxx) + Cccxy\surd(..)}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

Et ſi nous ſubſtituons ces valeurs dans l'équation différentielle $\frac{dv}{du} = \frac{A\cos l}{x} + \frac{B\cos m}{y} + \frac{C\cos n}{z}$, nous parviendrons à cette équation à intégrer:

$$\frac{dv}{du}(AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy) =$$

$$ABC\mathfrak{D}(aaxx + bbyy + cczz) - ABCv(a^4xx + b^4yy + c^4zz) + \frac{AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy}{xyz}\surd(..)$$

XXXIX. Maintenant nous n'avons qu'à ſubſtituer au lieu de x, y, z leurs valeurs aſſignées ci-deſſus, qui donnent:

$$AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy = AAa^4\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBb^4\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCc^4\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$
$$- 2ABCu(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4)$$

$$AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy = AAaa\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBbb\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$
$$- 2ABCu(\mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc)$$

$$xx + yy + zz = 2(A + B + C)u + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$$
$$aaxx + bbyy + cczz = \mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc$$
$$a^4xx + b^4yy + c^4zz = \mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4$$

Poſons

Posons ensuite pour abréger,

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=E;\ \mathfrak{A}aa+\mathfrak{B}bb+\mathfrak{C}cc=F;\ \mathfrak{A}a^4+\mathfrak{B}b^4+\mathfrak{C}c^4=G;$$

$$AAaa\mathfrak{B}\mathfrak{C}+BBbb\mathfrak{A}\mathfrak{C}+CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B}=H$$

$$AAa^4\mathfrak{B}\mathfrak{C}+BBb^4\mathfrak{A}\mathfrak{C}+CCc^4\mathfrak{A}\mathfrak{B}=K.$$

d'où il s'ensuit $K=EG-FF$.

XL. En introduisant ces valeurs à cause de $A+B+C=-ABC$, notre formule irrationelle sera

$$V(..)=(K-2ABCGu+2\mathfrak{D}\mathfrak{D}ABCu-\mathfrak{D}\mathfrak{D}E+2\mathfrak{D}Fv-Gvv)$$

& notre équation différentielle deviendra

$$\frac{dv}{du}(K-2ABCGu)=ABC\mathfrak{D}F-ABCGv$$

$$+\frac{H-2ABCFu}{xyz}V(..)$$

qui se réduit à cette forme,

$$\frac{Kdv-ABCF\mathfrak{D}du-2ABCGudv+ABCGvdu}{V(K-\mathfrak{D}\mathfrak{D}E+2ABC(\mathfrak{D}\mathfrak{D}-G)u+2\mathfrak{D}Fv-Gvv)}=$$

$$\frac{Hdu-2ABCFudu}{V(2Au+\mathfrak{A})(2Bu+\mathfrak{B})(2Cu+\mathfrak{C})}$$

dont il s'agit de trouver l'intégrale.

XLI. Comme le dernier membre de cette équation ne renferme que la seule variable u, il est évident que, si l'on pouvoit trouver une fonction de u, par laquelle le premier membre étant multiplié devint intégrable, on auroit la résolution complette de cette équation. J'ai déjà exposé une methode de trouver de tels facteurs; & si l'on en fait l'application à cette équation proposée, on découvre ce facteur cherché $=\frac{1}{K-2ABCGu}$; ou bien, si nous divisons notre équa-

 tion

tion par $K - 2ABCGu$, l'un & l'autre membre deviendra intégrable, ou constructible par des quadratures. Multiplions donc par $\frac{\sqrt{G}}{K - 2ABCGu}$, et mettons le dernier membre

$$\frac{(H - 2ABCFu)\,du.\,\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(2Au + \mathfrak{A})(2Bu + \mathfrak{B})(2Cu + \mathfrak{C})}} = dU$$

de sorte que U puisse être regardé comme une fonction connue de la variable u, dont nous avons déjà le rapport au tems t.

XLII. Pour le premier membre, en le multipliant par $\frac{G}{(K - 2ABCGu)\sqrt{G}}$, la formule radicale pourra être représentée en sorte:

$$\sqrt{((G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu) - (Gv - \mathfrak{D}F)^2)}$$

à cause de $K = EG - FF$; & partant ce premier membre sera

$$\frac{(K - 2ABCGu)\,G\,dv + ABCG\,(Gv - \mathfrak{D}F)\,du}{(K - 2ABCGu)\sqrt{((G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu) - (Gv - \mathfrak{D}F)^2)}}$$

qui, posant $K - 2ABCGu = pp$, $Gv - \mathfrak{D}F = q$, & $G - \mathfrak{D}\mathfrak{D} = ff$, prendra cette forme $\frac{pdq - qdp}{p\sqrt{(ffpp - qq)}}$, qui, posant $q = ps$, se change en celle-ci $\frac{ds}{\sqrt{(ff - ss)}}$, dont l'intégrale est Arc. sin $\frac{s}{f}$ = Arc. sin $\frac{fp}{q}$.

Et partant l'intégrale du premier membre sera

$$\text{Arc. sin}\,\frac{Gv - \mathfrak{D}F}{f\sqrt{(K - 2ABCGu)}} = \text{Arc sin}\,\frac{Gv - \mathfrak{D}F}{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}}$$

XLIII. Cette quantité est donc égale à la formule intégrale

$$U = \int \frac{(H - 2ABCFu)\, du\, \sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(2Au + \mathfrak{A})(2Bu + \mathfrak{B})(2Cu + \mathfrak{C})}}$$

& considérant U comme un angle, notre équation intégrale sera:

$$\frac{Gv - \mathfrak{D}F}{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}} = \text{sin}\, U.$$

d'où nous tirons

$$\frac{\sqrt{((G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu) - (Gv - \mathfrak{D}F)^2)}}{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}} = \text{cos}\, U,$$

de sorte que notre formule irrationnelle résulte

$$\sqrt{(..)} = \frac{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}}\ \text{cos}\, U$$

XLIV. Substituons ces valeurs pour v, & la formule irrationnelle dans les expressions assignées ci-dessus pour les cosinus des arcs l, m, & n; & après avoir fait les réductions nécessaires, nous trouverons.

$$\text{cos}\, l = \frac{\mathfrak{D}aax}{G} + \frac{bbccx(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B})\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}}.\text{sin}\, U + \frac{Aaayz\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}}\text{cos}\, U$$

$$\text{cos}\, m = \frac{\mathfrak{D}bby}{G} + \frac{aaccy(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C})\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}}\,\text{sin}\, U + \frac{Bbbxz\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}}\text{cos}\, U$$

$$\text{cos}\, n = \frac{\mathfrak{D}ccz}{G} + \frac{aabbz(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A})\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}}\,\text{sin}\, U + \frac{Cccxy\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}}\text{cos}\, U$$

Donc, puisqu'on peut définir pour un tems écoulé quelconque t la quantité u, & de celle-ci les variables x, y, z, avec la formule intégrale U, on connoitra aussi pour le même tems les arcs l, m, & n; de

 sorte

ſorte que le probleme eſt réſolu jusqu'à la détermination des angles λ, μ, ν, dont il ſuffit de chercher un ſeul.

XLV. Mais, puisque nous avons trouvé, tant les quantités x, y, z, que les arcs l, m, n, exprimés par la ſeule quantité u, & qu'il y a $dt = \frac{du}{xyz}$, la détermination de l'angle QPA $= \lambda$ n'aura aucune difficulté par le moyen de l'équation différentielle $d\lambda = -\frac{dt(y \operatorname{cof} m + z \operatorname{cof} n)}{\operatorname{fin} l^2}$. Cependant, puisqu'il n'y a point de raiſon de chercher plutôt cet angle λ, que les deux autres μ & ν, il ſemble qu'on fera mieux de chercher l'angle QPO, que fait l'arc PO avec le cercle fixe PQS. Poſons donc l'angle QPO $= \phi$; & puisque nous avons déjà trouvé $\operatorname{fin} OAP = \frac{\operatorname{cof}\gamma \operatorname{cof} m - \operatorname{cof}\beta \operatorname{cof} n}{\operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin} l}$, & $\operatorname{cof} OAP = \frac{\operatorname{cof}\beta \operatorname{cof} m + \operatorname{cof}\gamma \operatorname{cof} n}{\operatorname{fin}\alpha \operatorname{fin} l}$, nous aurons $\operatorname{cof} OP = \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof} l + \operatorname{cof}\beta \operatorname{cof} m + \operatorname{cof}\gamma \operatorname{cof} n = \frac{v}{u}$, à cauſe de $v = x \operatorname{cof} l + y \operatorname{cof} m + z \operatorname{cof} n$. Mais nous venons de trouver $v = \frac{\mathfrak{D}F}{G} + \frac{\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)}}{G} \operatorname{fin} U$, & pour u nous avons $uu = E - 2ABCu$.

XLVI. Que dans le tems infiniment petit dt le pole de rotation O ſoit transporté en o, & tirant l'arc Ao, & la perpendiculaire Op, nous aurons $op = d\alpha$; & puisque le pole O change également par rapport aux axes principaux, ſoit que nous les regardions comme fixes, ou que nous tenions compte de leur mouvement, conſidé-

ſidérons l'angle BAO, pour lequel nous avons $\operatorname{cof} BAO = \frac{\operatorname{cof}\beta}{\sin\alpha}$, & $\sin BAO = \frac{\operatorname{cof}\gamma}{\sin\alpha}$. De là nous tirerons $d.\, BAO = OAo = \frac{-d\alpha \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\gamma - d\gamma \sin\alpha \sin\gamma}{\sin\alpha \operatorname{cof}\beta}$, & partant $Op = \frac{-d\alpha \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\gamma - d\gamma \sin\alpha \sin\gamma}{\operatorname{cof}\beta}$. Prolongeons l'arc oO en V, & nous aurons $\operatorname{tang} AoO = \operatorname{tang} AOV = \frac{-\operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\gamma}{\operatorname{cof}\beta} - \frac{d\gamma \sin\alpha \sin\gamma}{d\alpha \operatorname{cof}\beta}$, & $Oo = \frac{d\alpha}{\operatorname{cof} AOV} = \sqrt{(d\alpha^2 \sin\alpha^2 + d\beta^2 \sin\beta^2 + d\gamma^2 \sin\gamma^2)}$ qui ſe réduit à cette forme $Oo = \frac{1}{z} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dz^2)}$..

Maintenant, pour trouver l'angle POV nous avons pour l'angle AOP

$$\sin AOP = \frac{\sin OAP.\ \sin l}{\sin PO} = \frac{\operatorname{cof}\gamma \operatorname{cof} m - \operatorname{cof}\beta \operatorname{cof} n}{\sin\alpha \sin PO} \quad \&$$

$$\operatorname{cof} AOP = \frac{\operatorname{cof} l - c\!f\alpha\, c\!f OP}{\sin\alpha \sin PO} = \frac{\sin\alpha^2 \operatorname{cof} l - c\!f\alpha\, c\!f\beta\, c\!f m - \operatorname{cof}\alpha\, c\!f\gamma\, c\!f n}{\sin\alpha \sin PO}.$$

& partant

$$\sin POV = \frac{(\operatorname{cof}\gamma\, c\!f m - c\!f\beta\, c\!f n)\, c\!f AOV - (\sin\alpha^2\, c\!f l - c\!f\alpha\, c\!f\beta\, c\!f m - c\!f\alpha\, c\!f\gamma\, c\!f n) \sin AOV)}{\sin\alpha \sin PO}$$

XLVII. Or $Oo \sin POV$ donne le petit arc Oq perpendiculaire à l'arc Po, lequel étant auſſi $= d\Phi \sin PO$, nous aurons

$$d\Phi \sin PO = Oo \sin POV = \frac{d\alpha \sin POV}{\operatorname{cof} AOV}, \text{ \& partant}$$

$$d\Phi = \frac{d\alpha}{\sin\alpha \sin PO^2} (\operatorname{cof}\gamma\, c\!f m - c\!f\beta\, c\!f n - (\sin\alpha^2\, c\!f l - c\!f\alpha\, c\!f\beta\, c\!f m - c\!f\alpha\, c\!f\gamma\, c\!f n) \operatorname{tang} AOV).$$

 Sub-

Substituons ici la valeur de tang AOV $= \frac{-d\alpha \cos\alpha \cos\gamma - d\gamma \sin\alpha \sin\gamma}{d\alpha \cos\beta}$, & parceque $d\alpha \sin\alpha \cos\alpha + d\beta \sin\beta \cos\beta + d\gamma \sin\gamma \cos\gamma = 0$, nous trouverons

$$d\Phi \sin PO^2 = (d\gamma \cos\beta \sin\gamma - d\beta \sin\beta \cos\gamma) \cos l + (d\alpha \sin\alpha \cos\gamma - d\gamma \cos\alpha \sin\gamma) \cos m$$
$$+ (d\beta \cos\alpha \sin\beta - d\alpha \sin\alpha \cos\beta) \cos n.$$

Or, puisque $\cos\alpha = \frac{x}{u}$; $\cos\beta = \frac{y}{u}$, $\cos\gamma = \frac{z}{u}$, on aura $d\beta \sin\beta = \frac{y\,du}{uu}$

$$- \frac{dy}{u}, \ \& \ d\gamma \sin\gamma = \frac{z\,du}{uu} - \frac{dz}{u}, \quad \text{donc}$$

$$d\gamma \cos\beta \sin\gamma - d\beta \sin\beta \cos\gamma = \frac{zdy - ydz}{uu} = \frac{du(Bzz - Cyy)}{uuyz} = \frac{xdt(Bzz - Cyy)}{uu},$$

& partant, à cause de $Bzz - Cyy = B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}$, nous aurons

$$d\Phi = \frac{dt\,(x(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B})\cos l + y(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C})\cos m + z(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A})\cos n)}{E - 2ABCu - vv}$$

XLVIII. Substituons enfin pour $\cos l$, $\cos m$ & $\cos n$ leurs valeurs trouvées; & puisque

$$aaxx(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}) + bbyy(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C}) + cczz(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A}) = -H + 2ABCFu$$
$$bbccxx(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B})^2 + aaccyy(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C})^2 + aabbzz(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A})^2 =$$
$$(aaxx + bbyy + cczz)(AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy) -$$
$$xxyyzz(Aaa + Bbb + Ccc)^2 = F(H - 2ABCFu)$$
$$Aaa(B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}) + Bbb(C\mathfrak{A} - A\mathfrak{C}) + Ccc(A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A}) = ABCF$$

De là nous concluons: $\frac{d\Phi(E - 2ABCu - vv)}{dt} =$

$$-\frac{\mathfrak{D}(H - 2ABCFu)}{G} + \frac{F(H - 2ABCFu)\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \sin U$$
$$+ \frac{ABCFxyz\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}} \cos U$$

Où

Où il faut remarquer qu'il y a $GG(E - 2ABCu - vv) =$
$(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})FF + G(K-2ABCGu) - (G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)\sin U^2$
$- 2\mathfrak{D}F\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)}.\sin U$

XLIX. Puisque $dU = \frac{dt(H - 2ABCFu)\sqrt{G}}{K - 2ABCGu}$, & $du = xyzdt$,

notre différentiel $d\phi$ sera égal à une fraction, dont le numérateur est
$-\mathfrak{D}dU(K-2ABCGu)\sqrt{G} + FdU\sqrt{G(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)}.\sin U$

$$+ \frac{ABCFGdu\sqrt{G(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}\cos U$$

& le dénominateur:

$(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})FF + G(K-2ABCGu) - 2\mathfrak{D}F\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})(K-2ABCGu)}.\sin U$
$- (G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)\sin U^2$

Pour abréger cette formule, posons $\sqrt{(K - 2ABCGu)} = s$, & $\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})} = h$, de sorte que $ABCGdu = -sds$, & le numérateur sera:

$$-\mathfrak{D}ssdU\sqrt{G} + FhsdUG.\sin U - Fhds\sqrt{G}..\cos U$$

& le dénominateur:

$$hhFF + Gss - 2\mathfrak{D}Fhs\sin U - hhss\sin U^2.$$

L. Ayant introduit ces valeurs abrégées, nous aurons à intégrer cette formule

$$d\phi = \frac{-\mathfrak{D}ssdU + FhsdU\sin U - Fhds\cos U}{FFhh + Gss - 2\mathfrak{D}Fhs\sin U - hhss\sin H^2}\sqrt{G}$$

laquelle, à cause de $hh = G - \mathfrak{D}\mathfrak{D}$, se réduit à

$$d\phi = \frac{-\mathfrak{D}ssdU + FhsdU\sin U - Fhds\cos U}{(Fh - \mathfrak{D}s\sin U)^2 + Gss\cos U^2}\sqrt{G}$$

dont

dont l'intégrale est évidemment:

$$\phi = \text{Arc. tang. } \frac{Fh - \mathfrak{D}s \sin U}{s \cos U . \sqrt{G}}.$$

ou bien $\quad \text{tang } \phi = \dfrac{Fh - \mathfrak{D}s \sin U}{s \cos U . \sqrt{G}}.$

Cette formule, en restituant pour s & h les valeurs supposées, se réduit à celle-ci:

$$\text{tang } \phi = \frac{F\sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})} - \mathfrak{D} \sin U \sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\cos U \sqrt{G(K - 2ABCGu)}}.$$

LI. On peut donc trouver cet angle $QPO = \phi$ indépendamment de la quantité v, où je n'ai pas introduit une nouvelle constante, puisque le cercle fixe PQS peut être établi à volonté. Donc, supposant cet angle ϕ connu, puisque nous venons de trouver $\vartheta \sin PO = \sqrt{(E - 2ABCu - vv)}$, cette quantité est égale à $\dfrac{\sqrt{((Fh - \mathfrak{D}s \sin U)^2 + Gss \cos U^2)}}{G}$; & partant à

$\dfrac{s \cos U}{\cos \phi . \sqrt{G}}$; de sorte que $\vartheta \sin PO = \dfrac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}} . \dfrac{\cos U}{\cos \phi}$,

et $\sin PO = \dfrac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G(E - 2ABCu)}} . \dfrac{\cos U}{\cos \phi}$, &

$$\cos PO = \frac{\mathfrak{D}F + \sqrt{(G - \mathfrak{D}\mathfrak{D})(K - 2ABCGu)} \sin U}{G\sqrt{(E - 2ABCu)}}$$

Or, ayant trouvé l'angle $QPO = \phi$, il en faut retrancher l'angle APO pour avoir l'angle $QPA = \lambda$. Pour cet effet nous avons

$\sin APO = \dfrac{z \cos m - y \cos n}{\vartheta \sin PO \sin l}$ & $\cos APO = \dfrac{x \sin l^2 - y \cos l \cos m - z \cos l \cos n}{\vartheta \sin PO \sin l}$

LIII.

LII. Quand j'ai traité ce problème la premiere fois, ſans faire réflexion que la quantité aax coſ $l + bby$ coſ $m + ccz$ coſ n étoit une quantité conſtante, il m'a été impoſſible de déterminer les arcs l, m, n malgré tous les efforts que je fis pour réſoudre les équations n°. IV, V, VI du §. XXXIII, quoique j'euſſe déjà déterminé les quantités x, y & z, par le tems t. Auſſi m'imaginai-je, que ce problème conçû en general ſurpaſſoit les forces du calcul; & je ne crûs pas d'y réuſſir mieux en compoſant ce Mémoire. Je vis donc avec bien de la ſurpriſe que la méthode que j'ai employée ici, m'a conduit au but propoſé, laquelle mérite par cette raiſon d'autant plus d'attention, qu'elle nous fournit un exemple, combien il eſt dangereux de prononcer ſur l'impoſſibilité de réſoudre quelque probleme, quoiqu'on y rencontre les plus grandes difficultés, qui ſemblent même ſurmonter toute l'adreſſe du calcul. Par cette raiſon il vaudra bien la peine de mettre devant les yeux toutes les parties de la ſolution de ce problème.

PROBLEME.

Un corps ſolide d'une figure quelconque n'étant ſollicité par aucunes forces; ſi on lui imprime un mouvement quelconque, déterminer la continuation de ce mouvement.

LIII. Si le corps a un mouvement progreſſif, puisqu'il demeurera pérpetuellement le même, qu'on l'en dépouïlle, en ſorte que ſon centre d'inertie demeure en repos; & la queſtion revient à déterminer le mouvement de rotation, ou pour chaque tems écoulé tant l'axe de rotation que la viteſſe angulaire. Pour cet effet, il faut conſidérer les trois axes principaux du corps, qui ſoient IA, IB, IC, et par rapport à eux les momens d'inertie Maa, Mbb, & Mcc. Rapportons le corps à une ſphere fixe décrite autour du centre d'inertie du corps I; qu'après le tems $= t$ ſecondes les axes principaux du corps répondent aux points A, B, C, dans la ſurface de la ſphere, & l'axe de rotation au point O, autour duquel le corps tourne dans le ſens ABC avec la viteſſe angulaire $= \upsilon$, où υ marque l'angle décrit dans une ſeconde, le ſinus total, ou le rayon de la ſphere, étant $= 1$. Fig. 1. Fig. 3.

LIV. Poſons pour ce tems de t ſecondes écoulé depuis le commencement: $v \cos AO = x$; $v \cos BO = y$; $v \cos CO = z$: & ſoit pour abréger $\frac{bb-cc}{aa} = A$; $\frac{cc-aa}{bb} = B$; $\frac{aa-bb}{cc} = C$. Cela poſé, s'il fut au commencement $x = \sqrt{\mathfrak{A}}$; $y = \sqrt{\mathfrak{B}}$; & $z = \sqrt{\mathfrak{C}}$, & partant la viteſſe angulaire $= \sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$, il faut intégrer cette équation $dt = \frac{du}{\sqrt{(\mathfrak{A}+2Au)(\mathfrak{B}+2Bu)(\mathfrak{C}+2Cu)}}$, en ſorte que, faiſant $t = 0$, il devienne $u = 0$. De là on aura pour le tems indéfini t la valeur de u, & enſuite:

$x = \sqrt{(\mathfrak{A} + 2Au)}$; $y = \sqrt{(\mathfrak{B} + 2Bu)}$; $z = \sqrt{(\mathfrak{C} + 2Cu)}$

d'où l'on tirera la viteſſe angulaire

$$v = \sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)}$$

puisque $A + B + C = -ABC$. Après cela on connoîtra aiſément les arcs OA, OB, OC, des formules $\cos AO = \frac{x}{v}$; $\cos BO = \frac{y}{v}$; $\cos CO = \frac{z}{v}$, qui déterminent la ſituation de l'axe de rotation IO par rapport aux axes principaux du corps.

LV. Enſuite, pour trouver la poſition des axes principaux à l'égard de la ſphere fixe, où je prends à plaiſir un point fixe P avec un cercle fixe PQS, poſons les arcs $PA = l$, $PB = m$, $PC = n$, & ſoit pour abréger:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = F;\ \mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc = F;\ \mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4 = G$$
$$AAaa\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBbb\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B} = H$$
$$AAa^4\mathfrak{B}\mathfrak{C} + BBb^4\mathfrak{A}\mathfrak{C} + CCcc\mathfrak{A}\mathfrak{B} = K$$

Qu'on cherche maintenant un arc, ou angle U, de ſorte que

$$U = \int \frac{(H - 2ABCFu)\,du\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(\mathfrak{A} + 2Au)(\mathfrak{B} + 2Bu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$$

qui

qui renferme une constante arbitraire, outre laquelle on y introduise encore une autre $\mathfrak{D}$; & alors on aura:

$$\cos l = \frac{\mathfrak{D}aax}{G} + \frac{bbccx(B\mathfrak{E}-C\mathfrak{B})\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\sin U + \frac{Aaayz\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\cos U$$

$$\cos m = \frac{\mathfrak{D}bby}{G} + \frac{aaccy(C\mathfrak{A}-A\mathfrak{E})\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\sin U + \frac{Bbbxz\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\cos U$$

$$\cos n = \frac{\mathfrak{D}ccz}{G} + \frac{aabbz(A\mathfrak{B}-B\mathfrak{A})\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}}\sin U + \frac{Cccxy\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}}\cos U$$

LVI. Pour ces deux constantes, dont l'une est $\mathfrak{D}$, & l'autre renfermée dans l'arc U, il les faut prendre en sorte, que pour le commencement où $t = 0$ & $u = 0$, les arcs l, m, n, deviennent aussi grands qu'ils ont été précisement alors. Car, quoiqu'il y en ait trois, il suffit d'en avoir déterminé deux, à cause de leur rélation $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. Enfin, pour la position à l'égard du cercle PQS, si nous posons l'angle $OPQ = \Phi$, nous aurons en introduisant une nouvelle constante pour l'ajuster à l'état initial,

$$\operatorname{tang}(\Phi + \mathfrak{F}) = \frac{F\sqrt{(G-\mathfrak{D}\mathfrak{D})} - \mathfrak{D}\sin U.\sqrt{(K-2ABCGu)}}{\cos U.\sqrt{G(K-2ABCGu)}}$$

Or, $\sin APO = \frac{z\cos m - y\cos n}{x\sin PO.\sin l}$ & $x\sin PO = \frac{\sqrt{(K-2ABCGu)}}{\sqrt{G}}.\frac{\cos U}{\cos(\Phi+\mathfrak{F})}$

Par ces formules le probleme proposé est parfaitement résolu.

Autre solution du même Probleme.

LVII. La solution précédente n'est si compliquée que parce qu'elle se rapporte en général à un point fixe quelconque P, & à un cercle fixe PQS quelconque, d'où il doit y entrer un grand nombre de constantes. Mais, puisque ces lieux fixes sont arbitraires, on les peut établir en sorte, que nos formules deviennent beaucoup plus simples.

La constante $\mathfrak{D}$ dépend principalement du point P, & rien n'empêche, qu'on ne le prenne au commencement en sorte qu'il devienne $G - \mathfrak{D}\mathfrak{D} = 0$, ou $\mathfrak{D} = \sqrt{G} = \sqrt{(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4)}$. Alors, ayant trouvé l'angle U comme ci-dessus, on aura par des formules fort simples

$$\operatorname{cos} l = \frac{aax}{\sqrt{G}}; \quad \operatorname{cos} m = \frac{bby}{\sqrt{G}}; \quad \operatorname{cos} n = \frac{ccz}{\sqrt{G}}.$$

& partant pour déterminer ces arcs l, m, n, on n'a pas même besoin de chercher l'angle U. Or pour l'angle $OPQ = \Phi$, on aura, en négligeant la constante $\mathfrak{F}$, cette équation $\tang \Phi = - \frac{\sin U}{\cos U}$, ou bien $\Phi = - U$. de sorte que

$$\Phi = \int \frac{(H - 2ABCFu)du\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(\mathfrak{A} + 2Au)(\mathfrak{B} + 2Bu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$$

LVIII. Mais ayant exprimé si commodément les arcs l, m, & n, on peut immédiatement déterminer les angles $QPA = \lambda$, $QPB = \mu$, & $QPC = \nu$, par les premieres formules N°. VII. VIII. & IX. Car, puisque $\sin l^2 = \cos m^2 + \cos n^2 = \frac{b^4yy + c^4zz}{G}$ $= \frac{G - a^4xx}{G}$, & $y \cos m + z \cos n = \frac{bbyy + cczz}{\sqrt{G}} = \frac{F - aaxx}{\sqrt{G}}$ nous aurons $d\lambda = \frac{-dt(F + aaxx)}{G - a^4xx}$, ou bien

$$d\lambda = \frac{-du(\mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc - 2Aaau)\sqrt{G}}{(\mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4 - 2Aa^4u)\sqrt{(\mathfrak{A} + 2Au)(\mathfrak{B} + 2Bu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$$

Outre cela, nous trouverons, puisque $K = G(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) - FF$

$$\operatorname{cf} PO = \frac{aaxx + bbyy + cczz}{s\sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{G}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)}$$

&

& $\sin PO = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)}}$. & delà

$$\sin APO = \frac{Aaayz\sqrt{G}}{\sqrt{(K - 2ABCGu)(G - a^4xx)}}$$

$$\& \cos APO = \frac{Gx\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2ABCu)} - Faax}{\sqrt{(K - 2ABCGu)(G - a^4xx)}}$$

Or, pour avoir le point P, on n'a qu'à prendre au commencement $\cos AP = aa\sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{G}}$; $\cos BP = bb\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{G}}$ & $\cos CP = cc\sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{G}}$.

LIX. Il sera bon de voir, comment ces simples formules données pour $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, satisfont aux équations N°. IV. V. & VI. Puisque $dx = Ayzdt$; $dy = Bxzdt$ & $dz = Cxydt$: les formules $\cos l = \frac{aax}{\sqrt{G}}$; $\cos m = \frac{bby}{\sqrt{G}}$, & $\cos n = \frac{ccz}{\sqrt{G}}$, donnent $dl \sin l = \frac{-Aaayzdt}{\sqrt{G}}$; $dm \sin m = \frac{-Bbbxzdt}{\sqrt{G}}$; $dn \sin n = \frac{-Cccxydt}{\sqrt{G}}$.

Or $y \cos n - z \cos m = \frac{(cc - bb)yz}{\sqrt{G}} = \frac{-Aaayz}{\sqrt{G}}$, & de même $z \cos l - x \cos n = \frac{-Bbbxz}{\sqrt{G}}$; $x \cos m - y \cos l = \frac{-Cccxy}{\sqrt{G}}$; d'où l'égalité est évidente. Mais la principale circonstance qui fournit cette commodité, est que $a^4xx + b^4yy + c^4zz$ est une quantité constante $= G$, sans laquelle il n'y auroit point $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$. Pour cet effet il faut observer, qu'il y a non seulement $Aaa + Bbb + Ccc = 0$, mais aussi $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$, de sorte que tant $aaxx + bbyy + cczz$ que $a^4xx + b^4yy + c^4zz$ sont des quantités constantes. Mais dévelopons quelques cas particuliers.

I. Si tous les momens d'inertie sont égaux.

LX. Puisque $aa = bb = cc$, nous aurons A = o, B = o, C = o, & partant $x = \sqrt{\mathfrak{A}}$; $y = \sqrt{\mathfrak{B}}$, & $z = \sqrt{\mathfrak{C}}$. Donc $u = \sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$. La viteſſe angulaire u demeurera donc toujours la même, & l'axe de rotation ne changera point par rapport aux axes principaux, puisque les arcs AO, BO, CO demeurent auſſi conſtans. Enſuite, à cauſe de $\cos l = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{aa\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}} = \cos AO$, $\cos m = \cos BO$, & $\cos n = \cos CO$, le point fixe P tombe en O. D'où nous voyons que l'axe de rotation IO demeure auſſi fixe. Concevons donc le point O en P, & l'angle QOA = λ ſera exprimé par cette équation:

$$d\lambda = \frac{-du\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} = -dt\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})} = -udt$$

qui eſt par conſéquent proportionel au tems. Tout cela revient à ce qui eſt dejà connu d'ailleurs, qu'un tel corps, où les momens d'inertie ſont égaux entr'eux, quelque mouvement de rotation qu'il ait reçu, le conſerve toujours uniformement, & que l'axe de rotation demeure fixe, ou dirigé conſtamment vers le même point du Ciel.

II. Si deux momens principaux d'inertie ſont egaux entr'eux.

LXI. Soit donc $bb = cc$, & nous aurons A = o; $B = 1 - \frac{aa}{cc}$, & $C = \frac{aa}{cc} - 1$, ou B = − C. Il faudra donc intégrer cette formule $dt = \frac{du}{\sqrt{\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - 2Cu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$, d'où

$$t = \frac{1}{2C\sqrt{\mathfrak{A}}}\text{Arc. ſin}\frac{4Cu - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}} - \frac{1}{2C\sqrt{\mathfrak{A}}}\text{Arc. ſin}\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$$

pour

pour faire en sorte que u évanouisse, posant $t = 0$. Nous aurons donc pour le tems écoulé de t secondes

$$u = \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{4C} \sin 2C(t + \delta)\sqrt{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}}{4C}$$

prenant δ en sorte que $\sin. 2C\delta\sqrt{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$, & partant

$\cos 2C\delta\sqrt{\mathfrak{A}} = \frac{2\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}{\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$: par conséquent

$$u = \frac{2\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}{4C} \sin 2Ct\sqrt{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}}{4C}(1 - \cos 2Ct\sqrt{\mathfrak{A}}) \text{ ou}$$

$$u = \frac{(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\sin Ct\sqrt{\mathfrak{A}} + 2\sqrt{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}.\ \cos Ct\sqrt{\mathfrak{A}}}{2C} \sin Ct\sqrt{\mathfrak{A}}.$$

& de là:

$x = \sqrt{\mathfrak{A}};\ y = \sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)};\ z = \sqrt{(\mathfrak{C} + 2Cu)}\ \&\ v = \sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}$

LXII. La vitesse de rotation demeure donc toujours la même, & puisque $\cos AO = \frac{x}{v} = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$, l'axe principal IO, par rapport auquel le moment d'inertie est $= Maa$, les deux autres étant égaux entr'eux $= Mcc$, cet axe conservera toujours la même inclinaison à l'axe de rotation IO. Ensuite, qu'on prenne un tel point fixe P qu'il y eût au commencement $\cos PA = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}}$;

$\cos PB = \frac{cc\sqrt{\mathfrak{B}}}{\sqrt{G}}$, & $\cos PC = \frac{cc\sqrt{\mathfrak{C}}}{\sqrt{G}}$, où $G = \mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}c^4 + \mathfrak{C}c^4$;

& après le tems de t secondes on aura

$\cos PA = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}}$; $\cos PB = \frac{cc\sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)}}{\sqrt{G}}$; $\cos PC = \frac{cc\sqrt{(\mathfrak{C} + 2Cu)}}{\sqrt{G}}$

de

de sorte que le point A conserve toujours la même distance AP du point fixe P. Enfin, prenant $F = \mathfrak{A}aa + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})cc$, on aura $d\lambda = \frac{-dt}{cc}\sqrt{(\mathfrak{A}a^4 + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})c^4)}$, ou bien le point A tournera uniformément autour du point P. De même, pour l'angle QPO $= \phi$ on aura $d\phi = \frac{-dt}{cc}\sqrt{G}$, où l'angle APO est aussi constant.

LXIII. Puisque l'arc PA est constant, son cosinus étant $= \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}}$, & que cet arc tourne uniformément autour du point fixe P avec la vitesse angulaire $= \sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \frac{\mathfrak{A}a^4}{c^4})}$ dans le sens RQ, au lieu de considérer le point O, examinons l'angle PAB, dont le cosinus est $= \frac{\operatorname{cos}m}{\operatorname{sin}l} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)}}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$, & le sinus $= \frac{-\operatorname{cos}n}{\operatorname{sin}l} = \frac{-\sqrt{(\mathfrak{C} + 2Cu)}}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$. Le cosinus de cet angle étoit au commencement $= \frac{\sqrt{\mathfrak{B}}}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$, & son sinus $= \frac{-\sqrt{\mathfrak{C}}}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})}}$. Donc, posant après le tems t cet angle PAB $= \omega$, nous aurons $d\omega \operatorname{cos}\omega = \frac{-C\,du}{\sqrt{(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})(\mathfrak{C} + 2Cu)}}$, & partant $d\omega = \frac{-C\,du}{\sqrt{(\mathfrak{B} - 2Cu)(\mathfrak{C} + 2Cu)}} = -C\,dt\sqrt{\mathfrak{A}}$. D'où nous voyons que l'arc AB tourne uniformément autour du point A, dans le sens BP, avec la vitesse angulaire $= C\sqrt{\mathfrak{A}}$. De cette manie-

maniere on se représentera le plus distinctement le mouvement du corps, en disant que le point du corps A tourne uniformement au-autour du point fixe P, & que cependant le corps lui même tourne uniformement autour du point A.

LXIV. Puisque les poles B & C peuvent être pris à volonté, pourvu qu'ils soient éloignés du pole A de 90°, le mouvement d'un tel corps pourra être représenté en général de cette maniere. Premierement, le pole A tournera autour d'un point fixe P uniformement, pendant que le corps lui même tourne aussi uniformement autour du pole A. Ensuite, posant l'arc AP $= \zeta$, la vitesse angulaire, dont l'arc PA tourne autour de P vers PQ, $= \varepsilon$, & la vitesse angulaire, dont le corps tourne autour du pole A dans le sens BP, $= \delta$.

Les équations $\cos\zeta = \frac{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}{\sqrt{G}}$ ou $\text{tang}\,\zeta = \frac{cc\sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{aa\sqrt{\mathfrak{A}}}$;

$\varepsilon = \sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\frac{\mathfrak{A}a^4}{c^4})}$ & $\delta = (\frac{aa}{cc} - 1)\sqrt{\mathfrak{A}}$, donnent

$$\frac{\sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{\sqrt{\mathfrak{A}}} = \frac{aa}{cc}\text{tang}\,\zeta \;\&\; \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{cc}{aa-cc}\sqrt{(\frac{a^4}{c^4}\text{tang}\,\zeta^2 + \frac{a^4}{c^4})} = \frac{aa}{(aa-cc)\cos\zeta}$$

de sorte que $\varepsilon : \delta = aa : (aa - cc)\cos\zeta$. Qui est le rapport entre les vitesses angulaires ε & δ.



REMARQVES GÉNÉRALES

SUR LE

MOUVEMENT DIURNE DES PLANETES

PAR M. EULER.

Table III. Après la découverte de la véritable précession des équinoxes, & de la nutation de l'axe de la terre, on répresente en sorte le mouvement diurne de la terre, que pendant qu'elle tourne uniformement autour de son axe, cet axe même ait un certain mouvement, par lequel il réponde successivement à differens points du Ciel: & l'on a dressé des tables à l'aide desquelles on calcule pour chaque tems proposé, tant la longitude des poles de la terre que leur distance aux poles de l'écliptique.

Cette maniere d'envisager le mouvement diurne de la terre paroît d'abord la plus naturelle & la plus convenable pour la pratique: & on aura de la peine à s'imaginer qu'elle soit assujettie à de fort grandes difficultés, non pas à l'égard des petites irrégularités de ce mouvement, lesquelles peut-être ne sont pas encore toutes connues, mais à l'egard de la maniere même de concevoir ce mouvement.

Car d'abord je demande, qu'est-ce que l'axe de la terre? On me répondra bien, que c'est une certaine ligne droite qui passe par le centre, ou plutôt le centre de gravité de la terre, autour de laquelle la terre acheve ses révolutions. Quelque claire que paroisse cette définition, j'y trouve de fort grandes difficultés: car comment est-ce que nous connoissons cette ligne qu'on nomme l'axe de la terre? On recourra au Ciel, où, l'on dira, qu'on découvre toujours deux points diamétralement opposés, qui semblent du moins pour quelque tems être en repos, & autour

tour desquels le Ciel avec les étoiles nous paroit achever ses révolutions. On nomme ces points les poles de la terre, & la droite tirée de l'un à l'autre, entant qu'elle passe par le centre de la terre, son axe. Je ne m'arrêterai pas ici à l'objection qu'on pourroit tirer de la distance des étoiles, que l'on peut bien regarder comme infinie, même par rapport au diametre de l'orbite de la terre. Je conviens plutôt, que quel que soit le mouvement de la terre, il y a toujours au Ciel deux points en repos, qui semblent immobiles pour un instant au moins. Or, puisque ces points sont variables, on suppose gratuitement, que la ligne droite tirée de l'un à l'autre passe toujours par les mêmes points de la terre: & si cela n'arrivoit pas, les poles terrestres ne seroient pas des points fixes sur la surface de la terre, comme on le soutient. Mais il y a plus; ces points fixes du Ciel ne repondent pas à l'axe prétendu de la terre. Car, puisque cet axe est supposé mobile, les points au Ciel, vers lesquels il est dirigé, le seront aussi; & partant on ne sauroit dire qu'ils sont ces points fixes du Ciel, autour desquels le Ciel tourne au moins pendant un instant. Il est vrai que le mouvement de l'axe de la terre est si lent, qu'on peut le regarder pendant longtems comme immobile: & c'est aussi la raison, pourquoi l'incongruité dont je parle ici, n'est d'aucune conséquence. Mais, pour mettre cette matiere dans tout son jour, concevons une autre Planete, qui tourne comme la terre autour d'un certain axe; mais que cet axe lui même ait un mouvement beaucoup plus rapide, de sorte que les points du Ciel vers lesquels cet axe est dirigé, changent tous les instans assès sensiblement de place: & il est évident qu'on ne sauroit soutenir, que le Ciel tourne autour de ces points pendant un seul instant.

Voudra-t-on insister sur le mot d'instant, & dire que, quelque rapide que soit le mouvement desdits points dans le Ciel, on les peut pourtant regarder comme fixes pendant un instant, & y rapporter le mouvement angulaire du Ciel, attendu que pendant un instant ces points ne changent pas de place. Mais on pourroit dire la même chose de tous les autres points du Ciel avec autant de fondement; & on réduiroit par ce moyen le Ciel tout entier au repos, quelque ra-

pide que fût son mouvement. D'ailleurs la raison alléguée, qu'on puisse regarder un point en repos pendant un instant, quoiqu' il soit en mouvement, est tout à fait fausse: car il ne s'agit pas ici du changement de place, qui évanouit toujours dans un instant, quelque rapide que soit le mouvement, mais du véritable repos, du moins pendant un instant; puisqu'on sait que la vitesse ne dépend pas du tems. Donc, quand on dit que les points autour desquels le Ciel tourne, sont fixes pendant un instant; on ne veut pas dire qu'ils ne changent pas de place, mais que leur vitesse est effectivement nulle. Or un tel repos ne convient pas absolument aux points du Ciel, vers lesquels est dirigé l'axe mobile de quelque planete: & partant, si nous jugeons du mouvement diurne d'une planete par le mouvement apparent du Ciel, qui se fait toujours autour d'un axe fixe pendant un instant, il est certain que cet axe du Ciel ne convient pas avec l'axe mobile de la planete, autour duquel on conçoit qu'elle tourne, & que cette maniere de représenter le mouvement diurne des Planetes n'est pas d'accord avec les Observations du Ciel, d'où l'on détermine la position & le mouvement de leurs axes.

Or l'idée même d'un corps qui tourne autour d'un axe, pendant que cet axe se meut d'un mouvement quelconque, est assujettie à de grandes difficultés, qu'on rencontre même en ne considérant les choses qu'*in abstracto*. Car, soit QRST un corps sphérique qui tourne autour d'un axe, qui passe par son centre & le point P, pendant que ce point P, qu'on nommera son pole, est emporté par un mouvement quelconque, le centre demeurant toujours en repos. Que ce pole soit maintenant en P, autour duquel concevons un cercle ABCD, ou plutôt quatre points A, B, C, D; & en quelque endroit O que le pole P soit transporté, il s'agit de déterminer les lieux où ces quatre points se trouveront alors, tant à cause du mouvement de rotation autour de ce pole, qu'à cause du mouvement propre du pole. Car il est clair, que la connoissance de ce mouvement composé exige la position de ces quatre points pour tous les endroits O, où le pole P parvient successivement.

Fig. 1.

Or,

Or, quelque aisée que paroisse cette question, en supposant connu, tant le mouvement du pole P, que la vitesse angulaire du corps autour de ce pole pour chaque tems proposé; pour peu qu'on y réfléchisse, on y rencontrera des obstacles insurmontables. Nous n'avons qu'à en considérer le cas le plus simple, où le mouvement de rotation est supposé nul: & il n'y a point de doute que, quand le pole P seroit transporté en Q, après avoir parcouru le quart de cercle PQ, les quatre points A, B, C, D ne se trouvent aux points *a*, *b*, *c*, *d*, marqués dans la figure. Mais, par la même raison, si le pole P étoit transporté en R par l'arc de cercle PR, les points A, B, C, D, devroient se trouver en α, β, γ, δ: & si le pole passoit de R en Q, les points α, β, γ, δ, parviendroient en *b*, *c*, *d*, *a*, dont la position est tout à fait différente de celle que ces points auroient, si le pole P étoit transporté en Q par l'arc PQ; quoique dans l'un & l'autre cas le mouvement de rotation soit supposé nul. D'ailleurs la question ne fournit aucune raison, pourquoi la position des points A, B, C. D, devroit être différente, selon que le pole seroit parvenu par différens chemins de P en Q. Il ne sera donc pas possible d'assigner la position de ces quatre points, quand le pole P sera parvenu à un lieu quelconque O: & à plus forte raison, la question envelopera des incongruités, quand on suppose au corps un mouvement de rotation.

On peut même regarder cette question comme indéterminée; & il y faudroit ajouter encore une condition, qui détermineroit le mouvement du corps au cas même, où le mouvement de rotation est supposé évanouissant. La moins choquante seroit à mon avis de dire que, dans ce cas, les points A, B, C, D, conservassent constamment la même situation à l'égard de la direction, suivant laquelle le pole se meut à chaque instant. Cette condition conviendroit encore le mieux avec les idées que nous nous formons sur l'absence d'un mouvement de rotation, & expliqueroit la diverse position desdits points, le pole étant parvenu en Q, ou par l'arc PQ, ou par le chemin PRQ. Mais il faut avouer que cette condition est tout à fait étrangere aux principes de la Mécanique. Cependant, en l'admettant, on est en état de déterminer

le vrai mouvement du corps, dès que celui du pole & celui de rotation seroient donnés pour chaque instant.

Mais, quoiqu'on voulût se servir de cette maniere pour représenter le mouvement d'une Planete sur son centre, il n'y auroit rien qui nous obligeroit de regarder un point de la Planete comme son pole, plutôt que tout autre. Ainsi, lorsqu'il s'agit de la terre, on pourroit prendre un point quelconque de sa surface pour son pole, & le vrai mouvement de ce point seroit le mouvement du pole. Ensuite, on pourroit concevoir pour chaque lieu de ce pole un certain mouvement de rotation, lequel joint au mouvement du pole produiroit le vrai mouvement de la terre. Il est vrai que cette représentation deviendroit pour la plûpart fort compliquée, quelque simple qu'on supposât le mouvement en lui-même; mais il faut avouer que cette idée ne contient rien, qui nous indique les points préférables à tous les autres, où l'on devroit placer les poles. On dira bien qu'il est raisonnable de choisir ceux qui sont assujettis au plus petit mouvement; mais cette regle n'est pas essentielle au sujet, & quoiqu'il y ait de tels points sur la terre, on a lieu de douter encore, si les autres planetes sont douées de tels points. Peut-être que, quand même il y auroit de tels points pour un certain tems, ces mêmes points acquierroient dans la suite un mouvement plus rapide que d'autres.

Or ces inconvéniens n'ont pas lieu dans l'autre maniere de représenter le mouvement diurne des planetes, en déterminant pour chaque tems les points du Ciel autour desquels la Planete tourne, du moins pendant un instant, comme autour de points fixes; & en assignant pour chaque instant la vitesse de cette rotation. Pour mieux comprendre cette maniere, & pour en voir la diversité d'avec la précédente, concevons encore un corps sphérique, (car la figure ne change rien dans notre recherche,) qui soit entouré d'une surface sphérique immobile pour pouvoir y rapporter le mouvement du corps. Qu'il tourne au commencement autour du point A; & après un

Fig. 2. tems $= t$ autour du point P de la surface immobile, de sorte qu'on puisse pour chaque moment assigner le point de la surface immobile, autour

autour duquel le corps tourne alors avec la vitesse de rotation. Ce n'est donc pas le point du corps A, qui parvient après le tems t en P, mais P est plutôt un point imaginaire dans la surface immobile, qui représente le pole de rotation pour un instant. Or, quoiqu'un moment après la rotation se fasse autour du point p, il ne faut pas s'imaginer que le point P ait été transporté en p, l'un & l'autre demeurant fixe: ce qui distingue essentiellement cette maniere de la précédente.

Pour déterminer plus aisément ce mouvement, concevons dans la surface immobile un point fixe Z, auquel on tire les arcs de grands cercles AZ, PZ & pZ. Et puisqu'au commencement A est le pole de rotation, soit $AZ = a$. Ensuite, après le tems $= t$, le pole de rotation étant en P, soit l'angle $AZP = q$, & l'arc $ZP = p$, posant le rayon de la sphere $= 1$, de sorte que p & q soient des fonctions du tems t; d'où pour le tems $t + dt$ on aura l'angle $PZp = dq$, & l'arc $Zp = p + dp$. Pour la vitesse angulaire, supposons qu'au commencement le pole étant en A, le corps tourne dans le tems infiniment petit dt par l'angle $= n\,dt$; & après le tems t, le pole étant en P, par l'angle $= v\,dt$. Cela posé, voyons quel sera le mouvement d'un point quelconque du corps, qui au commencement aura été en M.

Posons donc l'arc $AM = f$, & l'angle $ZAM = g$; or, après le tems t, ce point soit parvenu en V, & nommons l'arc $PV = x$, & l'angle $ZPV = y$, qui sont les deux quantités qu'il faut déterminer pour connoitre le vrai mouvement du point M. Donc, puisque le corps tourne autour du pole fixe P, pendant le tems dt, le point V sera transporté en v, de sorte que l'arc $Pv = PV = x$, & l'angle $VPv = v\,dt$, par conséquent l'angle $ZPv = y - v\,dt$. Or v sera le lieu de notre point après le tems $t + dt$ depuis le commencement, le pole étant maintenant en p; & partant nous aurons $pv = x + dx$, & l'angle $Zpv = y + dy$.

Tirons de P sur Zp, & de p sur Pv, les perpendiculaires Pq & pr; & à cause de l'angle $PZp = dq$ & $ZP = p$, nous aurons

le vrai mouvement du corps, dès que celui du pole & celui de rotation seroient donnés pour chaque instant.

Mais, quoiqu'on voulût se servir de cette maniere pour représenter le mouvement d'une Planete sur son centre, il n'y auroit rien qui nous obligeroit de regarder un point de la Planete comme son pole, plutôt que tout autre. Ainsi, lorsqu'il s'agit de la terre, on pourroit prendre un point quelconque de sa surface pour son pole, & le vrai mouvement de ce point seroit le mouvement du pole. Ensuite pourroit concevoir pour chaque lieu de ce pole un certain mouv de rotation, lequel joint au mouvement du pole produir mouvement de la terre. Il est vrai que cette représen droit pour la plûpart fort compliquée, quelque simp le mouvement en lui-même; mais il faut avou contient rien, qui nous indique les points préfé où l'on devroit placer les poles. On dira b choisir ceux qui sont assujettis au plus regle n'est pas essentielle au sujet, & la terre, on a lieu de douter encor de tels points. Peut-être que pour un certain tems, ces m mouvement plus rapide qu

Or ces inconvénie senter le mouvement que tems les points moins pendant un gnant pour cha comprendre ce cédente, con change rien sphérique in

Fig. 2. Qu'il tourne tems passe po

autour duquel le corps [redacted] .e cette
n'est donc pas le point du corps A, [redacted] . $Pvpz$
mais P est plutôt un point [redacted]
présente le pole de rotation pour un [redacted] $-dy$; & par-
après la rotation se fasse autour du
que le point P ait été transporté en
ce qui distingue essentiellement ce
$-dy$,

Pour déterminer plus aisément
surface immobile un point fixe Z, ... du triangle PZp
cercles AZ, PZ & pZ. Et ... $p \sin y + dq \sin p \cos y)$
de rotation, soit $AZ = a$. ... $\sin x$
rotation étant en P, soit l'angle AZ ... l'expression trouvée pro-
le rayon de la sphere $= 1$,
tems t; d'où pour le tems t
l'arc $Zp = p + dp$. Po ... $\dfrac{\sin y + dq \sin p \cos y}{\text{tang } x}$
mencement le pole étant
petit dt par l'angle
par l'angle $= v\,dt$ ... $-\dfrac{dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\text{tang } x}$.
point quelconque

Posons
le tems t
l'angle
...miere, qui est

...$\cos y - dq \sin p \sin y$;

...bleme; où p, q & v, sont regardés comme

...x équations différentielles, d'où il faut détermi-
...nues x & y. La chose reviendroit au même, si au
... inconnues on vouloit chercher l'angle AZV avec Fig. 3.
...lors on arrivera au but par la synthese suivante, qui est

$P = p$, $AZP = q$, & $VPv = v\,dt$, posons l'angle
l'arc $ZV = z$, pour avoir l'angle $PZV = ... q$.

 Tirons

$pq = dp$ & $Pq = dq \sin p$. Donc, $Pp = \sqrt{(dp^2 + dq^2 \sin p^2)}$ $= ds$ pour abréger: & de là $\sin pPq = \frac{dp}{ds}$, & $\operatorname{cof} pPq = \frac{dq \sin p}{ds}$. Or l'angle ZPq étant droit, nous aurons $\sin ZPp = \frac{dq \sin p}{ds}$ & $\operatorname{cof} ZPp = \frac{-dp}{ds}$. Maintenant, l'angle ZPv étant $= y - v\,dt$, ou en négligeant la particule infiniment petite $v\,dt$, feulement $= y$, on en tire $\sin pPr = \sin(y - ZPp) = \frac{-dp \sin y - dq \sin p \operatorname{cof} y}{ds}$;

& $\operatorname{cof} pPr = \operatorname{cof}(y - ZPp) = \frac{-dp \operatorname{cof} y + dq \sin p \sin y}{ds}$,

Donc $pr = -dp \sin y - dq \sin p \operatorname{cof} y$ & $Pr = -dp \operatorname{cof} y + dq \sin p \sin y$, d'où nous concluons $pv = Pv - Pr$, ou $x + dx = x + dp \operatorname{cof} y - dq \sin p \sin y$, de forte que nous ayons

$$dx = dp \operatorname{cof} y - dq \sin p \sin y.$$

De là nous connoitrons auffi l'angle Pvp, puisque $pr = Pvp \sin pv$, ce qui donne $Pvp = \frac{-dp \sin y - dq \sin p \operatorname{cof} y}{\sin x}$.

Mais ces déterminations ne font pas fuffifantes pour définir l'angle $Zpv = y + dy$, & en tirer la valeur différentielle dy; car, puisqu'il s'agit d'une différence infiniment petite, il ne fera plus permis de négliger, dans les angles Ppq & Ppr ces particules infiniment petites: mais, fi nous en voulions tenir compte, nous tomberions dans des formules très embarraffantes. Or le plus fur moyen nous eft fourni par ce beau théoreme fur l'aire des triangles fphériques, qui eft toujours égale à l'excès des trois angles fur deux droits, pofant le rayon de la fphere $= 1$. Donc l'aire du quadrilatere $ZPvp$ eft égale à l'excès de fes quatre angles fur 4 droits, dont la mefure eft $= 2\pi$, prenant π pour

pour la mesure d'un angle droit. Or les quatre angles de cette figure sont 1°. $PZp = dq$; 2°. $ZPv = y - v\,dt$; 3°. $Pvpz$

$= \frac{-dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\sin x}$ & 4°. $Zpv = 2\pi - y - dy$; & partant l'excès de leur somme sur 4 droits ou, 2π, est

$$dq - v\,dt - \frac{dp \sin y - dq \sin p \cos y}{\sin x} - dy,$$

qui exprime l'aire de la figure. Mais on sait que l'aire du triangle PZp est $= dq\,(1 - \cos p)$, & du triangle $Pvp = \frac{-(dp \sin y + dq \sin p \cos y)}{\sin x}$ $(1 - \cos x)$; dont la somme étant égalée à l'expression trouvée produit cette équation:

$$-v\,dt - dy = -dq \cos p + \frac{dp \sin y + dq \sin p \cos y}{\tang x}$$

d'où nous tirons

$$dy = -v\,dt + dq \cos p - \frac{dp \sin y + dq \sin p \cos y}{\tang x}.$$

Cette équation jointe à la premiere, qui est

$$dx = dp \cos y - dq \sin p \sin y;$$

contient la solution du probleme; où p, q & v, sont regardés comme des fonctions du tems t.

Voilà donc deux équations différentielles, d'où il faut déterminer les deux inconnues x & y. La chose reviendroit au même, si au lieu de ces deux inconnues on vouloit chercher l'angle AZV avec l'arc ZV; & alors on arrivera au but par la synthese suivante, qui est fort simple. Fig. 3.

Puisque $ZP = p$, $AZP = q$, & $VPv = v\,dt$, posons l'angle $AZV = x$, & l'arc $ZV = u$, pour avoir l'angle $PZV = x - q$.

Tirons ſur ZV les perpendiculaires PR & vs, de même que l'arc Vv, qui ſera perpendiculaire ſur les arcs égaux PV & Pv, & nous aurons $Vv = v\,dt \sin PV$, & $\sin PR = \sin ZP . \sin PZV = \sin PV . \sin PVZ$, de ſorte que $\sin PV . \sin PVZ = \sin p \sin (u - q)$. Or la Trigonométrie ſphérique donne

$$\text{tang}\ PVZ = \frac{\sin p \sin (u - q)}{\cos p \sin z - \sin p \cos (u - q)}$$

Mais, puiſque $Vs = - dz$, & $Vs = Vv \cdot \cos sVv = Vv \sin PVZ$, nous aurons d'abord

$$- dz = v\,dt \sin PV \sin PVZ = v\,dt \sin p \sin (u - q)$$

Enſuite, à cauſe de $VZv = du$, on aura $vs = du \sin z$. Or $vs = Vs \cot PVZ$, ou $- dz = du \sin z\, \text{tang}\, PVZ$ d'où nous tirons cette ſeconde équation:

$$- dz = \frac{du \sin p \sin z \sin (u - q)}{\cos p \sin z - \sin p \cos z \cos (u - q)} = v\,dt \sin p \sin (u - q)$$

de ſorte que nous ayons ces deux équations

I. $0 = dz + v\,dt \sin p \sin (u - q)$

II. $du \sin z = v\,dt (\cos p \sin z - \sin p \cos z \cos (u - q))$

Or ayant trouvé z & u, on en tire

$\cos PV = \cos x = \cos p \cos z + \sin p \sin z \cos (u - q)$ &

$$\text{tang}\ ZPV = \text{tang}\, y = \frac{\sin z \sin (u - q)}{\sin p \cos z - \cos p \sin z \cos (u - q)}$$

Puiſque le rapport de ces dernieres coordonnées u & z aux précedentes x & y eſt connu, ces dernieres formules ſe réduiſent aux premieres. Cependant il ne paroit pas, comment on puiſſe réſoudre en général ces équations, & pour des cas particuliers on ſe ſervira plus commodément, tantôt des unes, & tantôt des autres. Comme s'il n'y avoit aucun mouvement de rotation, ou qu'il fût $v = 0$, les

dernie-

dernieres formules montrent d'abord $dz = 0$, & $du = 0$; d'où l'on voit que dans ce cas tous les points du corps ne changent pas de place.

Considérons le cas où le pole P demeure en repos, quel que soit le mouvement de rotation $v\,dt$; ce qui arrive lorsque p & q sont des quantités constantes: alors les premieres donnent d'abord $dx = 0$, & partant $x =$ const. Soit donc $x = f$, & l'autre $dy = -v\,dt$, & partant $y = g - \int v\,dt$. Or les dernieres formules méneroient pour ce cas à un calcul fort ennuyeux.

Supposons, comme il arrive à peu prés sur la terre, que le pole P se meut uniformement dans un petit cercle AP autour du point fixe Z, qui représente le pole de l'écliptique, & que le mouvement de rotation demeure toujours le même. On aura donc $p = a$; $dq = m\,dt$ & $v = n$; d'où les premieres formules donnent:

$$dx = -m\,dt \sin a \sin y \;\&\; dy = -n\,dt + m\,dt \cos a - \frac{m\,dt \sin a \cos y}{\text{tang}\, x}$$

& partant l'une divisée par l'autre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n - m \cos a}{m \sin a \sin y} + \frac{1}{\text{tang}\, x \;\text{tang}\, y}.$$

Multiplions par $dx \sin x \sin y$ pour avoir

$$dy \sin x \sin y - dx \cos x \cos y = \frac{n - m \cos a}{m \sin a}\, dx \sin x$$

dont l'intégrale est,

$$-\sin x \cos y = C + \frac{m \cos a - n}{m \sin a} \cos x.$$

Donc $\quad \cos y = \dfrac{(n - m \cos a) \cos x}{m \sin a \sin x} - \dfrac{h}{\sin x}.$

Posons pour abréger $\dfrac{n - m \cos a}{m \sin a} = k$, de sorte que $\cos y = \dfrac{k \cos x - h}{\sin x}$

 &

& $dy = - kmdt \sin a - \frac{mdt \sin a (k \cos x - h)}{\sin x \tan x}$, ou bien $dy = \frac{- mdt \sin a (k - h \cos x)}{\sin x^2}$. Or la valeur de $\cos y$ donne $dy \sin y = \frac{dx (k - h \cos x)}{\sin x^2}$; & cette valeur substituée mene à cette équation: $- mdt \sin a \sin y = dx$. Mais, à cause de

$$\sin y = \frac{+ \sqrt{(\sin x^2 - kk \cos x^2 + 2hk \cos x - hh)}}{\sin x},$$

nous aurons: $mdt \sin a = \frac{- dx \sin x}{\sqrt{(1 - hh + 2hk \cos x - (1 + kk) \cos x^2)}}$.

dont l'intégrale se trouve

$$mt \sin a + C = \frac{1}{\sqrt{(1 + kk)}} \text{A} \sin \frac{(1 + kk) \cos x - hk}{\sqrt{(1 - hh + kk)}}.$$

& partant

$$\cos x = \frac{hk}{1 + kk} + \frac{\sqrt{(1 - hh + kk)}}{1 + kk} \sin (C + mt \sin a \sqrt{(1 + kk)})$$

Ensuite, ayant trouvé x pour le tems écoulé t, on aura

$$\cos y = \frac{k \cos x - h}{\sin x}, \text{ ayant posé } k = \frac{n - m \cos a}{m \sin a}.$$

Pour déterminer les constantes h & C, supposons qu'il y eût au commencement $x = AM = f$, & l'angle $y = ZAM = g$: donc $\cos g = \frac{k \cos f - h}{\sin f}$; & partant $h = k \cos f - \sin f \cos g$; d'où l'on obtient

$$\sqrt{(1 - hh + kk)} = \sqrt{(\sin g^2 + (k \sin f + \cos f \cos g)^2)}$$

Ensui-

Enſuite pour la conſtante C on aura:

$$\frac{(1+kk)\operatorname{cof}f-kk\operatorname{cof}f+k\sin f\operatorname{cof}g}{\sqrt{(\sin g^2+(k\sin f+\operatorname{cof}f\operatorname{cof}g)^2)}}=\sin C=\frac{\operatorname{cof}f+k\sin f\operatorname{cof}g}{\sqrt{(\sin g^2+(k\sin f+\operatorname{cof}f\operatorname{cof}g)^2)}}$$

Donc $\operatorname{cof} C = \dfrac{\sin f\sin g\sqrt{(1+kk)}}{\sqrt{(\sin g^2+(k\sin f+\operatorname{cof}f\operatorname{cof}g)^2)}}$, &

$$\operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{cof}f+k\sin f\operatorname{cof}g}{\sin f\sin g\sqrt{(1+kk)}}$$

Par conſéquent nous aurons:

$$\operatorname{cof}x=\frac{kk\operatorname{cof}f-\sin f\operatorname{cof}g+(\operatorname{cof}f+k\sin f\operatorname{cof}g)\operatorname{cf}\odot+\sin f\sin g\sin\odot.\sqrt{(1+kk)}}{1+kk}$$

poſant $mt\sin a.\sqrt{(1+kk)}=\odot$, & enſuite

$$\operatorname{cof}y=\frac{k\operatorname{cof}x-k\operatorname{cof}f+\sin f\operatorname{cof}g}{\sin x}$$

A' l'aide de ces deux formules on pourra déterminer le mouvement de chaque point du corps, qui ſera d'autant plus variable, plus les cöefficiens de ſin ⊙ & coſ ⊙ ſeront grands, qui dépendent du lieu du point M, dont on cherche le mouvement. Or on pourroit prendre un tel point, que ces cöefficiens évanouïſſent tous les deux; & alors, tant x que y, ſeront des quantités conſtantes; & ce point conſervera toujours la même ſituation par rapport au pole, autour duquel la planete tourne à chaque inſtant. Le mouvement de ce point ſera donc auſſi lent que le changement du pole, & paroitra délivré de toute rotation. Ce ſera donc le point, qu'on pourra regarder dans la premiere maniere comme le pole de la planete, ou la droite qui en eſt tirée par le centre, comme l'axe de la planete, quoique ce point ſoit toujours différent du point du Ciel autour duquel ſe fait la rotation à chaque inſtant.

Pour trouver donc ce point, ou l'axe de la Planete, on n'a qu'à prendre f & g en ſorte que tang ſin f ſin g que coſ f + k ſin f coſ g

 éva-

évanouiſſe. Poſons donc g, ou l'angle ZAM $= 180°$; pour avoir $\sin g = 0$, & $\cos g = -1$; & nous trouverons $\operatorname{tang} f = \frac{1}{k} = \frac{m \sin a}{n - m \cos a}$: d'où nous connoiſſons l'arc AM $= f$; & alors ce point M conſervera toujours la même diſtance au pole P, & ſe trouvera dans l'arc ZP prolongé, lorsque f a une valeur poſitive.

Pour la terre cette diſtance f évanouït presque tout à fait. Car, puisque dans l'intervalle d'un jour la terre fait une révolution entiere, & le pole n'avance dans un ſens contraire que par un angle $= \frac{51}{365}$ ſecondes, nous aurons $n : m = 360° : \frac{-51''}{365}$, ou $\frac{n}{m} = \frac{-60.\ 60.\ 360.\ 365}{51}$ ou $\frac{n}{m} = -9281647$. Donc, puisque $a = 23°, 29'$, nous aurons $\operatorname{tang} f = \frac{-0,3984}{9281647}$, & $f = -\frac{1}{112}$ ſeconde. Puisque cette différence eſt imperceptible, on peut ſans aucune erreur regarder ce point comme le vrai pole de la terre.

Comme l'exiſtence d'un tel axe qui accompagne toujours également le vrai pole, a lieu dans l'hypotheſe, que le pole avance uniformement dans un petit cercle, & que la planete conſerve toujours la même viteſſe de rotation, il ſera important d'examiner, en quelles autres hypotheſes un tel axe puiſſe auſſi exiſter. Pour cet effet nous n'avons qu'à ſuppoſer conſtamment $x = f$, & $y = g$, afin que le point M nous montre cet axe. Alors nos premieres équations nous fourniſſent

$$dp \cos g - dq \sin p \sin g = 0 \quad \& \quad v\,dt = dq \cos p - \frac{dp \sin g - dq \sin p \cos g}{\operatorname{tang} f}$$

d'où

d'où nous tirons $dq = \frac{dp \cos g}{\sin g \sin p}$, & de là

$$vdt = \frac{dp \cos g \cos p}{\sin g \sin p} - \frac{dp}{\text{tang} f \sin g}.$$

Ou bien il faut 1°. que $\frac{dq \sin p}{dp}$ soit une quantité constante, & 2°, que $\frac{dq \cos p}{dp} - \frac{vdt}{dp}$ soit aussi une quantité constante, savoir la premiere égale à $\frac{\cos g}{\sin g}$, & la seconde à $\frac{1}{\text{tang} f \sin g}$. Quand un tel rapport entre le mouvement du pole & celui de rotation n'a pas lieu, il est douteux si le mouvement de la planete peut être réduit à un certain axe, comme dans ce cas. Car, s'il arrivoit, par exemple, que pendant que le pole marche uniformement dans un petit cercle, le mouvement de rotation devint subitement plus rapide, il est clair qu'après cette accélération l'axe de rotation seroit différent de celui qui auroit eu lieu auparavant, & que la planete n'auroit pas un axe fixe, dans le sens auquel on est accoutumé de se l'imaginer.

Par ce que je viens d'exposer, on comprend que c'est un probleme extrémement difficile, que de déterminer le mouvement de rotation d'une planete, quoiqu'on connoisse pour chaque tems le point du Ciel, autour duquel elle tourne avec la vitesse de rotation. La solution dépend de l'intégration de deux équations différentielles, qui paroit extrémement difficile. Considérons plus soigneusement les deux premieres, & posant pour abréger,

$$-v + \frac{dq \cos p}{dt} = L; \quad \frac{dp}{dt} = M \quad \& \quad \frac{dq \sin p}{dt} = N$$

de sorte que L, M, & N, soient des fonctions du tems t, & nos deux équations pour déterminer les inconnues PV $= x$ & ZPV $= y$ seront.

dx

$$dx = \mathrm{M}dt \cos y - \mathrm{N}dt \sin y;\ dy = \mathrm{L}dt - \frac{\mathrm{M}dt \sin y - \mathrm{N}dt \cos y}{\operatorname{tang} x}$$

ou $dy \sin x = \mathrm{L}dt \sin x - \mathrm{M}dt \cos x \sin y - \mathrm{N}dt \cos x \cos y$

d'où nous tirons les deux combinaiſons ſuivantes,

$$dx \cos x \sin y + dy \sin x \cos y = \mathrm{L}dt \sin x \cos y - \mathrm{N}dt \cos x = d.\sin x \sin y$$

$$dx \cos x \cos y - dy \sin x \sin y = \mathrm{M}dt \cos x - \mathrm{L}dt \sin x \sin y = d.\sin x \cos y.$$

Pour dégager ces formules des ſinus & coſinus, poſons $\sin x \sin y = r$ & $\sin x \cos y = s$, d'où nous tirons $\sin x^2 = rr + ss$ & $\cos x = \sqrt{(1 - rr - ss)}$, & nous obtiendrons les deux équations ſuivantes

$$dr = \mathrm{L}s\,dt - \mathrm{N}dt \sqrt{(1 - rr - ss)}$$

$$ds = -\mathrm{L}r\,dt + \mathrm{M}dt \sqrt{(1 - rr - ss)}$$

Voilà donc deux équations différentielles ordinaires, dont il faut chercher la réſolution; ce qui eſt un objet de la pure analyſe. Puiſque la réſolution générale eſt aſſujettie à de fort grandes difficultés, il ſera important de remarquer un cas aſſès général, où l'on peut achever l'intégration. Car, en combinant ces dernieres équations, on aura

$$\mathrm{M}dr + \mathrm{N}ds + \mathrm{LN}r\,dt - \mathrm{LM}s\,dt = 0.$$

Soit pour abréger $\mathrm{L}dt = d\theta$; & le cas que j'ai en vûe aura lieu, lorsque $\mathrm{M} = \mathrm{N} \operatorname{tang} \theta$, ou $\int \mathrm{L}dt = \mathrm{A} \operatorname{tang}. \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$. Poſons donc $\mathrm{M} = \mathrm{T} \sin \theta$, & $\mathrm{N} = \mathrm{T} \cos \theta$, de ſorte que $\mathrm{T} = \sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})}$, & la derniere équation prendra cette forme:

$$dr \sin \theta + ds \cos \theta + r\,d\theta \cos \theta - s\,d\theta \sin \theta = 0$$

dont l'intégrale eſt évidemment

$$r \sin \theta + s \cos \theta = \text{Conſt.} = \sin \gamma.$$

Donc $s = \frac{\sin \gamma - r \sin \theta}{\cos \theta}$; laquelle valeur étant ſubſtituée dans la premiere donne

$$dr\cos\theta + rd\theta\sin\theta - d\theta\sin\gamma + T\,dt\cos\theta\sqrt{(\cos\theta^2 - \sin\gamma^2 + 2r\sin\gamma\sin\theta - rr)} = 0.$$

Posons $r = u\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta$ pour avoir

$$du\cos\theta^2 + T\,dt\cos\theta\sqrt{(\cos\theta^2 - \sin\gamma^2 + \sin\gamma^2\sin\theta^2 - uu\cos\theta^2)} = 0$$

& en divisant par $\cos\theta^2$

$$du + T\,dt\sqrt{(\cos\gamma^2 - uu)} = 0 \text{ ou } \frac{du}{\sqrt{(\cos\gamma^2 - uu)}} + T\,dt = 0.$$

Donc $A\sin\dfrac{u}{\cos\gamma} + \int T\,dt = 0.$

Soit $\int T\,dt = \odot$, & ayant $u = -\cos\gamma\sin\odot$, on aura $r = \sin\gamma\sin\theta - \cos\gamma\cos\theta\sin\odot$, & $s = \sin\gamma\cos\theta + \cos\gamma\sin\theta\sin\odot$. Donc $\sin x = \sqrt{(\sin\gamma^2 + \cos\gamma^2\sin\odot^2)}$ & $\cos x = \cos\gamma\cos\odot$. Enfin $\tang y = \dfrac{\tang\gamma\,\tang\theta - \sin\odot}{\tang\gamma + \tang\theta\sin\odot}$: d'où l'on tire evidemment

$$y = \theta - A\tang\frac{\tang\gamma}{\sin\odot}.$$

Donc, prenant $\odot = C + \int dt\sqrt{(MM + NN)}$, toutes les fois que $\int L\,dt = A\tang\dfrac{M}{N}$, les deux inconnues x & y se déterminent en sorte:

$$\cos x = \cos\gamma\cos\odot \;\&\; y = A\tang\frac{M}{N} - A\tang\frac{\sin\odot}{\tang\gamma}.$$

Ce cas intégrable nous mene encore à quelques autres. Car posons $\sqrt{(1 - rr - ss)} = u$, pour avoir ces deux équations

I. $dr - Lsdt + Nudt = 0$

II. $ds - Mudt + Lrdt = 0$

& puisque $-rdr - sds = udu$, nous en tirons cette troisième semblable aux précédentes:

III. $du - Nrdt + Msdt = 0$

Premier cas intégrable. Donc, puisque les deux premieres ont été intégrées dans le cas $\int L dt = A \text{ tang } \frac{M}{N}$, en sorte que posant

$$\int L dt = \theta \;\&\; \int dt \sqrt{(MM + NN)} = \Theta$$

nous en avons obtenu

$$\begin{aligned} r &= \sin\gamma \sin\theta - \cos\gamma \cos\theta \sin\Theta \\ s &= \sin\gamma \cos\theta + \cos\gamma \sin\theta \sin\Theta \end{aligned} \quad \& \; u = \cos\gamma \cos\Theta$$

Second cas intégrable. La seconde avec la troisieme admettra aussi l'intégration dans le cas $\int M dt = A \text{ tang } \frac{N}{L}$, car posant

$$\int M dt = \eta \;\&\; \int dt \sqrt{(NN + LL)} = H$$

nous aurons

$$\begin{aligned} s &= \sin\beta \sin\eta - \cos\beta \cos\eta \sin H \\ u &= \sin\beta \cos\eta + \cos\beta \sin\eta \sin H \end{aligned} \quad \& \; r = \cos\beta \cos H$$

Troisieme cas intégrable. De la même maniere la troisieme avec la premiere fournira une solution lorsque $\int N dt = A \text{ tang } \frac{L}{M}$. Alors posant

$$\int N dt = \zeta \;\&\; \int dt \sqrt{.(LL + MM)} = \Sigma$$

nous aurons

$$\begin{aligned} u &= \sin\alpha \sin\zeta - \cos\alpha \cos\zeta \sin\Sigma \\ r &= \sin\alpha \cos\zeta + \cos\alpha \sin\zeta \sin\Sigma \end{aligned} \quad \& \; s = \cos\alpha \cos\Sigma$$

où il faut remarquer que $\cos x = u$ & $\text{tang } y = \frac{r}{s}$; & outre cela:

$$L = -v + \frac{dq \cos p}{dt}; \quad M = \frac{dp}{dt} \quad \& \; N = \frac{dq \sin p}{dt}.$$

Le cas du milieu renferme celui où le pole se mouvoit dans un petit cercle uniformément, pendant que la rotation étoit aussi uniforme; mais

mais il est infiniment plus général, d'où il mérite une attention particuliere. Or d'abord nous avons $\int M dt = c + p$, d'où la condition de ce cas $\frac{N}{L} = \text{tang} \int M dt$ donne

$$\frac{dq \sin p}{dq \cos p - v dt} = \text{tang}(c + p), \quad \text{\& partant}$$

$$v dt = \frac{dq \cos p \, \text{tang}(c + p) - dq \sin p}{\text{tang}(c + p)} = \frac{dq \sin c}{\sin(c + p)}$$

d'où nous concluons $H = \int \frac{dq \sin p}{\sin(c+p)}$ à cause de $L = N \cot(c+p)$, & $\sqrt{(NN + LL)} = \frac{N}{\sin(p + c)}$. Par conséquent notre solution sera; posant $\eta = p + c$,

$$\cos x = \sin \beta \cos \eta + \cos \beta \sin \eta \sin H.$$

$$\text{tang}\, y = \frac{\cos \beta \cos H}{\sin \beta \sin \eta - \cos \beta \cos \eta \sin H}$$

Nous avons rapporté jusqu'ici le mouvement du pole à un point fixe Z, qui dépend de notre volonté, ne changeant rien dans le mouvement même. Donc, ayant réussi à intégrer nos équations pour un certain point fixe Z, si l'on veut rapporter le mouvement à un autre point fixe quelconque, l'intégration doit également réussir, puisqu'elle découle de la précédente.

Délivrons nos recherches de la considération du point arbitraire Z; & puisque l'arc $PV = x$ n'en dépend point, posons l'angle $VPp = z$, & nous aurons l'angle $ZPV = y = 90° + z + pPv$.

Or, posant comme ci-dessus $-v + \frac{dq \cos p}{dt} = L$; $\frac{dp}{dt} = M$;

& $\frac{dq \sin p}{dt} = \mathrm{N}$, on aura $\sin p\mathrm{P}v = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})}}$, &

$\operatorname{cof} p\mathrm{P}v = \frac{}{\sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})}}$, & $\operatorname{tang} p\mathrm{P}v = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, & de là

$dy = dz + \frac{\mathrm{N}d\mathrm{M} - \mathrm{M}d\mathrm{N}}{\mathrm{MM} + \mathrm{NN}}$; & $\sin y = \frac{-\mathrm{M}\sin z + \mathrm{N}\operatorname{cof} z}{\sqrt{(\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)}}$,

& $\operatorname{cof} y = \frac{-\mathrm{N}\sin z - \mathrm{M}\operatorname{cof} z}{\sqrt{(\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)}}$.

Cela poſé, puisque nos équations ſont

$dx = dt(\mathrm{M}\operatorname{cof} y - \mathrm{N}\sin y)$ & $dy = \mathrm{L}dt - \frac{dt}{\operatorname{tang} x}(\mathrm{M}\sin y + \mathrm{N}\operatorname{cof} y)$

par ces ſubſtitutions elles ſeront changées en

$$dx = -dt \operatorname{cof} z \sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})} \quad \&$$

$dz\sin x = dt\operatorname{cof} x\sin z\sqrt{(\mathrm{MM}+\mathrm{NN})} + \mathrm{L}dt\sin x + \frac{(\mathrm{M}d\mathrm{N} - \mathrm{N}d\mathrm{M})dt\sin x}{\mathrm{MM} + \mathrm{NN}}$

Poſons pour ábréger:

$$\sqrt{(\mathrm{MM} + \mathrm{NN})} = \mathrm{I} \quad \& \quad \mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}d\mathrm{N} - \mathrm{N}d\mathrm{M}}{(\mathrm{MM}+\mathrm{NN})dt} = \mathrm{K},$$

pour avoir

$dx + \mathrm{I}dt\operatorname{cof} z = 0$ & $dz\sin x - \mathrm{I}dt\operatorname{cof} x\sin z - \mathrm{K}dt\sin x = 0$

Poſons comme auparavant

$$\sin x \sin z = r;\ \sin x \operatorname{cof} z = s \quad \& \quad \operatorname{cof} x = u,$$

& la combinaiſon fournira ces équations:

$$dr - \mathrm{K}s\,dt = 0 \quad \& \quad ds + \mathrm{K}r\,dt + \mathrm{I}u\,dt = 0$$

où, puiſque $rr + ss + uu = 1$, cette troiſieme y peut être ajoutée: $du - \mathrm{I}s\,dt = 0$; donc $\mathrm{I}dr - \mathrm{K}du = 0$.

Ici

Ici on peut remarquer aussi trois cas intégrables:

1°. Si I $=$ o, ce qui ne sauroit avoir lieu, à moins qu'il ne fût M $=$ o & N $=$ o. Alors on aura $u = c$; & $s = \sqrt{(1 - cc - rr)}$,

donc $K dt = L dt = \frac{dr}{\sqrt{(1 - cc - rr)}}$, & partant

A sin $\frac{r}{\sqrt{(1 - cc)}} = \int L dt = \theta$, posant $\int L dt = \theta$. Ensuite $r = \sqrt{(1 - cc)}.\sin\theta$; $s = \sqrt{(1 - cc)}.\cos\theta$; & $u = c$: ce qui est le cas du pole reposant.

2°. Le second cas seroit K $=$ o, mais puisque le troisieme le renferme, j'y passe dabord.

3°. Soit $K = m I$, & l'équation $dr - m du = 0$ donne: $r = mu + n$; & $s = \sqrt{(1 - uu - (mu + n)^2)}$;

d'où la troisieme donne: $\int I dt \sqrt{(1 + mm)} = \text{A}\sin \frac{u(1 + mm) + mn}{\sqrt{(1 + mm - nn)}}$:

& de là $u = \frac{-mn}{1 + mm} + \frac{\sqrt{(1 + mm - nn)}}{1 + mm} \sin \int I dt \sqrt{(1 + mm)}$

$r = \frac{n}{1 + mm} + \frac{m\sqrt{(1 + mm - nn)}}{1 + mm} \sin \int I dt \sqrt{(1 + mm)}$

& $s = \frac{\sqrt{(1 + mm - nn)}}{\sqrt{(1 + mm)}} \cos. \int I dt \sqrt{(1 + mm)}$.

Ce troisième cas a donc lieu sous cette condition:

$$L dt = \frac{N dM - M dN}{MM + NN} + m dt \sqrt{(MM + NN)},$$

ou $\int L dt = \text{A tang} \frac{M}{N} + m \int dt \sqrt{(MM + NN)}$;

 d'où

d'où, si $m = 0$, résulte le premier des cas précédens; mais si m est une quantité constante quelconque, ces cas intégrables seront différens des précédens.

On pourra trouver encore d'autres cas intégrables en posant $y = z + T$, prenant pour T une fonction quelconque du tems t; alors, faisant cette substitution, on aura

$$dx = dt \cos z (M \cos T - N \sin T) - dt \sin z (M \sin T + N \cos T)$$

$$dz \sin x = (L dt - dT) \sin x - dt \cos x \sin z (M \cos T - N \sin T) - dt \cos p \cos z (M \sin T + N \cos T)$$

& de là posant $\sin x \sin z = r$; $\sin x \cos z = s$ & $\cos x = u$, de sorte que $rr + ss + uu = 1$, on tirera ces trois équations:

I. $dr - s(L dt - dT) + u dt (M \sin T + N \cos T) = 0$

II. $ds - u dt (M \cos T - N \sin T) + r (L dt - dT) = 0$

III. $du - r dt (M \sin T + N \cos T) + s dt (M \cos T - N \sin T) = 0$

qui étant semblables aux trois supérieures, en posant $L - \frac{dT}{dt}$; $M \sin T + N \cos T$ & $M \cos T - N \sin T$, au lieu de L, N & M, les trois cas intégrables seront;

1°. Si $\int L dt = A \tang \frac{M}{N}$ comme ci-dessus.

2°. Si $\int dt (M \cos T - N \sin T) = A \tang \frac{dt (M \sin T + N \cos T)}{L dt - dT}$

3°. Si $\int dt (M \sin T + N \cos T) = A \tang \frac{L dt - dT}{dt (M \cos T - N \sin T)}$

Or outre cela, si $\tang T = \frac{\beta M - \alpha N}{\alpha M + \beta N}$, on pourra trouver l'intégrale comme ci-dessus, si

$$\int L dt = A \tang \frac{M}{N} + \gamma \int dt \sqrt{(MM + NN)}$$

Tant

Tant de cas intégrables devroient bien enfin mener à l'intégration générale.

Or on peut encore trouvèr plusieurs autres cas, comme on verra par le probleme suivant:

PROBLEME

Les lettres L, M & N marquant des fonctions quelconques de la variable t, & x, y, z étant des quantités inconnües, en sorte que $xx + yy + zz = 1$, trouver les conditions des fonctions L, M & N, qui rendent intégrables ces trois équations:

$$\text{I.} \quad dx - Lydt + Nzdt = 0$$
$$\text{II.} \quad dy - Mzdt + Lxdt = 0$$
$$\text{III.} \quad dz - Nxdt + Mydt = 0$$

dont deux renferment déjà la troisieme.

SOLUTION

Nous avons déjà vu trois cas où l'intégration a lieu, qui sont

$1^\circ.$ si $\int Ldt = A \tang \frac{M}{N}$; $2^\circ.$ si $\int Mdt = A \tang \frac{N}{L}$; $3^\circ.$ si $\int Ndt = A \tang \frac{L}{M}$.

Donc, quand nous pourrons trouver des substitutions, qui changent les trois équations proposées en d'autres d'une forme semblable, celles-ci nous fourniront de nouvelles conditions d'intégrabilité.

Posons $x = x' \cos P - y' \sin P$ & $y = x' \sin P + y' \cos P$, afin que $xx + yy = x'x' + y'y'$, & les deux premieres équations seront changées en celles-ci.

$$dx' \cos P - dy' \sin P - x'dP \sin P - y'dP \cos P + Nzdt = 0$$
$$\qquad - Lx'dt \sin P - Ly'dt \cos P$$

$$dx' \sin P + dy' \cos P + x'dP \cos P - y'dP \sin P - Mzdt = 0$$
$$\qquad + Lx'dt \cos P - Ly'dt \sin P$$

dont

dont la combinaiſon fournit celles-ci:

$$dx' - y'(dP + Ldt) + zdt(N \cos P - M \sin P) = 0$$
$$dy' - zdt(N \sin P + M \cos P) + x'(dP + Ldt) = 0$$
$$dz - x'dt(N \cos P - M \sin P) + y'dt(N \sin P + M \cos P) = 0$$

dont les trois cas intégrables ſeront:

$$\int Ldt + P = \text{A tang} \frac{N \sin P + M \cos P}{N \cos P - M \sin P} = \text{A tang} \frac{M}{N} + P$$

$$\int dt(N \sin P + M \cos P) = \text{A tang} \frac{N \cos P - M \sin P}{Ldt + dP} dt$$

$$\int dt(N \cos P - M \sin P) = \text{A tang} \frac{Ldt + dP}{(N \sin P + M \cos P)\, dt}$$

dont le premier eſt deja compris dans les précédens.

Si nous changeons ſemblablement les variables y & z, nous trouverons ces cas:

$$\int dt(L \sin Q + N \sin Q) = \text{A tang} \frac{L \cos Q - N \sin Q}{Mdt + dQ} dt$$

$$\int dt(L \cos Q - N \sin Q) = \text{A tang} \frac{Mdt + dQ}{(L \sin Q + N \cos Q)\, dt}$$

Outre cela un pareil changement dans les deux variables z & x fournira ces conditions:

$$\int dt(M \sin R + L \cos R) = \text{A tang} \frac{M \cos R - L \sin R}{Ndt + dR} dt$$

$$\int dt(M \cos R - L \sin R) = \text{A tang} \frac{Ndt + dR}{(M \sin R + L \cos R)\, dt}$$

Si

Si nous regardons les trois équations dérivées comme les principales, de ſorte qu'au lieu des lettres L, M & N, nous ayons à préſent

$$L + \frac{dP}{dt};\quad M\,\text{coſ}\,P + N\,\text{ſin}\,P \quad \& \quad N\,\text{coſ}\,P - M\,\text{ſin}\,P,$$

nous en tirerons encore les quatre conditions ſuivantes

$$\int dt\left(L\,\text{ſn}Q + \frac{dP}{dt}\text{ſn}Q + N\,\text{cſ}P\,\text{cſ}Q - M\,\text{ſn}P\,\text{cſ}Q\right) = A\,\text{tang}\,\frac{L\,\text{cſ}Q + \frac{dP}{dt}\text{cſ}Q - N\,\text{cſ}P\,\text{ſn}Q + M\,\text{ſn}P\,\text{ſn}Q}{M\,\text{cſ}P + N\,\text{ſn}P + \frac{dQ}{dt}}$$

$$\int dt\left(L\,\text{cſ}Q + \frac{dP}{dt}\text{cſ}Q - N\,\text{cſ}P\,\text{ſn}Q + M\,\text{ſn}P\,\text{ſn}Q\right) = A\,\text{tang}\,\frac{M\,\text{cſ}P + N\,\text{ſn}P + \frac{dQ}{dt}}{L\,\text{ſn}Q + \frac{dP}{dt}\text{ſn}Q + N\,\text{cſ}P\,\text{cſ}Q - M\,\text{ſn}P\,\text{cſ}Q}$$

$$\int dt\left(M\,\text{cſ}P\,\text{ſn}R + N\,\text{ſn}P\,\text{ſn}R + L\,\text{cſ}R + \frac{dP}{dt}\text{cſ}R\right) = A\,\text{tang}\,\frac{M\,\text{cſ}P\,\text{cſ}R + N\,\text{ſn}P\,\text{cſ}R - L\,\text{ſn}R - \frac{dP}{dt}\text{ſn}R}{N\,\text{cſ}P - M\,\text{ſn}P + \frac{dR}{dt}}$$

$$\int dt\left(M\,\text{cſ}P\,\text{cſ}R + N\,\text{ſn}P\,\text{cſ}R - L\,\text{ſn}R - \frac{dP}{dt}\text{ſn}R\right) = A\,\text{tang}\,\frac{N\,\text{cſ}P - M\,\text{ſn}P + \frac{dR}{dt}}{M\,\text{cſ}P\,\text{ſn}R + N\,\text{ſn}P\,\text{ſn}R + L\,\text{cſ}R + \frac{dP}{dt}\text{cſ}R}$$

De ces quatre conditions on peut encore former deux fois quatre nouvelles, en mettant pour les trois lettres L, M, N, les mêmes dans cet ordre M, N, L, ou dans celui-ci N, L, M. Enſuite, pour ces mêmes lettres dans ces dernieres formules, on peut écrire

$$L + \frac{dS}{dt};\quad M\,\text{coſ}\,S + N\,\text{ſin}\,S;\quad N\,\text{coſ}\,S - M\,\text{ſin}\,S,$$

ou

ou bien $M + \frac{dS}{dt}$; $N \cos S + L \sin S$; $L \cos S - N \sin S$;

ou encore $N + \frac{dS}{dt}$; $L \cos S + M \sin S$; $M \cos S - L \sin S$;

& cela encore en changeant l'ordre de ces quantités, de sorte que le nombre de telles formules peut être multiplié à l'infini, en mettant toujours dans les formules dernierement trouvées pour les lettres L, M, N, ces nouvelles valeurs. Par ce moyen on parviendra à des ordres plus compliqués, qui contiendront un angle arbitraire de plus, comme sont P, Q, R, S; lesquels pouvant être pris à volonté, la multitude des cas qui admettent l'intégration, est tout à fait inconcevable; ce qui est d'autant plus remarquable, que généralement, sans supposer une certaine rélation entre les quantités L, M & N, il ne paroit point de méthode qui puisse conduire à l'intégration. C'est un sujet qui semble tout à fait nouveau dans l'Analyse, & qui pourra donner occasion à quantité de belles découvertes.



DE

DE

LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES

ET DE

LA SOMMATION DES SERIES,

PAR M. WALMESLEY.

La méthode des differences est d'une si grande utilité dans plusieurs parties des Mathématiques, que j'ai crû qu'il ne seroit pas inutile d'en déveloper les principes. Elle sert à la solution d'un grand nombre de problemes de différente espéce; mais je me suis restraint à l'appliquer à la quadrature des courbes, & à faire voir l'usage qu'on en peut faire dans l'Astronomie.

Comme la sommation des séries à beaucoup de rapport à la méthode des différences, j'ai aussi ajoûté quelque chose touchant cette théorie. L'on sçait que ces matieres ont été traitées par MM. *Newton*, *Stirling*, *Euler*, & autres Geométres: ainsi j'ai tâché de profiter de ce qu'ils en ont écrit.

PROBLEME I.

Faire passer une courbe parabolique par autant de points donnés qu'on voudra.

SOLUTION.

Soient donnés les points P, Q, R, S, T, &c. (Fig. 1.) desquels à une droite A O prise à volonté, qu'on tire les lignes P A, Q L, R M, SN,

SN; TO, &c. paralleles entre elles, & faisant avec AO un angle donné, & regardant ces lignes comme autant d'ordonnées à la courbe qu'on cherche, on tirera d'un point quelconque Z de la ligne AO une autre droite parallele ZK, qu'on suppose rencontrer la courbe en K: cela posé, on nommera AZ, x; ZK, y; AL, a; AM, b; AN, c; AO, d; &c. & l'équation de la courbe aura cette forme

$$
\begin{aligned}
y = \; & A + \\
& Px + \\
& Qx(x-a) + \\
& Rx(x-a)(x-b) + \\
& Sx(x-a)(x-b)(x-c) + \\
& Tx(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + \quad \&c.
\end{aligned}
$$

Si l'on prenoit le point Z de l'autre côté du point A, il faudroit mettre le signe $-$ devant x.

1°. Comme l'équation générale qu'on cherche, doit convenir à tous les cas possibles, on voit que, s'il n'étoit donné qu'un point P, on auroit $x = 0$, & $y = PA = A$, & tous les termes excepté le premier doivent être nuls, lesquels par conséquent seront multipliés par x. S'il étoit donné deux points P, Q, dans ce cas a sera égale à l'une des valeurs de l'abscisse, & au lieu d'une courbe on auroit une ligne droite qui passeroit par les points P & Q, dont l'équation seroit $y = A + Px$, & tous les autres termes de l'équation générale étant nuls seront multipliés par $x - a = 0$. Pareillement, si trois points P, Q, R, étoient donnés, on auroit $x - b = 0$, & la courbe seroit la parabole ordinaire dont l'équation est $y = A + Px + Qx(x - a)$, les autres termes de l'équation étant multipliés par $x - b$ pour qu'ils s'évanouissent. De même, si quatre points étoient donnés, la courbe seroit la parabole cubi-

cubique, & son équation $y = A + Px + Qx(x - a) + Rx(x - a)(x - b)$, & ainsi des autres cas. Par conséquent l'équation cherchée aura la forme que nous lui avons donnée.

2°. Pour trouver la valeur des coëfficients A, P, Q, R, &c. on supposera l'abscisse x successivement égale à o, a, b, c, d, &c. & les ordonnées correspondantes à A, α, β, γ, δ, &c. & on aura les équations suivantes

$$A = A$$

$$\alpha = A + aP$$

$$\beta = A + bP + bQ(b - a)$$

$$\gamma = A + cP + cQ(c - a) + cR(c - a)(c - b)$$

$$\delta = A + dP + dQ(d - a) + dR(d - a)(d - b) + dS(d - a)(d - b)(d - c) \quad \&c.$$

on retranchera chacune de ces équations de celle qui suit, & on divisera les restantes par la distance respective des ordonnées, ce qui donnera

$$\frac{\alpha - A}{a} = P$$

$$\frac{\beta - \alpha}{b - a} = P + bQ$$

$$\frac{\gamma - \beta}{c - b} = P + Q(c + b - a) + cR(c - a)$$

$$\frac{\delta - \gamma}{d - c} = P + Q \times \overline{d + c - a} + R \times \overline{d^2 + dc + c^2 + ab - \overline{b + a} \times \overline{d + c}} + dS \times \overline{d - a} \times \overline{d - b}$$

&c.

on retranchera chacune de ces équations les unes des autres, & on divisera les restantes par la distance respective des ordonnées prises

 deux

deux à deux, & faisant $\frac{\beta - \alpha}{b - a} = 1P$, $\frac{\gamma - \beta}{c - b} = 2P$, $\frac{\delta - \gamma}{d - c} = 3P$, & il viendra

$$\frac{1P - P}{b} = Q$$

$$\frac{2P - 1P}{c - a} = Q + cR$$

$$\frac{3P - 2P}{d - b} = Q + R \times \overline{d + c - a} + dS \times \overline{d - a} \qquad \&c.$$

En opérant de la même façon, & faisant $\frac{2P - 1P}{c - a} = 1Q$, $\frac{3P - 2P}{d - b} = 2Q$, &c. on aura

$$\frac{1Q - Q}{b} = R$$

$$\frac{2Q - 1Q}{d - a} = R + dS \qquad \&c.$$

& de là en faisant $\frac{2Q - 1Q}{d - a} = 1R$, &c. on tirera,

$$\frac{1R - R}{d} = S \qquad \&c.$$

De la même maniere on pourroit déterminer les coëfficients des autres termes. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

Par cette façon d'opérer il est clair, que si on a une suite d'ordonnées A, 1A, 2A, 3A, 4A, &c. qui correspondent aux abscisses o, a, b, c, d, &c. & qu'on suppose

$$\frac{1A-A}{a}=P,\quad \frac{2A-1A}{b-a}=1P,\quad \frac{3A-2A}{c-b}=2P,\quad \frac{4A-3A}{d-c}=3P,\ \&c.$$

$$\frac{1P-P}{b}=Q,\quad \frac{2P-1P}{c-a}=1Q,\quad \frac{3P-2P}{d-b}=2Q,\ \&c.$$

$$\frac{1Q-Q}{c}=R,\quad \frac{2Q-1Q}{d-a}=1R,\ \&c.$$

$$\frac{1R-R}{d}=S,\ \&c.$$

&c.

l'équation de la courbe parabolique, qui passera par les extrémités de toutes les ordonnées, sera telle que nous l'avons énoncée dans le probleme, & les quantités A, P, Q, R, S, &c. seront les coëfficients de ses termes.

Exemple.

Supposé qu'on ait observé les quatre longitudes suivantes d'une Comete:

jours	heures	minutes	Long. observée			
1.	5.	11½.	9^{D}.	32'.	26''	♈
2.	3.	53.	9.	6.	40.	
5.	4.	42.	7.	47.	16.	
7.	3.	00.	7.	57.	34.	

& qu'on veuille savoir quelle étoit sa longitude le sixiéme jour à trois heures quarante minutes & demie. Sur une droite AN (fig. 2.) qu'on prenne les parties AL, LM, MN, proportionelles aux temps écoulés entre les observations, & des points A, L, M, N, qu'on éleve les droites AP, LQ, MR, NS, proportionelles aux longitudes observées, & faisant avec AN un angle pris à volonté; & concevant une courbe parabolique qui passe par les points P, Q, R, S, on prendra

prendra AZ proportionelle à l'intervalle de temps compris entre la premiere observation & l'instant pour lequel on demande la longitude de la Comete, & tirant l'ordonnée ZK parallele aux autres ordonnées, elle marquera la longitude cherchée, & sera déterminée par cette équation

$$ZK = A + Px + Qx \times \overline{x - a} + Rx \times \overline{x - a} \times \overline{x - b}$$

mais on a $QL - PA = -25'.46''$, $RM - QL = -1^\circ.19'.24''$, $SN - RM = -49'.42''$; & aussi $a = 22^h.41\frac{1}{2}'$, $b = 3^j.23^h.30\frac{1}{2}'$. $c = 5^j.21^h.48\frac{1}{2}'$; $x = 4^j.22^h.29'$: ces valeurs donnent $Px = -2^\circ.14'.32\frac{1}{2}''$; $Qx \times \overline{x - a} = 5'.21\frac{1}{2}''$; $Rx \times \overline{x - a} \times \overline{x - b} = -2'.15''$, & par conséquent $7^\circ.21'.00''$ pour la longitude cherchée.

De cette façon on peut interpoler avec assés d'exactitude les Observations astronomiques, pourvû qu'elles ne soint pas trop éloignées par le tems les unes des autres, & que la vitesse du corps observé ne soit pas trop grande.

COROLLAIRE II.

Maintenant, si on suppose que la distance entre les ordonnées est par tout la même, & égale à l'unité, on aura $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, &c. &

$$\alpha - A = P,\ \beta - \alpha = 1P,\ \gamma - \beta = 2P,\ \delta - \gamma = 3P,\ \&c.$$

$$\frac{\beta - 2\alpha + A}{1.2} = Q,\ \frac{\gamma - 2\beta + \alpha}{1.2} = 1Q,\ \frac{\delta - 2\gamma + \beta}{1.2} = Q,\ \&c.$$

$$\frac{\gamma - 3\beta + 3\alpha - A}{1.2.3} = R,\ \frac{\delta - 3\gamma + 3\beta - \alpha}{1.2.3} = 1R,\ \&c.$$

$$\frac{\delta - 4\gamma + 6\beta - 4\alpha + A}{1.2.3.4} = S,\ \&c.$$

&c.

d'où

d'où il eſt clair que, ſi A repréſente la premiere ordonnée, B la différence des deux premieres ordonnées, C la différence ſeconde des trois premieres ordonnées, D la différence troiſiéme des quatre premieres ordonnées, et ainſi de ſuite, en ôtant toûjours celles qui précédent de celles qui ſuivent; on aura $B = P$, $\frac{C}{1.2} = Q$, $\frac{D}{1.2.3} = R$, $\frac{E}{1.2.3.4} = S$, etc. et l'équation de la courbe ſera

$$y = A +$$
$$B \times \frac{x}{1} +$$
$$C \times \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} +$$
$$D \times \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} +$$
$$E \times \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times \frac{x-3}{4} +$$
$$F \times \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3} \times \frac{x-3}{4} \times \frac{x-4}{5} + \text{ etc.}$$

Il eſt clair auſſi qu'on aura facilement la valeur des différences B, C, D, etc. ſans les déduire les unes des autres, puisque leurs termes ſont multipliés par les coëfficiens des termes du binome élevé à la puiſſance $n - 1$, n répreſentant les nombre des ordonnées.

Dans cette propoſition on a placé le commencement de l'abſciſſe à la premiere ordonnée; mais, s'il étoit placé à tout autre point de la ligne AO, on pourroit également réſoudre le probleme. Cependant la ſolution paroit être plus élégante lorsque le commencement de l'abſciſſe eſt fixé préciſément au milieu de toutes les ordonnées, ce qu'on verra dans les deux problemes ſuivans.

 PRO-

PROBLEME II.

Trouver la courbe parabolique qui passera par les extrémités d'autant d'ordonnées qu'on voudra, dont le nombre est impair.

SOLUTION.

Soit une suite d'ordonnées &c: GD, HC, IB, PA, QL, RM, SN, &c. (fig. 3.) entre lesquelles PA est celle du milieu; on supposera que chacune des ordonnées, qui se trouvent d'un côté de PA est à égale distance de PA, que l'ordonnée correspondante de l'autre côté, c'est à dire, que $AL = AB$, $AM = AC$, $AN = AD$, &c.; cela posé, on nommera AL, a; AM, b; AN, c; &c. une autre ordonnée quelconque ZK, y; & son abscisse AZ, x; & l'équation de la courbe aura cette forme

$$\begin{aligned} y = A &+ \\ &Px + Qxx \\ &\overline{Rx + Sxx} \times \overline{xx - aa} + \\ &\overline{Tx + Vxx} \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} + \\ &\overline{Wx + Zxx} \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} \times \overline{xx - cc} + \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Si l'ordonnée ZK se trouvoit de l'autre côté du point A, son abcisse x seroit negative.

1°. Comme l'équation générale qu'on cherche doit convenir à tous les cas possibles, on voit que, s'il n'y avoit qu'une seule ordonnée PA, on auroit $x = 0$, $y = PA = A$, & que tous les autres termes étant nuls doivent être multipliés par x. S'il y avoit trois ordonnées QL, PA, IB, la courbe seroit la *parabole Apollonienne* dont l'équation est $y = A + Px + Qxx$; & comme aux points L & B, l'on a $x = a$, & $x = -a$, ou $xx - aa = 0$, les autres termes de l'équation générale devant être nuls seront multipliés par $xx - aa$. Si le nombre des ordonnées étoit cinq, sept, neuf, &c. la parabole seroit du quatrieme, sixieme, huitieme, &c. degré;

degré ; & par un raiſonnement ſemblable à celui que nous avons fait dans le cas de trois ordonnées, on trouveroit que tous les termes de l'équation générale doivent être tels que nous les avons aſſignés.

2°. Pour avoir les coëfficients P, Q, R, S, &c. on nommera les ordonnées QL, α; RM, β; SN, γ; &c. & IB, κ; HC, λ; GD, μ; &c. & l'on ſuppoſera l'abſciſſe x ſucceſſivement égale à, $+a$, $-a$; $+b$, $-b$; $+c$, $-c$; &c. ce qui donnera deux ſuites d'équations

$$\begin{cases} \alpha = A + aP + aaQ \\ \beta = A + bP + bbQ + \overline{bR + bbS} \times \overline{bb - aa} \\ \gamma = A + cP + ccQ + \overline{cR + ccS} \times \overline{cc - aa} + \overline{cT + ccV} \times \overline{cc - aa} \times \overline{cc - bb} \\ \quad \text{\&c.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa = A - aP + aaQ \\ \lambda = A - bP + bbQ - \overline{bR - bbS} \times \overline{bb - aa} \\ \mu = A - cP + ccQ - \overline{cR - ccS} \times \overline{cc - aa} - \overline{cT - ccV} \times \overline{cc - aa} \times \overline{cc - bb} \\ \quad \text{\&c.} \end{cases}$$

on retranchera les équations de la ſeconde ſuite des correſpondantes de la premiere ſuite, & faiſant la réduction on trouvera

$$\begin{cases} \frac{\alpha - \kappa}{2a} = P \\ \frac{\beta - \lambda}{2b} = P + R \times \overline{bb - aa} \\ \frac{\gamma - \mu}{2c} = P + R \times \overline{cc - aa} + T \times \overline{cc - aa} \times \overline{cc - bb} \quad \text{\&c.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha - 2A + \varkappa}{2aa} = Q \\ \dfrac{\beta - 2A + \lambda}{2bb} = Q + S \times \overline{bb - aa} \\ \dfrac{\gamma - 2A + \mu}{2cc} = Q + S \times \overline{bb - aa} + V \times \overline{cc - aa} \times \overline{cc - bb} \text{ \&c.} \end{cases}$$

On retranchera les équations de la premiere de ces deux ſuites les unes des autres, c'eſt à dire, celles qui précédent de celles qui ſuivent, en faiſant $\frac{\beta - \lambda}{2b} = 1P$, $\frac{\gamma - \mu}{2c} = 2P$, &c. On retranchera de même les équations de la ſeconde ſuite les unes des autres, en faiſant $\frac{\beta - 2A + \lambda}{2bb} = 1Q$, $\frac{\gamma - 2A + \mu}{2cc} = 2Q$, &c. & par la réduction on aura

$$\begin{cases} \dfrac{1P - P}{bb - aa} = R \\ \dfrac{2P - 1P}{cc - bb} = R + T \times \overline{cc - aa} \quad \text{\&c.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1Q - Q}{bb - aa} = S \\ \dfrac{2Q - 1Q}{cc - bb} = S + V \times \overline{cc - aa} \quad \text{\&c.} \end{cases}$$

On répétera la même opération en faiſant $\frac{1P - P}{bb - aa} = P'$, $\frac{2P - 1P}{cc - bb} = 1P'$, &c. & $\frac{1Q - Q}{bb - aa} = Q'$; $\frac{2Q - 1Q}{cc - bb} = 1Q$, &c.

&

& l'on aura

$$\left\{\frac{1P' - P'}{cc - aa} = T\right. \qquad \&c.$$

$$\left\{\frac{1Q' - Q'}{cc - aa} = V\right. \qquad \&c.$$

Il eſt clair que de cette façon l'on peut déterminer la valeur des coëfficients d'autant de termes qu'on veut. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

De la ſolution de ce probleme il ſuit que, ſi l'on a une ſuite d'ordonnées &c. ν, μ, λ, $\varkappa$, A, α, β, γ, δ, &c. dont les diſtances à l'ordonnée A qui tient le milieu ſont reſpectivement, $+ a$, $- a$; $+ b$, $- b$; $+ c$, $- c$; $+ d$, $- d$; &c. en commençant par les ordonnées qui ſont les plus proches de A; & qu'on ſuppoſe

$$\frac{\alpha - \varkappa}{2a} = P,\ \frac{\beta - \lambda}{2b} = 1P,\ \frac{\gamma - \mu}{2c} = 2P,\ \frac{\delta - \nu}{2d} = 3P,\ \&c.$$

$$\frac{1P - P}{bb - aa} = R,\ \frac{2P - 1P}{cc - bb} = 1R,\ \frac{3P - 2P}{dd - cc} = 2R,\ \&c.$$

$$\frac{1R - R}{cc - aa} = T,\ \frac{2R - 1R}{dd - bb} = 1T,\ \&c.$$

$$\frac{1T - T}{dd - aa} = W,\ \&c.$$

&c.

& aussi

$$\frac{\alpha - 2A + \kappa}{2aa} = Q, \quad \frac{\beta - 2A + \lambda}{2bb} = 1Q, \quad \frac{\gamma - 2A + \mu}{2cc} = 2Q, \quad \&c.$$

$$\frac{1Q - Q}{bb - aa} = S, \quad \frac{2Q - 1Q}{cc - bb} = 1S, \quad \frac{3Q - 2Q}{dd - cc} = 2S, \quad \&c.$$

$$\frac{1S - S}{cc - aa} = V, \quad \frac{2S - 1S}{dd - bb} = 1V, \quad \&c.$$

$$\frac{1V - V}{dd - aa} = Z, \quad \&c.$$

&c.

il suit, dis-je, que l'équation de la courbe parabolique qui passera par les extremités de toutes les ordonnées sera telle que nous l'avons énoncée dans le probleme, & que les quantités P, Q, R, S, T, V, W, Z, &c. seront les coëfficients de ses termes.

COROLLAIRE II.

Maintenant, si l'on suppose que la distance entre les ordonnées est partout la même & $= a$, on aura $b = 2a$, $c = 3a$, $d = 4a$, &c. &

$$P = \frac{\alpha - \kappa}{1.2.a} \qquad Q = \frac{\alpha - 2A + \kappa}{1.2.a^2}$$

$$R = \frac{\beta - 2\alpha + 2\kappa - \lambda}{1.2.2.3.a^3} \qquad S = \frac{\beta - 4\alpha + 6A - 4\kappa + \lambda}{1.2.3.4.a^4}$$

$$T = \frac{\gamma - 4\beta + 5\alpha - 5\kappa + 4\lambda - \mu}{1.2.2.3.4.5.a^5} \qquad V = \frac{\gamma - 6\beta + 15\alpha - 20A + 15\kappa - 6\lambda + \mu}{1.2.3.4.5.6.a^6}$$

&c. &c.

Donc, si l'on marque la suite des ordonnées de cette façon &c. A4, A3, A2, A1, A, 1A, 2A, 3A, 4A, &c. & qu'on prenne leurs différences premieres en retranchant les ordonnées qui précedent de

de celles qui suivent de cette maniere $1A - A = 1B$, $2A - 1A = 2B$, &c. & $A - A1 = B1$, $A1 - A2 = B2$, &c. De même leurs différences secondes, $1B - B1 = C$, $2B - 1B = 1C$, $B1 - B2 = C1$, &c. Aussi leurs différences troisiemes, $1C - C = 1D$, $C - C1 = D1$, &c. Aussi leurs différences quatriemes, $1D - D1 = E$, &c. & ainsi de suite, comme l'on voit ici

&c.		A4		A3		A2		A1		A		1A		2A		3A		4A	&c.
			B4		B3		B2		B1		1B		2B		3B		4B		
				C3		C2		C1		C		1C		2C		3C			
					D3		D2		D1		1D		2D		3D				
						E2		E1		E		1E		2E					
							F2		F1		1F		2F						
								G1		G		1G							
									H1		1H								
										I									

& ayant pris les différences du milieu, sçavoir,

	1B		1D		1F		1H			
A		C		E		G		I		&c.
	B1		D1		F1		H1			

qu'on fasse $\frac{1B + B1}{2} = B$, $\frac{1D + D1}{2} = D$, $\frac{1F + F1}{2} = F$, $\frac{1H + H1}{2} = H$, &c. on trouvera $P = \frac{B}{a}$, $Q = \frac{C}{1.2.a^2}$, $R = \frac{D}{1.2.3.a^3}$ $S = \frac{E}{1.2.3.4.a^4}$, $T = \frac{F}{1.2.3.4.5.a^5}$, $V = \frac{G}{1.2.3.4.5.6.a^6}$, &c. & ainsi l'équation du probleme aura cette forme

$y =$

$$y = A +$$
$$\frac{2aBx + Cxx}{1.2.a^2} +$$
$$\frac{4aDx + Exx}{1.2.a^4} \times \frac{xx - aa}{3.4} +$$
$$\frac{6aFx + Gxx}{1.2.a^6} \times \frac{xx - aa}{3.4} \times \frac{xx - 4aa}{5.6} +$$
$$\frac{8aHx + Ixx}{1.2.a^8} \times \frac{xx - aa}{3.4} \times \frac{xx - 4aa}{5.6} \times \frac{xx - 9aa}{7.8} +$$
&c.

CORROLLAIRE III.

De l'autre côté du point A à la distance $Az = AZ$, qu'on tire l'ordonnée $zk = v$, & l'équation générale donnera

$$\frac{y+v}{2} = A + Qxx + Sxx \times \overline{xx - aa} + Vxx \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} + \&c.$$

$$\frac{y-v}{2} = Px + Rx \times \overline{xx - aa} + Tx \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} + \&c.$$

& si les ordonnées sont également distantes les unes des autres, & que la distance commune soit $= a$, on aura

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{Cxx}{1.2.a^2} + \frac{Exx}{1.2.a^4} \times \frac{xx - aa}{3.4} + \frac{Gxx}{1.2.a^6} \times \frac{xx - aa}{3.4} \times \frac{xx - 4aa}{5.6} + \&c.$$

$$\frac{y-v}{2} = \frac{Bx}{a} + \frac{2Dx}{a^3} \times \frac{xx - aa}{3.4} + \frac{3Fx}{a^5} \times \frac{xx - aa}{3.4} \times \frac{xx - 4aa}{5.6} + \&c.$$

La somme des deux équations donne la valeur de l'ordonnée y, & leur différence donne la valeur de l'ordonnée v.

Ces équations sont commodes pour insérer de nouvelles ordonnées à des distances quelconques du point A : comme, par exemple, si dans une suite de termes qu'on suppose également distans les uns des autres, & dont le nombre est impair, on veut avoir d'autres termes intermédiaires qui soyent à égale distance des termes donnés ; dans ce cas, faisant $a = 1$, & $x = \frac{1}{2}$, on aura

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{1}{2} \times \frac{C}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{E}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{G}{64} - \&c.$$

$$\frac{y-v}{2} = \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{D}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{F}{32} - \&c.$$

ensuite on supposera $x = \frac{3}{2}$, & l'on aura

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{9}{2} \times \frac{C}{4} + \frac{15}{8} \times \frac{E}{16} - \frac{7}{16} \times \frac{G}{64} + \&c.$$

$$\frac{y-v}{2} = 3 \times \frac{B}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{D}{8} - \frac{7}{8} \times \frac{F}{32} + \&c.$$

& de même, si l'on met successivement pour x les valeurs $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, &c. on aura des équations qui donneront tous les termes cherchés. On pourroit diviser la distance commune des termes en autant de parties égales qu'on voudroit, & on auroit de la même maniere les termes intermédiaires pour tous ces points de division.

Si donc on continue à diviser la distance commune en parties égales jusqu'à ce que les différences des termes qui y correspondent deviennent peu considérables, on peut insérer par une simple proportion d'autres termes entre ces derniers, leurs distances à ces termes

étant données; ou, si les termes sont donnés, on peut en déduire leurs distances. Cette façon d'operer rend la méthode des Interpolations plus facile: pour l'éclaircir, nous allons donner deux exemples qui se rapportent à l'Astronomie.

Exemple I.

Supposé qu'on ait observé la latitude d'une Planete pendant cinq jours de suite à la même heure, & que le premier jour elle se soit trouvée de 0°. 23'; le second, de 1°. 31'; le troisieme, de 2°. 33'; le quatrieme, de 3°. 27'; le cinquieme, de 4°. 12'; & qu'on veuïlle sçavoir quelle étoit sa latitude le quatrieme jour à 7^h. 12'. On divisera l'espace d'un jour, c'est à dire, l'intervalle commun entre les observations qu'on regarde comme l'unité, en trois parties égales, & on cherchera quelle étoit la latitude de la Planete après trois jours & un tiers, c'est à dire, le quatrieme jour à 8^h. L'on a donc $a = 1$, & $x = \frac{4}{3}$, ce qui donne

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{8}{9} C + \frac{14}{243} E$$

$$\frac{y-v}{2} = \frac{4}{3} B + \frac{14}{81} D.$$

Maintenant qu'on prenne les différences premieres, secondes, troisiemes, & quatriemes, des observations, comme l'on voit ici,

0°. 23': 1°. 31': 2°. 33': 3°. 27': 4°. 12'
1°. 8': 1°. 2': 0°. 54': 0°. 45'
— 6': — 8': — 9'
2': 1'
— 1'

& l'on trouve A = 2°. 33'; B = 58', C = − 8', D = 1'½, E = − 1';
&

& ces valeurs étant ſubſtituées dans les équations, il vient $\frac{y+v}{2} = 2°. 25'. 50''$, & $\frac{y-v}{2} = 1°. 17'. 35''\frac{1}{2}$, dont la ſomme donne $y = 3°. 43'. 25''\frac{1}{2}$ qui étoit la latitude de la Planete le quatrieme jour à 8^b. Enſuite pour avoir ſa latitude à $7^b. 12'$ on fera, comme 8^b. ſont à $8^b. - 7^b. 12'$, ou $48'$; ainſi $3°. 43'\ 25''\frac{1}{2} - 3°. 27'$, ou $16'. 25''\frac{1}{2}$ ſont à $1'. 38''\frac{1}{2}$: ôtant donc $1'. 38''\frac{1}{2}$ de $3°. 43'. 25''\frac{1}{2}$, il reſte $3°. 41'. 47''$ pour la latitude cherchée.

Exemple II.

Qu'on ait obſervé toujours à la même heure la latitude d'une Comete cinq jours de ſuite, pendant lequel tems elle a paſſé par l'Ecliptique: que cette latitude ait été méridionale le premier jour de $1°. 54'. 21''$; le ſecond, de $50', 3''$; que le troiſieme jour elle ait été ſeptentrionale de $15'. 7''$; le quatrieme, de $1°. 20'. 17''$; le cinquieme, de $2°. 20'. 19''$; & qu'on demande l'inſtant auquel la Comete a coupé l'écliptique. On voit que ce paſſage s'eſt fait entre le ſecond & le troiſieme jour, mais beaucoup plus près du troiſieme: ainſi l'on diviſera le jour en cinq parties égales, & l'on cherchera quelle étoit la latitude de la Comete à la $\frac{4}{5}$me partie du ſecond jour, c'eſt à dire, le ſecond jour à $19^b. 12'$. On a donc dans ce cas $x = \frac{1}{5}$, ce qui donne

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{1}{50} C - \frac{1}{625} C$$

$$\frac{y-v}{2} = \frac{1}{5} B - \frac{4}{125} D$$

On prendra les différences des latitudes obſervées, en regardant celles qui ſont méridionales comme poſitives, & comme négatives celles qui ſont ſeptentrionales, de cette ſorte

 1°.

1°. 54′. 21″: 50′. 3″: — 15′. 7″: — 1°. 20′. 17″: — 2°. 20′. 19″
— 1°. 4′. 18″: — 1°. 5′. 10″: — 1°. 5′. 10″: — 1°. 0′. 2″
— 52″: 0: 5′. 8″
52″: 5′. 8″
4′. 16″

On aura donc A = — 15′. 7″, B = — 1°. 5′. 10. C = 0, D = 2, E = 4′. 16″, & par conſéquent $\frac{y+v}{2}$ = — 15′. $7\frac{1}{2}$″, $\frac{y-v}{2}$ = — 13′. $7\frac{1}{2}$″, dont la différence donne v = — 2′, qui étoit la latitude de la Comete le ſecond jour à 19*h*. 12′; on fera donc 13′. 7″: 2′ : : 4*h*. 48′: 43′. 55″; & ôtant 43′. 55″ de 19*h*. 12′, il reſte 18*h*. 28′. 5″ pour l'heure du 2*d* jour à laquelle la Comete s'eſt trouvée dans l'ecliptique.

COROLLAIRE IV.

Par le moyen de l'équation

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{Cxx}{2a^2} + \frac{Exx}{2a^4} \times \frac{xx-aa}{3.4} + \frac{Gxx}{2a^6} \times \frac{xx-aa}{3.4} \times \frac{xx-4aa}{5.6} + \frac{Ixx}{2a^8} \times \frac{xx-aa}{3.4} \times \frac{xx-4aa}{5.6} \times \frac{xx-9aa}{7.8} + \&c.$$

on trouvera les aires paraboliques, lorſque le nombre des ordonnées qu'on ſuppoſe également diſtantes les unes des autres eſt impair; car, en ſuppoſant que les ordonnées ſont perpendiculaires à l'abſciſſe, & que les deux ordonnées ZK, *zk* (fig. 3.) partent en même temps du point A, & parcourent l'abſciſſe par un mouvement uniforme, il eſt clair que l'élément de l'eſpace KZ*zk* eſt $\overline{y+v} \times dx$, ou

$$2Adx + \frac{Cx^2dx}{a^2} + \frac{Ex^2dx}{a^4} \times \frac{xx-aa}{3.4} + \frac{Gx^2dx}{a^6} \times \frac{xx-aa}{3.4} \times \frac{xx-4aa}{5.6} + \&c.$$

dont

dont l'intégrale se trouve par la méthode ordinaire: & l'on pourra exprimer les valeurs de ces aires par les différences premieres, secondes, troisiemes, &c. des ordonnées, ou par la somme des mêmes ordonnées prises deux à deux.

Qu'on veüille, par exemple, connoître l'espace QLBI, que je nomme Q, par le moyen des trois ordonnées QL, PA, IB, on aura

$$\int \overline{y+v} \times dx = 2Ax + \frac{Cx^3}{3a^2}, \text{ \& faisant } x = a, \; Q = 2a \times \overline{A + \tfrac{1}{6}C};$$

ou bien, si l'on fait $2a = R$, & qu'on substitue pour C sa valeur

$$1A - 2 \times A + A1, \quad Q = \frac{\overline{1A + A1} + 4 \times A}{6} R;$$

ou encore, si, suivant la notation Newtonienne, A marque la somme des deux ordonnées QL, IB, & B l'ordonnée PA, on aura $Q = \frac{A + 4B}{6} R$. Pareillement, si l'on veut avoir l'aire Q comprise entre cinq ordonnées, on trouve

$$\int \overline{y+v} \times dx = 2Ax + \frac{Cx^3}{3a^2} - \frac{Ex^3}{36a^2} + \frac{Ex^5}{60a^4}, \text{ \&}$$

faisant $x = 2a$, $Q = 4a \times \overline{A + \tfrac{2}{3}C + \tfrac{7}{90}E}$; ou bien, en écrivant R au lieu de $4a$, & substituant pour C & E leurs valeurs respectives $1A - 2 \times A + A1$, $2A - 4 \times 1A + 6 \times A - 4 \times A1 + A2$, on a

$$Q = \frac{7 \times \overline{2A + A2} + 32 \times \overline{1A + A1} + 12 \times A}{90} R;$$

ou encore, si à la maniere Newtonienne A marque la somme de la premiere & derniere ordonnées, B la somme de la seconde & de la penultieme, & C celle du milieu, on aura

$$Q = \frac{7A + 32B + 12C}{90} R.$$

PROBLEME III.

Trouver la courbe parabolique qui passera par les extrémités d'autant d'ordonnées qu'on voudra, dont le nombre est pair.

SOLUTION.

Fig. 4. Soit une suite d'ordonnées &c. GD, HC, IB, QL, RM, SN, &c. dont QL, IB, sont celles du milieu. On divisera la distance BL des deux ordonnées QL, IB, en deux parties égales au point A, & on supposera que les ordonnées correspondantes de chaque côté du point A sont également distantes de ce point, c'est à dire, que AL = AB, AM = AC, AN = AD, &c. & ayant nommé AL, a; AM, b; AN, c; &c. l'abscisse indéterminée AZ, x; & son ordonnée ZK, y; l'équation de la courbe sera

$$\begin{aligned} y = {} & P + \\ & Qx + \\ & \overline{R + Sx} \times \overline{xx - aa} + \\ & \overline{T + Vx} \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} + \\ & \overline{W + Zx} \times \overline{xx - aa} \times \overline{xx - bb} \times \overline{xx - cc} + \\ & \&c. \end{aligned}$$

La démonstration est semblable à celle du probleme précédent, & les coëfficients des termes se déterminent de la même maniere. C. Q. F. T. Il faut observer que si l'on prend l'ordonnée ZK de l'autre côté du point A, son abscisse deviendra négative.

COROLLAIRE I.

Il suit de la solution de ce probleme que, si l'on a une suite d'ordonnées &c. ν, μ, λ, κ, α, β, γ, δ, &c. entre lesquelles α & κ tiennent le milieu, & dont les distances au point A sont respectivement $+a$, $-a$;

$-a$; $+b$, $-b$; $+c$, $-c$; $+d$, $-d$; &c. en commençant par les ordonnées qui sont les plus proches du point A, & qu'on fasse

$$\frac{\alpha+\kappa}{2}=P,\ \frac{\beta+\lambda}{2}=1P,\ \frac{\gamma+\mu}{2}=2P,\ \frac{\delta+\nu}{2}=3P,\ \&c.$$

$$\frac{1P-P}{bb-aa}=R,\ \frac{2P-1P}{cc-bb}=1R,\ \frac{3P-2P}{dd-cc}=2R,\ \&c.$$

$$\frac{1R-R}{cc-aa}=T,\ \frac{2R-1R}{dd-bb}=1T,\ \&c.$$

$$\frac{1T-T}{dd-aa}=W,\ \&c.$$

&c.

Aussi

$$\frac{\alpha-\kappa}{2a}=Q,\ \frac{\beta-\lambda}{2b}=1Q,\ \frac{\gamma-\mu}{2c}=2Q,\ \frac{\delta-\nu}{2d}=3Q,\ \&c.$$

$$\frac{1Q-Q}{bb-aa}=S,\ \frac{2Q-1Q}{cc-bb}=1S,\ \frac{3Q-2Q}{dd-cc}=2S,\ \&c.$$

$$\frac{1S-S}{cc-aa}=V,\ \frac{2S-1S}{dd-bb}=1V,\ \&c.$$

$$\frac{1V-V}{dd-aa}=Z,\ \&c.$$

&c.

il suit, dis-je, que l'équation de la courbe parabolique qui passera par les extrémités de toutes les ordonnées, sera telle que nous l'avons énon-

cée

cée dans le probleme, & que les quantités P, Q, R, S, T, V, W, Z, &c. comme on les a ici déterminées, seront les coëfficients de ses termes.

COROLLAIRE II.

Maintenant, que l'on suppose que la distance entre les ordonnées est partout la même, & égale à $2a$, & l'on aura $b = 3a$, $c = 5a$, $d = 7a$, &c. aussi

$$P = \frac{\alpha + \varkappa}{2} \qquad Q = \frac{\alpha - \varkappa}{2a}$$

$$R = \frac{1}{4a^2} \times \frac{\beta - \alpha - \varkappa + \lambda}{1.\ 2.\ 2.} \qquad S = \frac{1}{8a^3} \times \frac{\beta - 3\alpha + 3\varkappa - \lambda}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$T = \frac{1}{16a^4} \times \frac{\gamma - 3\beta + 2\alpha + 2\varkappa - 3\lambda + \mu}{1.\ 2.\ 2.\ 3.\ 4.} \qquad V = \frac{1}{32a^5} \times \frac{\gamma - 5\beta + 10\alpha - 10\varkappa + 5\lambda - \mu}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

&c. &c.

Donc, si l'on marque la suite des ordonnées de cette façon &c. A4, A3, A2, A1, 1A, 2A, 3A, 4A, &c. & qu'on prenne leurs différences premieres, en retranchant les ordonnées qui précédent de celles qui suivent, en cette sorte, 1A — A1 = B, 2A — 1A = 1B, A1 — A2 = B1, &c.; de même leurs différences secondes, 1B — B = 1C, B — B1 = C1, &c. aussi leurs différences troisiemes, 1C — C1 = D, &c. & ainsi de suite, comme l'on voit ici

&c.	A4		A3		A2		A1		1A		2A		3A		4A		&c.
		B3		B2		B1		B		1B		2B		3B			
			C3		C2		C1		1C		2C		3C				
				D2		D1		D		1D		2D					
					E2		E1		1E		2E						
						F1		F		1F							
							G1		1G								
								H									

des-

des quelles ayant pris celles du milieu

$$\begin{array}{ccccccccc} A1 & & C1 & & E1 & & G1 & & \\ & B & & D & & F & & H & \&c. \\ 1A & & 1G & & 1E & & 1G & & \end{array}$$

& faisant $\frac{A1 + 1A}{2} = A$, $\frac{C1 + 1C}{2} = C$, $\frac{E1 + 1E}{2} = E$, $\frac{G1 + 1G}{2} = G$, &c. on trouvera $P = A$, $Q = \frac{B}{2a}$, $R = \frac{1}{4a^2} \times \frac{C}{1.2}$, $S = \frac{1}{8a^3} \times \frac{D}{1.2.3}$, $T = \frac{1}{16a^4} \times \frac{E}{1.2.3.4}$, $V = \frac{1}{32a^5} \times \frac{F}{1.2.3.4.5}$, $W = \frac{1}{64a^6} \times \frac{G}{1.2.3.4.5.6}$, $Z = \frac{1}{128a^7} \times \frac{H}{1.2.3.4.5.6.7}$, &c. & dans ce cas l'équation du probleme sera

$$\begin{aligned} y = {} & A + \\ & \frac{Bx}{2a} + \\ & \frac{6aC + Dx}{8a^3} \times \frac{xx - aa}{2.3} + \\ & \frac{10aE + Fx}{32a^5} \times \frac{xx - aa}{2.3} \times \frac{xx - 9aa}{4.5} + \\ & \frac{14aG + Hx}{128a^7} \times \frac{xx + aa}{2.3} \times \frac{xx - 9aa}{4.5} \times \frac{xx - 25aa}{6.7} + \\ & \&c. \end{aligned}$$

 Si

Si l'intervalle commun entre les ordonnées est égal à l'unité, l'on $a = \frac{1}{2}$, & l'équation sera

$$y = A +$$
$$Bx +$$
$$\frac{3C + Dx}{4} \times \frac{4xx - 1}{2.3} +$$
$$\frac{5E + Fx}{16} \times \frac{4xx - 1}{2.3} \times \frac{4xx - 9}{4.5} +$$
$$\frac{7G + Hx}{64} \times \frac{4xx - 1}{2.3} \times \frac{4xx - 9}{4.5} \times \frac{4xx - 25}{6.7} +$$

&c.

COROLLAIRE III.

De l'autre côté du point A à la distance $Az = AZ$, qu'on éleve l'ordonnée $zk = v$, & l'équation générale donnera

$$\frac{y+v}{2} = P + R\times\overline{xx-aa} + T\times\overline{xx-aa}\times\overline{xx-bb} + W\times\overline{xx-aa}\times\overline{xx-bb}\times\overline{xx-cc} \text{ \&c.}$$

$$\frac{y-v}{2} = Qx + Sx\times\overline{xx-aa} + Vx\times\overline{xx-aa}\times\overline{xx-bb} + Zx\times\overline{xx-aa}\times\overline{xx-bb}\times\overline{xx-cc} + \text{\&c.}$$

& si la distance commune des ordonnées est égale à $2a$, ces équations sont

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{3C}{4a^2} \times \frac{xx-aa}{2.3} + \frac{5E}{16a^4} \times \frac{xx-aa}{2.3} \times \frac{xx-9aa}{4.5} +$$
$$\frac{7G}{64a^6} \times \frac{xx-aa}{2.3} \times \frac{xx-9aa}{4.5} \times \frac{xx-25aa}{6.7} + \text{\&c.}$$

$y-v$

$$\frac{y-v}{2}=\frac{Bx}{2a}+\frac{Dx}{8a^3}\times\frac{xx-aa}{2.3}+\frac{Fx}{32a^5}\times\frac{xx-aa}{2.3}\times\frac{xx-9aa}{4.5}+$$
$$\frac{Hx}{128a^7}\times\frac{xx-aa}{2.3}\times\frac{xx-9aa}{4.5}\times\frac{xx-25aa}{6.7}+\&c.$$

& si l'on suppose cette distance égale à l'unité, ou $2a=1$,

$$\frac{y+v}{2}=A+\frac{3C}{4}\times\frac{4xx-1}{2.3}+\frac{5E}{16}\times\frac{4xx-1}{2.3}\times\frac{4xx-9}{4.5}+\frac{7G}{64}\times\frac{4xx-1}{2.3}\times\frac{4xx-9}{4.5}\times\frac{4xx-25}{6.7}+\&c.$$

$$\frac{y-v}{2}=Bx+\frac{Dx}{4}\times\frac{4xx-1}{2.3}+\frac{Fx}{16}\times\frac{4xx-1}{2.3}\times\frac{4xx-9}{4.5}+\frac{Hx}{64}\times\frac{4xx-1}{2.3}\times\frac{4xx-9}{4.5}\times\frac{4xx-25}{6.7}+\&c.$$

On voit que la somme des deux équations donne la valeur de l'ordonnée y, & leur différence donne la valeur de l'ordonnée v. Ces équations sont commodes pour inférer de nouvelles ordonnées à des distances quelconques du point A. Comme si, par exemple, ayant une suite de termes dont le nombre est pair, on divisoit également en deux leurs distances qu'on suppose toutes égales, & qu'on voulût inférer un nouveau terme à chaque point de division. Dans ce cas on supposera la distance commune des termes ou $2a=1$, & faisant 1°. $x=0$, on aura

$$\frac{y+v}{2}=y=A-\frac{1}{2}\times\frac{C}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{E}{16}-\frac{5}{16}\times\frac{G}{64}+\&c.$$

qui est la valeur de l'ordonnée qui répond au point du milieu A. Faisant 2°. $x=1$, il viendra

$$\frac{y+v}{2}=A+\frac{3}{2}\times\frac{C}{4}-\frac{5}{8}\times\frac{E}{16}+\frac{7}{16}\times\frac{G}{64}-\&c.$$

$$\frac{y-v}{2}=2\times\frac{B}{2}+\frac{D}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{F}{32}+\&c.$$

&

& de même si l'on substitue successivement pour x les nombres $2, 3, 4, 5$, il en résultera des équations qui donneront tous les termes cherchés deux à deux.

Pareillement, si l'on divisoit l'intervalle commun entre les termes en trois parties égales, & qu'on voulut avoir les termes intermédiaires qui répondent à tous les points de division, on substitueroit alors successivement pour x ses valeurs, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$, &c. & il en viendroit des équations qui donneroient les termes cherchés. On pourroit ainsi diviser l'intervalle commun entre les termes en autant de parties égales qu'on voudroit, & on trouveroit de la même maniere les termes qui répondent à tous les points de division. Et lorsque le nombre des divisions est suffisant pour que les différences des termes qui y répondent soient petites, si l'on veut insérer de nouveaux termes entre ces derniers, il suffira de déterminer leurs différences d'avec les termes donnés, en prenant la partie qui est proportionelle à leurs distances; & de même, les termes étant donnés, on pourra déduire leurs distances: ainsi l'on peut faire le même usage de ce probleme-ci qu'on a fait du probleme précédent; & l'on y a pû voir que cette façon de diviser l'intervalle commun en un certain nombre de parties aliquotes contribue à faciliter ces sortes d'interpolations.

Exemple I.

On suppose que la Planete de Mercure a été observée le premier jour dans $2^s. 5^\circ. 39'. 51''$; le second jour à la même heure dans $2^s. 12^\circ. 2'. 51''$; le troisieme dans $2^s. 18^\circ. 26'. 18''$; le quatrieme dans $2^s. 24^\circ. 48'. 38''$, & qu'on veut sçavoir son lieu le troisieme jour à 7^h. Il suffira de diviser le jour, que l'on regarde comme l'unité, en trois parties égales, & l'on cherchera quel étoit le lieu de Mercure le troisieme jour à 8^h; ce qui donne $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, et par conséquent

$$\frac{y+v}{2} = A + \frac{2C}{9}$$

$$\frac{y-v}{2} = \frac{5B}{6} + \frac{5D}{81}$$

Ensui-

Ensuite, prenant, les différences des observations, en omettant le terme commun 2^s.

$$5^\circ.\ 39'.\ 51'':\quad 12^\circ.\ 2'.\ 51'':\quad 18^\circ.\ 26'.\ 18'':\quad 24^\circ.\ 48'.\ 38''$$

$$6^\circ.\ 23'.\ 0'':\quad 6^\circ.\ 23'.\ 27'':\quad 6^\circ.\ 22'.\ 20''$$

$$0'.\ 27'':\quad -1'.\ 7''$$

$$-1'.\ 34''$$

on trouve $A = 15^\circ.\ 14'.\ 34\frac{1}{2}''$, $B = 6^\circ.\ 23'.\ 27''$, $C = -20''$; $D = -1'.\ 34''$, & substituant ces valeurs, il vient $\frac{y+v}{2} = 15^\circ.\ 14'.\ 30''$, & $\frac{y-v}{2} = 5^\circ.\ 19'.\ 26\frac{1}{2}''$; dont la somme donne $y = 20^\circ.\ 33'.\ 56\frac{1}{2}''$ pour le lieu de Mercure à 8^h. en y ajoûtant 2^s; on fera donc, comme 8 sont à 1, ainsi la différence entre le lieu qu'on vient de trouver & le lieu observé le troisieme jour, laquelle est $2^\circ.\ 7'.\ 38\frac{1}{2}''$, est à $15'.\ 57''$; ôtant donc $15'.\ 57''$ de $2^s.\ 20^\circ.\ 33'.\ 56\frac{1}{2}$ il reste $2^s.\ 20^\circ.\ 17'.\ 59\frac{1}{2}''$, ou simplement $2^s.\ 20^\circ.\ 18'$. pour le lieu de Mercure à 7^h.

Si au contraire l'on demandoit l'instant auquel Mercure s'est trouvé dans $2^s.\ 20^\circ.\ 18'$ on chercheroit, comme on vient de faire, son lieu pour l'instant de 8^h. le 3me jour, & par le moyen de la différence entre ce lieu trouvé & le lieu donné, on déduiroit par la simple proportion le tems écoulé entre les deux.

Exemple II.

Qu'une Comete de directe soit devenue rétrograde, & qu'on veüille sçavoir l'instant auquel elle étoit stationaire, étant données six observations faites vers ce même temps. On suppose que le premier jour sa longitude observée étoit de $6^\circ.\ 55'$. ♉; le second jour à la même heure, de $7^\circ.\ 9'$; le troisieme, de $7^\circ.\ 15'$; le quatrieme, de $7^\circ.\ 10'$; le cinquieme, de $7^\circ.\ 4'$; le sixieme, de $6^\circ.\ 50'$;

Pour rendre le calcul un peu plus ſimple, on retranchera la premiere longitude d'elle-même & de chacune des autres pour avoir les reſtes 0, 14′, 20′, 15′, 9′, — 5′, qu'on regardera comme les ordonnées de la courbe. Ainſi dans ce cas on aura

$$y = A + Bx + \frac{3C + Dx}{4} \times \frac{4xx - 1}{2.3} + \frac{5E + Fx}{16} \times \frac{4xx - 1}{2.3} \times \frac{4xx - 9}{4.5},$$

$$dy = 0 = B - \frac{D}{24} + \frac{3F}{640} + \overline{C - \frac{5E}{24}} \times x + \overline{\frac{D}{2} - \frac{F}{16}} \times x^2 + \frac{E}{6} x^3 + \frac{F}{24} x^4 = 0$$

Qu'on prenne les différences des ordonnées

0′. 14′. 20′ 15′. 9′. — 5′

14′. 6′. — 5′. — 6′. — 14′

— 8′. — 11. — 1′. — 8′

— 3′ 10′. — 7′

13′. — 17′

— 30′

& l'on aura $A = 17\frac{1}{2}$, $B = -5$, $C = -6$, $D = 10$, $E = -2$, $F = -30$, & mettant ces valeurs dans la ſeconde équation elle devient

$$x^4 + \tfrac{4}{15} x^3 - \tfrac{11}{2} x^2 + \tfrac{67}{15} x + \tfrac{1067}{240} = 0$$

dont la racine eſt $x = -0.5473$ à peu près, qui répond à $13^h.\ 8'$; ainſi la Comete étoit ſtationaire le ſecond jour à $22^h.\ 52'$ environ. Pour ſçavoir quelle étoit alors ſa longitude, il faut ſubſtituer -0.5473 pour x dans la premiere équation, & l'on trouvera $y = 20'.\ 3''$, ce qui donne la longitude de la Comete de $7°.\ 15'.\ 3''$.

COROL-

COROLLAIRE IV.

On a fait voir dans le 4me Corollaire du second probleme comment, étant donnée une suite d'ordonnées en nombre impair, on pouvoit calculer les aires paraboliques qu'elles comprennent; de la même maniere l'on peut, lorsque cette suite fait un nombre pair, trouver ces aires par le moyen de l'équation suivante

$$\frac{y+v}{2}=A+\frac{3C}{4a^2}\times\frac{xx-aa}{2.3}+\frac{5E}{16a^4}\times\frac{xx-aa}{2.3}\times\frac{xx-9aa}{4.5}+\frac{7G}{64a^6}\times\frac{xx-aa}{2.3}\times\frac{xx-9aa}{4.5}\times\frac{xx-25aa}{6.7}+\&c.$$

en supposant que la distance commune entre les ordonnées est $2a$. Comme si l'on vouloit avoir l'espace Q contenu entre quatre ordonnées, dans l'équation $\int \overline{\dot{y}+v}\times dx=2Ax-\frac{Cx}{4}+\frac{Cx^3}{12a^2}$ on feroit $x=3a$, & il viendroit $Q=6a\times\overline{A+\frac{1}{4}C}$; ou bien, en écrivant R pour la base $6a$, & pour A, C, leurs valeurs respectives $\frac{1A+A1}{2}$, $\frac{2A-1A-A1+A2}{2}$,

$$Q=\frac{2A+A2+3\times\overline{1A+A1}}{8}R;$$ ou encore, en faisant avec Mr. Newton $A=2A+A2$, & $B=1A+A1$,

$$Q=\frac{A+3B}{8}R.$$

Paraillement, pour avoir l'aire Q comprise entre six ordonnées, dans l'équation $\int\overline{y+v}\times dx=2Ax-\frac{Cx}{4}+\frac{Cx^3}{12a^2}+\frac{3Ex}{64}-\frac{5Ex^3}{288a^2}+\frac{Ex^5}{960a^4}$

on

on feroit $x = 5a$, & on auroit $Q = 10a \times \overline{A + \frac{11}{12} C + \frac{19}{144} E}$, ou bien faisant $R = 10$, & substituant pour A, C, E, leurs valeurs,

$$Q = \frac{19 \times \overline{3A + A3} + 75 \times \overline{2A + A2} + 50 \times \overline{1A + A1}}{288} R,$$

ou encore, en faisant avec M. Newton $A = 3A + A3$, $B = 2A + A2$, $C = 1A + A1$, on auroit

$$Q = \frac{19A + 75B + 50C}{288} R,$$

DE
LA SOMMATION DES SÉRIES.

Etant donnée la série $v + Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \&c. = y$ dans laquelle v est une quantité constante & égale à y, lorsque $x = 0$, & supposant que chacun de ses termes vienne à être multiplié par une quantité constante, en sorte qu'elle devienne

$$a \times v + b \times Px + c \times Qx^2 + d \times Rx^3 + e \times Sx^4 + \&c.$$

on demande la somme N de cette derniere série.

THEOREME I.

Si l'on suppose que B, C, D, &c. représentent les différences premieres, secondes, troisiemes, &c. du premier ordre des quantités a, b, c, d, &c. c'est à dire, si l'on fait $B = b - a$, $C = c - 2b + a$, $D = d - 3c + 3b - a$, $E = e - 4d + 6c - 4b + a$, &c. on aura

$$N = ay + B \times \frac{dy}{dx} x + C \times \frac{ddy}{2dx^2} x^2 + D \times \frac{d^3y}{6dx^3} x^3 + E \times \frac{d^4y}{24dx^4} x^4 + F \times \frac{d^5y}{120dx^5} x^5 + \&c.$$

DE

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer le Théoreme, il faudra ſe ſervir du calcul différentiel ; ainſi l'on prendra la différence premiere, ſeconde, troiſieme, &c. de l'équation $y = v + Px + Qx^2 + Rx^3 + \&c.$ ce qui donnera

$$dy = Pdx + 2Qxdx + 3Rx^2dx + 4Sx^3dx + 5Tx^4dx + \&c.$$
$$ddy = 2Qdx^2 + 2.3Rxdx^2 + 3.4Sx^2dx^2 + 4.5Tx^3dx^2 + \&c.$$
$$d^3y = 2.3Rdx^3 + 2.3.4Sxdx^3 + 3.4.5Tx^2dx^3 + \&c.$$
$$d^4y = 2.3.4Sdx^4 + 2.3.4.5Txdx^4 + \&c.$$
$$d^5y = 2.3.4\,5Tdx^5 + \&c.$$
$$\&c.$$

d'où il ſera facile de tirer les équations ſuivantes

$$ay = av + aPx + aQx^2 + aRx^3 + aSx^4 + aTx^5 + \&c.$$
$$B \times \frac{dy}{dx}x = \cdot\cdot BPx + 2BQx^2 + 3BRx^3 + 4BSx^4 + 5BTx^5 + \&c.$$
$$C \times \frac{ddy}{2dx^2}x^2 = \cdot\cdot\cdot CQx^2 + 3CRx^3 + 6CSx^4 + 10CTx^5 + \&c.$$
$$D \times \frac{d^3y}{6dx^3}x^3 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot DRx^3 + 4DSx^4 + 10DTx^5 + \&c.$$
$$E \times \frac{d^4y}{24dx^4}x^4 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ESx^4 + 5ETx^5 + \&c.$$
$$F \times \frac{d^5y}{120dx^5}x^5 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot FTx^5 + \&c.$$
$$\&c.$$

Enſuite l'on comparera les termes de ces ſéries avec les termes corres-

pondans de la série $av + bPx + cQx^2 + dRx^3 +$ &c. & l'on aura

$$a + B = b$$
$$a + 2B + C = c$$
$$a + 3B + 3C + D = d$$
$$a + 4B + 6C + 4D + E = e$$
$$a + 5B + 10C + 10D + 5E + F = f \quad \text{\&c.}$$

d'où l'on tire les valeurs de B, C, D, &c. telles que nous les avons données ci-dessus; & puisque par la supposition $N = av = bPx + cQx^2 +$ &c. on aura $N = ay + B \times \frac{dy}{dx} x +$ &c. comme dans l'énoncé du théoreme. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Par ce Théoreme on trouvera exactement la somme de toutes les séries dont les termes sont multipliés par un produit quelconque de quantités en proportion arithmétique. Car si l'on suppose $a = r$, $b = r + k$, $c = r + 2k$, $d = r + 3k$, &c. il vient $B = k$, & les différences seconde, & suivantes, étant nulles, on a $C = 0$, $D = 0$; & par conséquent $N = ry + k \times \frac{dy}{dx} x$.

Si $a = r \times s$, $b = \overline{r + k} \times \overline{s + k}$, $c = \overline{r + 2k} \times \overline{s + 2k}$, $d = \overline{r + 3k} \times \overline{s + 3k}$, &c. on trouve $B = rk + sk + kk$, $C = 2kk$, & les différences troisieme, & suivantes, étant nulles, on aura $D = 0$, $E = 0$, &c. ce qui donne

$$N = rsy + \overline{rk + sk + kk} \times \frac{dy}{dx} x + kk \times \frac{ddy}{dx^2} x^2.$$

Si

Si $a = r \times s \times t$, $b = \overline{r+k} \times \overline{s+k} \times \overline{t+k}$, $c = \overline{r+2k} \times \overline{s+2k} \times \overline{t+2k}$, &c. on trouvera $B = rsk + rtk + stk + rkk + skk + tkk + k^3$, $C = \overline{r+s+t} \times 2kk + 6k^3$, $D = 6k^3$, $E = 0$, $F = 0$, &c. & ainſi des autres cas. D'où il eſt clair auſſi que la ſomme ſe trouvera exactement lorsque $a = r^n$, $b = \overline{r+k}^n$, $c = \overline{r+2k}^n$, $d = \overline{r+3k}^n$, &c. n exprimant un de la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c.

Par exemple; étant donné $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{\&c.} = \log. \overline{1+x}$, qu'il faille trouver la ſomme de la ſérie

$$3.4x - \frac{5.6}{2}x^2 + \frac{7.8}{3}x^3 - \frac{9.10}{4}x^4 + \frac{11.12}{5}x^5 - \text{\&c.}$$

Ici l'on a $r = 3$, $s = 4$, $k = 2$, $a = 12$, $B = 18$, $C = 8$; & $y = \frac{\log. \overline{1+x}}{x}$, $dy = \frac{1}{x \times \overline{1+x}} - \frac{\log. \overline{1+x}}{x^2}$,

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2}{x^2 \times \overline{1+x}} - \frac{1}{x \times \overline{1+x}^2} + \frac{2 \times \log. \overline{1+x}}{x^3},$$

ce qui donne la ſomme ou

$$N \times x = 2 \times \log. \overline{1+x} + \frac{10x}{1+x} - \frac{4x^2}{\overline{1+x}^2}.$$

COROLLAIRE II.

Par la raiſon qu'en ſuppoſant $y = v + Px + Qx^2 + \text{\&c.}$ on a trouvé $av + bPx + cQx^2 + \text{\&c.}$ ou $N = ay + B \times \frac{dx}{dy} x + \text{\&c.}$ Si maintenant on ſuppoſe $N' = a'av + b'bPx + c'cQx^2 + \text{\&c.}$ & que B', C', D', &c. expri-

expriment les différences premiere, ſeconde, &c. des quantités données a', b', &c. on conclura pareillement

$$N' = a'N + B' \times \frac{dN}{dx}x + C' \times \frac{ddN}{2dx^2}x^2 + D' \times \frac{d^3N}{6dx^3}x^3 + \&c.$$

& de même ſi $N'' = a''a'av + b''b'bPx + c''c'cQx^2 + \&c.$ que B'', C'', D'', &c. marquent les ordres ſucceſſifs des différences de quantités a'', b'', c'', &c. on aura

$$N'' = a''N' + B'' \times \frac{dN'}{dx}x + C'' \times \frac{ddN'}{2dx^2}x^2 + \&c.$$

& ainſi de ſuite. Quand il arrive donc que les termes de la ſérie ſont multipliés par un produit quelconque de quantités données, au lieu de chercher la ſomme de la ſérie ainſi multipliée de la maniere enſeignée dans le corollaire précédent, on pourra, ſi l'on aime mieux, la trouver également à différentes repriſes par ce corollaire-ci.

Ainſi, pour trouver la ſomme de $3.4x - \frac{5.6}{2}x^2 + \frac{7.8}{3}x^3 - \&c.$ qui eſt l'exemple du corollaire précédent, on cherchera premierement la ſomme de $3 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{3}x^2 - \frac{9}{4}x^3 + \&c.$ Or dans ce cas l'on a $a = 3$, $k = 2$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 0$, &c. ce qui donne $N = \log.\frac{\overline{1+x}}{x} + \frac{2}{1+x}$: enſuite, puiſque $a' = 4$, $k = 2$, $B' = 2$, $C' = 0$, $D' = 0$, &c. & $dN = \frac{1}{x \times \overline{1+x}} - \frac{2}{\overline{1+x}^2} - \frac{\log.\overline{1+x}}{x^2}$, on aura par ce corollaire $N' \times x = 3.4x - \frac{5.6}{2}x^2 + \frac{7.8}{3}x^3 - \&c.$

= 2

$= 2 \times \log. \overline{1 + x} + \frac{10x}{1+x} - \frac{4x^2}{\overline{1+x}^2}$, comme on l'avoit trouvé auparavant.

COROLLAIRE III.

Etant donnée la quadrature des ſections coniques, on peut trouver par le moyen de ce Théoreme la ſomme d'une ſérie de cette nature.

$$\frac{a \times b \times c \times \&c.}{l \times m \times n \times \&c.} x^{l} - \frac{\overline{a+k} \times \overline{b+k} \times \overline{c+k} \times \&c.}{\overline{l+k} \times \overline{m+k} \times \overline{n+k} \times \&c.} x^{l+k} + \frac{\overline{a+2k} \times \overline{b+2k} \times \overline{c+2k} \times \&c.}{\overline{l+2k} \times \overline{m+2k} \times \overline{n+2k} \times \&c.} x^{l+2k} + \&c.$$

car l'intégrale de $\frac{x^{l-1}dx}{1+x^k}$, laquelle exprimée par une ſérie eſt $\frac{x^l}{l} - \frac{x^{l+k}}{l+k} + \frac{x^{l+2k}}{l+2k} - \&c.$ peut ſe trouver par les ſections coniques. L'on ſçait auſſi que v étant une fonction quelconque de x, on a $\int x^{\lambda-1}dx \times v = \frac{x^\lambda v}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int x^\lambda dv$, &

$$\int x^\lambda dv = \frac{x^{\lambda+l-k}}{\lambda+l-k} - \frac{x^{\lambda+l-2k}}{\lambda+l-2k} + \frac{x^{\lambda+l-3k}}{\lambda+l-3k} - \ldots\ldots \pm A,$$

le nombre des termes étant continué jusqu'à ce que l'expoſant $\lambda+l-rk$ devienne plus petit que k, & A exprimant l'intégrale de $\frac{x^{\lambda+l-rk}dx}{1+x^k}$ laquelle ſe trouvera auſſi par les ſections coniques.

De plus, puiſque $\frac{1}{x^l}\int\frac{x^{l-1}dx}{1+x^k} = \frac{1}{l} - \frac{x^k}{l+k} + \frac{x^{2k}}{l+2k} - \&c.$

on aura, en faiſant $\int\frac{x^{l-1}dx}{1+x^k} = y$,

$$\int x^{m-l-1}dx\times y = \frac{x^m}{l\times m} - \frac{x^{m+k}}{\overline{l+k}\times\overline{m+k}} + \frac{x^{m+2k}}{\overline{l+2k}\times\overline{m+2k}} - \&c. = u,$$

& pareillement

$$\int x^{n-m-1}dx\times u = \frac{x^n}{l\times m\times n} - \frac{x^{n+k}}{\overline{l+k}\times\overline{m+k}\times\overline{n+k}} + \frac{x^{n+2k}}{\overline{l+2k}\times\overline{m+2k}\times\overline{n+2k}} - \&c.$$

& ainsi de ſuite. Or toutes ces intégrales ſe trouvent par les formules que nous venons de donner: cela fait, on achevera le reſte par le moyen du premier ou ſecond corollaire. Pour éclaircir ceci par un exemple, qu'il faille trouver la ſomme de la ſérie

$$\frac{3}{4.5.} - \frac{6x^3}{4.7.8} + \frac{9x^6}{7.10.11} - \frac{12x^9}{10.13.14} + \frac{15x^{12}}{13.16.17} - \&c.$$

Comme l'intégrale de $\frac{dx}{1+x^3}$ réduite en ſérie eſt $x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{13}}{13} - \&c.$ on aura $\frac{x^{l-1}dx}{1+x^k} = \frac{dx}{1+x^3}$, & par conſéquent $l = 1$, $k = 3$, & $y = \int\frac{dx}{1+x^3}$: comme l'on a auſſi $m = 4$, $n = 5$; donc $\int x^{m-l-1}dx\times y = \int x^2dx\times y = u$, & par la formule $\int x^{\lambda-1}dx\times v = \frac{x^\lambda v}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int x^\lambda dv$, il vient $\int x^2dx\times y = \frac{x^3y}{3} - \frac{1}{3}\int x^3dy$, & par la formule $\int x^\lambda dv = \frac{x^{\lambda+l-k}}{\lambda+l-k} - \frac{x^{\lambda+l-2k}}{\lambda+l-2k} \ldots\ldots \pm A$, l'on trouve $\int x^3dy = x - y$, ce qui donne $u = \frac{x^3y}{3} - \frac{x}{3} + \frac{y}{3}$.

De la même maniere on trouve $\int x^{n-m-1}dx\times u = \int udx = xu - \int xdu = xu - \frac{x^4}{4}y + \frac{1}{4}\int x^4dy = xu - \frac{x^4}{4}y + \frac{x^2}{8} - \frac{1}{4}\int\frac{xdx}{1+x^3}$,

&

& remettant pour u sa valeur, & divisant le tout par x^n ou x^5, on aura

$$\frac{1}{x^5}\int u dx = \frac{y}{12x} + \frac{y}{3x^4} - \frac{5}{24x^3} - \frac{1}{4x^5}\int\frac{xdx}{1+x^3} = \frac{1}{4.5} - \frac{x^3}{4.7.8} + \frac{x^6}{7.10.11}$$

$- \frac{x^9}{10.13.14} + \&c. = s.$ Maintenant faisant, $x^3 = z$ pour donner à la série la forme requise par le Théoreme, on aura

$$s = \frac{y}{12z^{\frac{1}{3}}} + \frac{y}{3z^{\frac{4}{3}}} - \frac{5}{24z} - \frac{1}{4z^{\frac{5}{3}}} \cdot \int \frac{z^{-\frac{1}{3}} dz}{3 \times \overline{1+z}},$$ &

$$\frac{ds}{dz} = \frac{17}{72z^2} - \frac{y}{36z^{\frac{4}{3}}} - \frac{4y}{9z^{\frac{7}{3}}} + \frac{5}{12z^{\frac{8}{3}}}\int\frac{z^{-\frac{1}{3}} dz}{3 \times \overline{1+z}},$$ d'où

par le premier corollaire, a étant $= 3$, & $k = 3$, l'on tire

$$N = as + \frac{kds}{dz}z = \frac{y}{6z^{\frac{1}{3}}} + 12z - \frac{y}{3z^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{2z^{\frac{5}{3}}}\int\frac{z^{-\frac{1}{3}} dz}{3 \times \overline{1+z}},$$

ou bien en substituant x^3 pour z, $N = \frac{1}{12x^3} + \frac{y}{6x} - \frac{y}{3x^4} + \frac{1}{2x^5}\int\frac{xdx}{1+x^3}$, qui est la somme demandée.

Remarque.

Quoique nous n'ayons appliqué ce Théoreme qu'à des séries dont la somme peut se trouver exactement, cependant l'on voit facilement qu'on pourra s'en servir pour approcher de la somme des autres séries avec beaucoup moins de peine qu'en prenant, comme l'on fait d'ordinaire, la somme des termes.

THEOREME II.

Qu'on fasse $B = c - b$, $C = d - 3c + 2b$, $D = e - 4d + 6c - 3b$, $E = f - 5e + 10d - 10c + 4b$, &c. & l'on aura

N =

$$N = av + b \times \overline{y - v} + B \times \frac{ddy}{2dx^2} x^2 + C \times \frac{d^3y}{6dx^3} + D \times \frac{d^4y}{24dx^4} x^4 + E \times \frac{d^5y}{120dx^5} x^5 + \&c.$$

DÉMONSTRATION.

Puisque $y = v + Px + Qx^2 + Rx^3 + \&c.$ il eſt clair que $b \times y - v = bPx + bQx^2 + bRx^3 + \&c.$ & le reſte de la démonſtration ſe fera comme dans le Théoreme précédent. C. Q. F. D.

La ſuite des termes qui forment les coëfficients B, C, D, &c. eſt manifeſte; ainſi l'on pourra continuer la ſérie N tant que l'on voudra.

COROLLAIRE

Ce Théoreme peut ſervir à trouver dans pluſieurs cas la ſomme des ſéries, ſoit exactement quand cela ce peut, ſoit par approximation. Qu'on ſuppoſe généralement

$$c = b + k$$

$$d = b + \overline{n + 1} \times k$$

$$e = b + \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2} k$$

$$f = b + \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2} \times \frac{n + 3}{3} k$$

$$g = b + \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2} \times \frac{n + 3}{3} \times \frac{n + 4}{4} k$$

&c.

où n marque un des nombres 2, 3, 4, 5, &c. & l'on trouvera exactement la ſomme de la ſérie: il eſt à remarquer que la ſuite

$1,\ n + 1,\ \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2},\ \overline{n + 1} \times \frac{n + 2}{2} \times \frac{n + 3}{3},$ &c.

mar-

marque les différens ordres des nombres qu'on nomme triangulaires pyramidaux, etc. dont est construit le Triangle arithmétique.

Par exemple, soit

$$y = \sqrt{r^2 + x} = r + \frac{x}{2r} - \frac{x^2}{8r^3} + \frac{x^3}{16r^5} - \frac{5x^4}{128r^7} + \frac{7x^5}{256r^9} - \text{etc.}$$

et qu'il faille trouver la somme de

$$ar + \frac{bx}{2r} - \frac{b+k}{8r^3}x^2 + \frac{b+3k}{16r^5}x^3 - \frac{b+6k}{128r^7}5x^4 + \frac{b+10k}{256r^9}7x^5 - \text{etc.}$$

Dans ce cas l'on a $n = 2$, $B = k$, $C = 0$, $D = 0$, etc. $\frac{day}{dx^2} = -\frac{1}{4} \times \overline{r^2 + x}^{-\frac{3}{2}}$, et par conséquent

$$N = av + b\sqrt{r^2 + x} - br - \frac{kx^2}{8} \times \overline{r^2 + x}^{-\frac{3}{2}}.$$

Pareillement, si $n = 3$, on trouvera $B = k$, $C = k$, $D = 0$, $E = 0$, etc. ce qui donnera

$$N = av + b\sqrt{r^2 + x} - br - \frac{kx^2}{8} \times \overline{r^2 + x}^{-\frac{3}{2}} + \frac{kx^3}{16} \times \overline{r^2 + x}^{-\frac{5}{2}}.$$

THEOREME III.

Qu'on regarde le premier terme v comme variable, & qu'on fasse $B = c - b$, $C = d - \frac{3c}{2} + \frac{b}{2}$, $D = e - 2d + c$, $E = f - \frac{5e}{2} + \frac{5d}{3} - \frac{b}{6}$, $F = g - 3f + \frac{5e}{2} - \frac{c}{2}$, etc.

et l'on aura

N =

$$N = av + b \times \overline{y - v} + B \times \frac{dy - dv}{2dx} x + C \times \frac{ddy - ddv}{6dx^2} x^2 + D \times \frac{d^3y - d^3v}{24dx^3} x^3$$

$$+ E \times \frac{d^4y - d^4v}{120dx^4} x^4 + F \times \frac{d^5y - d^5v}{720dx^5} x^5 + \text{etc.}$$

DEMONSTRATION.

Puisque l'on a $dy = Pdx + 2Qxdx + 3Rx^2dx +$ &c. donc, lorsque $x = 0$, $dy = Pdx = dv$; de la même maniere on trouvera, en se servant des différences de y que nous avons données dans la démonstration du premier Théoreme, $ddv = 2Qdx^2$, $d^3v = 6Rdx^3$, $d^4v = 24Sdx^4$, $d^5v = 120Tdx^5$, &c. d'où l'on tirera facilement les équations suivantes

$$b \times \overline{y - v} = bPx + bQx^2 + bRx^3 + bSx^4 + bTx^5 + \text{etc.}$$

$$B \times \frac{dy - dv}{2dx} x = \cdot\ \cdot\ BQx^2 + \tfrac{3}{2}BRx^3 + 2BSx^4 + \tfrac{5}{2}BTx^5 + \text{etc.}$$

$$C \times \frac{ddy - ddv}{6dx^2} x^2 = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ CRx^3 + 2CSx^4 + \tfrac{10}{3}CTx^5 + \text{etc.}$$

$$D \times \frac{d^3y - d^3v}{24dx^3} x^3 = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ DSx^4 + \tfrac{5}{2}DTx^5 + \text{etc.}$$

$$E \times \frac{d^4y - d^4v}{120dx^4} x^4 = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ETx^5 + \text{etc.}$$

&c.

Ensuite, on comparera les termes de ces séries avec les termes correspondans de la série $av + bPx + cQx^2 + dRx^3 +$ &c. & l'on trouvera que les valeurs des coëfficients B, C, D, &c. sont telles que nous les avons marquées ci-dessus. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

L'on voit assés que ce Théoreme peut être utile en plusieurs cas pour approcher de la somme des séries: ainsi je remarquerai ici seulement

ment que, si l'on avoit $c = b + 2k$, $d = b + 3k$, $e = b + 4k$ &c. on trouveroit exactement la somme de la série proposée; car dans ce cas l'on trouve B $= 2k$, C $= 0$, D $= 0$, &c. & par conséquent $N = av + b \times \overline{y - v} + k \times \frac{dy - dv}{dx} x$.

Qu'on suppose $y = \overline{r^2 + sx + xx}^{\frac{3}{2}} = r^3 + \frac{3rs}{2}x + \frac{3r}{2}x^2 + \frac{3s}{4r}x^3 + \frac{3}{8r}x^4$

$$+ \frac{3s^2}{8r}x^2 - \frac{s^3}{16r^3}x^3 - \frac{3s^2}{16r^3}x^4$$

$$+ \frac{3s^4}{128r^5}x^4 \text{ etc.}$$

& qu'on multiplie le premier terme de cette série par a, le second par b, le troisieme par $b + k$, le quatrieme par $\overline{b + 2k}$, & ainsi de suite: on a donc $dy = \overline{r^2 + sx + xx}^{\frac{1}{2}} \times \frac{3s}{2}dx + 3xdx$, et $dv = \frac{3rs}{2}dx$, ce qui donne

$$N = \overline{a - b} \times r^3 + b \times \overline{r^2 + sx + xx}^{\frac{3}{2}} - \frac{3krs}{2}x + \overline{\frac{3ks}{2}x + 3kx^2} \times \overline{r^2 + sx + xx}^{\frac{1}{2}}.$$

COROLLAIRE II.

Soit dans la courbe parabolique une suite d'ordonnées PA, QL, RM, &c. (fig. 5.) également distantes entre elles, & soit PA $= v$, QL $= y$, RM $= u$, &c. AL $=$ LM $=$ MN $=$ &c. $= x$. Or comme cette courbe parabolique donne $y = v + Px + Qx^2 + Rx^3$ &c. on aura pareillement $u = y + px + qx^2 + rx^3 +$ &c. p, q, r, &c. étant les coëfficients des termes; & il est clair que, de même qu'on a

$$N = av + bPx + cQx^2 + \text{etc.} = av + b\, d\,\overline{y - v} + B \times \frac{dy - dv}{2dx}x + C \times \frac{ddy - ddv}{6dx^2}x^2 + \text{etc},$$

 on

on aura auſſi

$$N' = ay + bpx + cqx^2 + \text{etc.} = ay + b \times \overline{u-y} + B \times \frac{du-dy}{2\,dx}x + C \times \frac{ddu-ddy}{6\,dx^2}x^2 + \text{etc.}$$

&, en prenant la ſomme des deux équations, il vient

$$N + N' = a \times \overline{v+y} + b \times \overline{u-v} + B \times \frac{du-dv}{2dx}x + C \times \frac{ddu-ddv}{6\,dx^2}x^2 + \text{etc.}$$

d'où il ſuit que, tel que ſoit le nombre des ordonnées, ſi on nomme la premiere v, la derniere ω; & que la ſomme de toutes ces ordonnées, moins la derniere, ſoit nommée S, & la ſomme des N, N', N'', &c. ſoit nommée K, on aura toujours

$$K = a \times S + b \times \overline{\omega - v} + B \times \frac{d\omega - dv}{2\,dx}x + C \times \frac{dd\omega - ddv}{2\,dx^2}x^2 + D \times \frac{d^3\omega - d^3v}{24\,dx^3}x^3$$
$$+ E \times \frac{d^4\omega - d^4v}{120\,dx^4}x^4 + F \times \frac{d^5\omega - d^5v}{720\,dx^5}x^5 + \text{etc.}$$

Qu'on faſſe $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{4}$, &c. & l'on aura

$$N = v + \frac{Px}{2} + \frac{Qx^2}{3} + \frac{Rx^3}{4} + \text{etc.}$$ d'où l'on voit que

$N \times x$ dans ce cas ſera égale à l'eſpace parabolique PALQ, $N' \times x$ ſera égale à l'eſpace QLMR; et généralement, ſi TO eſt la derniere des ordonnées qu'on a nommée ω, $K \times x$ ſera égale à la ſomme des eſpaces paraboliques compris entre la premiere et la derniere ordonnée, c'eſt à dire, à l'eſpace PAOT que je nommerai H; ce cas donne auſſi $B = -\frac{1}{6}$, $C = 0$, $D = \frac{1}{30}$, $E = 0$, $F = -\frac{1}{42}$, $G = 0$, etc. ainſi on aura

$$H = Sx + \frac{\omega - v}{2}x - \frac{d\omega - dv}{12\,dx}x^2 + \frac{d^3\omega - d^3v}{720\,dx^3}x^4 - \frac{d^5\omega - d^5v}{30240\,dx^5}x^6 + \frac{d^7\omega - d^7v}{1209600\,dx^7}x^8 - \text{etc}$$

$$S = \frac{H}{x} - \frac{\omega - v}{2} + \frac{d\omega - dv}{12\,dx}x - \frac{d^3\omega - d^3v}{720\,dx^3}x^3 + \frac{d^5\omega - d^5v}{30240\,dx^5}x^5 - \frac{d^5\omega - d^7v}{1209600\,dx^7}x^7 + \text{etc.}$$

Cette

Cette formule-ci a été trouvée d'une autre maniere par M. *Mac-Laurin* dans son Traité des fluxions art. 839, et il a suffisamment fait voir l'étendue de son usage.

THEOREME IV.

Conservant toujours l'équation $y = v + Px + Qx^2 + \text{etc.}$ qu'on suppose maintenant $h = \int y dx = vx + \frac{Px^2}{2} + \frac{Qx^3}{3} + \frac{Rx^4}{4} + \&c.$

& $N = avx + \frac{bPx^2}{2} + \frac{cQx^3}{3} + \frac{dRx^4}{4} + \&c.$ & qu'on fasse $B = b - a$, $C = c - 3b + 2a$, $D = d - 4c + 6b - 3a$, $E = e - 5d + 10c - 10b + 4a$, &c. & l'on aura

$$N = ah + B \times \frac{dy}{2dx} x^2 + C \times \frac{ddy}{6dx^2} x^3 + D \times \frac{d^3y}{24dx^3} x^4 + E \times \frac{d^4y}{120dx^4} x^5 + \text{etc.}$$

La démonstration est semblable à celle du second Théoreme, en y faisant quelques legers changemens qu'il est facile d'appercevoir.

COROLLAIRE

On peut remarquer que, toutes les fois qu'on aura

$$b = a + k$$

$$c = a + \overline{n+1} \times k$$

$$d = a + \overline{n+1} \times \frac{n+2}{2} k$$

$$e = a + \overline{n+1} \times \frac{n+2}{2} \times \frac{n+3}{3} k$$

&c:

en

en substituant pour n quelqu'un des nombres 2, 3, 4, 5, &c. on trouvera exactement la somme de la série.

Par exemple, étant donné le logarithme hyperbolique de $1+x$ qui est $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ &c. il sera facile d'avoir la somme de $ax - \frac{a+k}{2}x^2 + \frac{a+4k}{3}x^3 - \frac{a+10k}{4}x^4 + \frac{a+20k}{5}x^5 -$ etc. car l'on a $n = 3$, $B = k$, $C = k$, $D = 0$, $E = 0$, &c. $y = \frac{1}{1+x}$, $h = \log. \overline{1+x}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\overline{1+x}^2}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2}{\overline{1+x}^3}$, & en substituant ces valeurs il vient

$$N = a \times \log. \overline{1+x} - \frac{k}{2} \times \frac{x^2}{\overline{1+x}^2} + \frac{k}{3} \times \frac{x^3}{\overline{1+x}^3}.$$

THEOREME V.

Les mêmes choses étant supposées que dans le Théoreme précédent, si l'on regarde v comme variable, & que l'on fasse $B = b - a$, $C = c - \frac{3b}{2} + \frac{a}{2}$, $D = d - 2c + b$, $E = e - \frac{5d}{2} + \frac{5c}{3} - \frac{a}{6}$, $F = f - 3e + \frac{5d}{2} - \frac{b}{2}$, &c. on aura

$$N = ah + B \times \frac{y-v}{2}x + C \times \frac{dy - dv}{6dx}x^2 + D \times \frac{ddy - ddv}{24dx^2}x^3 + E \times \frac{d^3y - d^3v}{120dx^3}x^4 + F \times \frac{d^4y - d^4v}{720dx^4}x^5 + \text{\&c.}$$

La démonstration en est peu différente de celle du troisieme Théoreme.

COROL-

COROLLAIRE.

La commune diſtance des ordonnées PA, QL, RM, &c. (fig. o.) étant ſuppoſée x, & ayant nommé PA, v; QL, y; RM, u; &c. il eſt clair que, de même qu'on a $y = v + Px + Qx^2 +$ &c. on aura auſſi $u = y + px + qx^2 +$ &c. p, q, &c. étant les coëfficients des termes; & faiſant $N' = ayx + \frac{bpx^2}{2} + \frac{cqx^3}{3} +$ &c. & $h' = \int u\,dx$, ce Théoreme donnera

$$N' = ah' + B \times \frac{u - y}{3} x + C \times \frac{du - dy}{6\,dx} x^2 + \text{\&c.}$$

& la ſomme de cette équation & de celle du Théoreme donne

$$N + N' = a \times \overline{h + h'} + B \times \frac{u - v}{2} x + C \times \frac{du - dv}{6\,dx} x^2 + D \times \frac{ddu - ddv}{24\,dx} x^3 + \text{\&c.}$$

D'où il eſt manifeſte que, ſi la premiere des ordonnées ſoit nommée v, la derniere ω, la ſomme des N, N', N'', &c. ſoit déſignée par K, & la ſomme des h, h', h'', &c. c'eſt à dire, des eſpaces paraboliques PALQ, QLMR, &c. par H, on aura toujours

$$K = a \times H + B \times \frac{\omega - v}{2} x + C \times \frac{d\omega - dv}{6\,dx} x^2 + D \times \frac{dd\omega - ddv}{24\,dx^2} x^3 + E \times \frac{d^3\omega - d^3v}{120\,dx^3} x^4 + F \times \frac{d^4\omega - d^4v}{720\,dx^4} x^5 + \text{\&c.}$$

Soit $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{5}$, &c. et l'on trouvera $B = -\frac{1}{6}$, $C = 0$, $D = \frac{1}{30}$, $E = 0$, $F = -\frac{1}{42}$, $G = 0$, etc. ce qui réduira le Théoreme à cette forme

$$K = \frac{H}{2} - \frac{\omega - v}{12} x + \frac{dd\omega - ddv}{720\,dx^2} x^3 - \frac{d^4\omega - d^4v}{30240\,dx^4} x^5 + \frac{d^6\omega - d^6v}{1209600\,dx^6} x^7 - \text{etc.}$$

THEO-

THEOREME VI.

Ayant ſuppoſé $y = A + Px + Qx^2 + Rx^3 + \text{etc.} = ZK$ (fig. 6) et $AZ = x$, ſi l'on prend de l'autre côté du point A, $Az = AZ$, et qu'on mene l'ordonnée $zk = v$; ſi de plus on ſuppoſe $aA + bQx^2 + cSx^4 + dVx^6 + \text{etc.} = N$, et qu'on faſſe $B = b - a$, $C = c - 2b + a$, $D = d - 5c + 7b - 3a$, $E = e - \frac{28}{3}d + \frac{98}{3}c - \frac{124}{3}b + 17a$, $F = f - 15e + 98d - 310c + 381b - 155a$, etc. Je dis qu'on aura

$$N = a \times \frac{y+v}{2} + B \times \frac{dy - dv}{4dx} x + C \times \frac{d^3y - d^3v}{48dx^3} x^3 + D \times \frac{d^5y - d^5v}{144dx^5} x^5 +$$
$$E \times \frac{d^7y - d^7v}{80640\, dx^7} x^7 + F \times \frac{d^9y - d^9v}{7257600\, dx^9} x^9 + \text{etc.}$$

DEMONSTRATION.

Puisque $y = A + Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \text{etc}$, on aura $v = A - Px + Qx^2 - Rx^3 + Sx^4 - \text{etc}$, et par conſéquent $\frac{y+v}{2} = A + Qx^2 + Sx^4 + Vx^6 + Zx^8 + \text{etc.}$

Qu'on prenne la difference premiere, troiſieme, cinquieme, etc. de la derniere équation, en obſervant que ces différences de v ſont négatives, et l'on aura

$$\frac{dy - dv}{2} = 2Qxdx + 4Sx^3dx + 6Vx^5dx + 8Zx^7dx + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3y - d^3v}{2} = 2.3.4\,Sxdx^3 + 4.5.6\,Vx^3dx^3 + 6.7.8\,Zx^5dx^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^5y - d^5v}{2} = 2.3.4.5.6\,Vxdx^5 + 4.5.6.7.8\,Zx^3dx^5 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^7y - d^7v}{2} = 2.3.4.5.6.7.8\,Zxdx^7 + \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

D'où

D'où l'on tirera

$$a \times \frac{y+v}{2} = a\text{A} + a\text{Q}x^2 + a\text{S}x^4 + a\text{V}x^6 + a\text{Z}x^8 + \&c.$$

$$\text{B} \times \frac{dy - dv}{4dx}x = \cdot\,\cdot\ \text{BQ}x^2 + 2\text{BS}x^4 + 3\text{BV}x^6 + 4\text{BZ}x^8 + \&c.$$

$$\text{C} \times \frac{d^3y - d^3v}{48dx^3}x^3 = \cdot\,\cdot\,\cdot\ \text{CS}x^4 + 5\text{CV}x^6 + 14\text{CZ}x^8 + \text{etc.}$$

$$\text{D} \times \frac{d^5y - d^5v}{1440dx^5}x^5 = \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\ \text{DV}x^6 + \tfrac{28}{3}\text{DZ}x^8 + \&c.$$

$$\text{E} \times \frac{d^7y - d^7v}{80640dx^7}x^7 = \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\ \text{EZ}x^8 + \&c.$$

&c.

& si on compare les termes de ces séries avec les termes correspondans de la série $a\text{A} + b\text{Q}x^2 + c\text{S}x^4 + d\text{V}x^6 + \&c.$ on trouvera les valeurs des coëfficients B, C, D, &c. telles que nous les avons marquées.

COROLLAIRE I.

S'il arrive que $b = a + k$, $c = a + 2k$, $d = a + 3k$, &c. on trouvera $\text{B} = k$, $\text{C} = 0$, $\text{D} = 0$, &c. & par conséquent ce sera un cas où l'on aura exactement la somme de la série proposée.

Par exemple; si, ayant

$$\frac{1}{1 - 3x^2 + x^4} = 1 + 3x^2 + 8x^4 + 21x^6 + 55x^8 + \&c.$$

l'on demande la somme de

$$a + \overline{a+k} \times 3x^2 + \overline{a+2k} \times 8x^4 + \overline{a+3k} \times 21x^6 + \&c.$$

on aura $\frac{y+v}{2} = \frac{1}{1 - 3x^2 + x^4}$, $\frac{dy - dv}{4dx} = \frac{3x - 2x^3}{\overline{1 - 3x^2 + x^4}^2}$,

 ce

ce qui donne la ſomme, ou

$$N = \frac{a}{1 - 3x^2 + x^4} + \frac{3kx^2 - 2kx^4}{\overline{1 - 3x^2 + x^4}^2}.$$

COROLLAIRE II.

Dans l'équation

$$aAx + bQx^3 + cSx^5 + dVx^7 + \&c. = a \times \frac{y+v}{2} x + B \times \frac{dy - dv}{4dx} x^2 + C \times \frac{d^3y - d^3v}{48\,dx^3} x^4 + \&c.$$

qu'on ſubſtitue au lieu de $\frac{y+v}{2}$ ſa valeur $A + Qx^2 + Sx^4 + \&c.$

& il viendra $aAx + \overline{a - b} \times Qx^3 + \overline{a - c} \times Sx^5 + \overline{a - d} \times Vx^7 + \&c.$

$$= aAx - B \times \frac{dy - dv}{4dx} x^2 - C \times \frac{d^3y - d^3v}{48\,dx^3} x^4 + \&c.$$

Enſuite, faiſant $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{4}{5}$, $d = \frac{6}{7}$, $e = \frac{8}{9}$, &c. le premier membre de cette équation deviendra $Ax + \frac{Qx^3}{3} + \frac{Sx^5}{5} + \frac{Vx^7}{7} + etc.$ qui eſt égal à $\int \frac{y+v}{2} dx$, c'eſt à dire, à la moitié de l'aire parabolique compriſe entre les ordonnées v & y: qu'on faſſe donc $\int \overline{y + v} \times dx = h$, & comme dans la ſuppoſition préſente l'on a $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{7}{15}$, $D = -\frac{31}{21}$, $E = \frac{127}{15}$, $F = -\frac{5 \times 511}{33}$, &c. il en réſultera

$$\frac{h}{2} = Ax + \frac{\overline{dy - dv}}{12\,dx} x^2 - \frac{7 \times \overline{d^3y - d^3v}}{720\,dx^3} x^6 + \frac{31 \times \overline{d^5y - d^5v}}{30240\,dx^5} x^6 - \frac{127 \times \overline{d^7y - d^7v}}{1209600\,dx^7} x^8$$

$$+ \frac{511 \times \overline{d^9y - d^9v}}{47900160\,dx^9} x^{10} - \&c.$$

Main-

Maintenant, si l'on suppose que la commune distance des ordonnées PA, QL, RM, &c. est $2x$, & que AZ $= x$, & qu'ayant pris LX $=$ AZ on éleve l'ordonnée X$r = u$, il est clair qu'en nommant h' l'espace KZXr & 1A l'ordonnée QL, on aura

$$\frac{h'}{2} = 1Ax + \frac{du - dy}{12dx}x^2 - 7 \times \frac{\overline{d^3u - d^3y}}{720dx^3}x^4 + \&c.$$

& cette équation ajoûtée à la précédente donne

$$\frac{h+h'}{2} = \overline{A + 1A} \times x + \frac{du - dv}{12dx}x^2 - \frac{7 \times \overline{d^3u - d^3v}}{720dx^3}x^4 - \&c.$$

& comme on auroit de semblables équations pour chaque ordonnée RM, SN, &c. il s'ensuit que, si TO la derniere de ces ordonnées soit nommée ω, & qu'on prenne en avançant du même côté

Os $=$ AZ $= \frac{x}{2}$, & qu'on nomme H l'aire $kzst$ terminée par

les ordonnées zk, st, & S la somme de toutes les ordonnées PA, QL ..... TO, on aura

$$\frac{H}{2} = Sx + \frac{d\omega - dv}{12dx}x^2 - \frac{7 \times \overline{d^3\omega - d^3v}}{720dx^3}x^4 + \frac{31 \times \overline{d^5\omega - d^5v}}{30240dx^5}x^6 - \frac{127 \times \overline{d^7\omega - d^7v}}{1209600dx^7}x^8 + \frac{511 \times \overline{d^9\omega - d^9v}}{47900160dx^9}x^{10} - \&c.$$

$$S = \frac{H}{2x} - \frac{d\omega - dv}{12dx}x + \frac{7 \times \overline{d^3\omega - d^3v}}{720dx^3}x^3 - \frac{31 \times \overline{d^5\omega - d^5v}}{30240dx^5}x^5 + \frac{127 \times \overline{d^7\omega - d^7v}}{1209600dx^7}x^7 - \frac{511 \times \overline{d^9\omega - d^9v}}{47900160dx^9}x^9 + \&c.$$

Cette formule-ci a été trouvée d'une autre maniere par M. *Mac-Laurin* dans son Traité des fluxions art. 832, et il en a fait voir l'usage par l'application qu'il en a fait à plusieurs exemples.

THEO-

THEOREME VII.

Les mêmes choses étant supposées que dans le Théoreme précédent, si l'on fait $B = \frac{b - a}{3}$, $C = \frac{c}{5} - \frac{2b}{3} + \frac{7a}{15}$, $D = \frac{d}{7} - c + \frac{7b}{3} - \frac{31}{21}a$, $E = \frac{e}{9} - \frac{4}{3}d + \frac{98}{15}c - \frac{124}{9}b + \frac{127}{15}a$, $F = \frac{f}{11} - \frac{5}{3}e + 14d - 62c + 127b - \frac{2555}{33}a$, &c. on aura

$$N \times x = \frac{ah}{2} + B \times \frac{dy - dv}{4dx} x^2 + C \times \frac{d^3y - d^3v}{48dx^3} x^4 + D \times \frac{d^5y - d^5v}{1440dx^5} x^6 + E \times \frac{d^7y - d^7v}{80640dx^7} x^8 + F \times \frac{d^9y - d^9v}{7257600dx^9} x^{10} + \&c.$$

La démonstration de ce Théoreme est fort peu différente de celle du Théoreme précédent.

COROLLAIRE.

Comme les formules qu'on vient de trouver dans les deux derniers Théoremes ont une grande convergence, elles peuvent être fort utiles pour approcher avec peu de peine de la valeur des séries. Pour indiquer un cas dans lequel la série auroit une somme déterminée, on n'a qu'à supposer $b = a + 3k$, $c = b + 7k$, $d = c + 11k$, $e = d + 15k$, &c. car alors on auroit $B = k$, $C = 0$, $D = 0$, &c. & le Théoreme donneroit

$$N \times x = \frac{ah}{2} + k \times \frac{dy - dv}{4dx} x^2.$$

THEO-

THEOREME VIII.

Les mêmes choſes étant encore ſuppoſées, ſi l'on prend r pour une quantité invariable, mais indéterminée, & qu'on faſſe $B = a - r$,

$$C = \frac{b - 3a + 2r}{3}, \quad D = \frac{c}{5} - \frac{2}{3}b + a - \frac{8}{15}r,$$

$$E = \frac{d}{7} - c + \frac{7}{3}b - 3a + \frac{32}{21}r, \quad F = \frac{e}{9} - \frac{4}{3}d + \frac{98}{15}c - \frac{124}{5}b + 17a - \frac{128}{15}r, \text{ \&c.}$$

on trouvera, en ſuivant à peu prés la même méthode dont on s'eſt ſervi dans les deux Théoremes précédens,

$$N \times x = \frac{rh}{2} + B \times \frac{y+v}{2}x + C \times \frac{dy - dv}{4\,dx}x^2 + D \times \frac{d^3y - d^3v}{48\,dx^4}x^4 + E \times \frac{d^5y - d^5v}{1440\,dx^5}x^5$$

$$+ F \times \frac{d^7y - d^7v}{80640\,dx^7}x^8 + \text{ \&c.}$$

COROLLAIRE.

Si l'on ſuppoſe $b = a + k$, $c = a + 2k$, $d = a + 3k$, &c. & qu'on faſſe $r = a - \frac{k}{2}$: ou, ſi l'on ſuppoſe $a = s \times t$, $b = \overline{s + k} \times \overline{t + k}$, $c = \overline{s + 2k} \times \overline{t + 2k}$, $d = \overline{s + 3k} \times \overline{t + 3k}$, &c. & qu'on faſſe $r = \overline{s - \frac{k}{2}} \times \overline{t - \frac{k}{2}}$, on trouvera exactement la ſomme de la ſérie; car dans le premier l'on a $B = \frac{k}{2}$, $C = 0$, $D = 0$, &c. & par conſéquent $N \times x = \overline{a - \frac{k}{2}} \times \frac{h}{2} + \frac{k}{2} \times \frac{y+v}{2}x$; dans le ſecond cas il vient $B = \frac{sk + tk}{2} - \frac{kk}{4}$, $C = \frac{kk}{2}$, $D = 0$, $E = 0$, &c.

ce qui donne

$$N \times x = \overline{s - \frac{k}{2}} \times \overline{t - \frac{k}{2}} \times \frac{h}{2} + \overline{\frac{sk + tk}{2} - \frac{kk}{4}} \times \frac{y + v}{2} x + \frac{kk}{2} \times \frac{dy - dv}{4dx} x^2.$$

Par exemple, étant donné le logarithme hyperbolique de $\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ qui est $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} +$ &c. on trouvera la somme de la suite $1.3\, x + \frac{2.4}{3} x^3 + \frac{3.5}{5} x^5 + \frac{4.6}{7} x^7 +$ &c. car dans ce cas l'on a $s = 1$, $t = 3$, $k = 1$, $r = \frac{5}{4}$, $\frac{y + v}{2} = \frac{1}{1 - xx}$, $\frac{dy - dv}{4dx} = \frac{x}{\overline{1 - xx}^2}$, $\frac{h}{2} = \log. \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$,

ce qui donne

$$N \times x = \frac{5}{4} \log. \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} + \frac{7x}{4 \times \overline{1 - xx}} + \frac{x^3}{2 \times \overline{1 - xx}^2}.$$



MA-

MANIERE NOUVELLE
DE
TROUVER LE TERME GÉNÉRAL DES SÉRIES
RECURRENTES,
PAR M. WALMESLEY.

Après les grands-hommes qui ont considéré les *Séries recurrentes*, il y auroit de la témérité à remanier ce sujet dans le dessein de mettre les nouvelles réflexions à coté des anciennes découvertes. Mais, comme je ne prétends que de donner un petit supplément, qu'ils ont sans doute plutôt négligé qu'oublié, je me flatte qu'on ne désapprouvera point mes foibles efforts. En voici l'occasion. J'avois fait, il y a quinze ans, un ample Commentaire sur l'*Arithmétique universelle du Chevalier Newton*. Quelques années après, je crus d'avoir trouvé l'occasion de le faire imprimer: occasion qui n'est encore que trop éloignée par la faute des Libraires. En relisant mon Ouvrage, je pensai devoir y ajouter la methode de trouver les racines approchées d'une équation par les *Séries recurrentes*, que M. *Daniel Bernoulli* a découverte, & que M. *Euler* a si bien expliquée. Dans cette vue, je cherchai le terme général de ces séries d'une maniere nouvelle, que je communiquai l'année passée à M. *Bouquet*, Officier très versé dans les Mathématiques. Le peu de loisir que j'avois alors, m'empecha de détailler une démonstration, dont M. *Bouquet* n'avoit pas besoin; & que plusieurs m'ont demandée, depuis que cette méthode a été publiée dans la *Nouvelle Bibliotheque des Sciences & des beaux Arts*. Je prends donc le parti de la soumettre au jugement de l'Académie. Si elle approuve mes raisonnemens, qui osera les condamner?

PRO-

PROPOSITION L.

THEOREME.

Si on éleve à une puissance quelconque un polynome, dont les termes contiennent la même lettre avec des exposans en progression arithmétique depuis 1 *jusqu'à* n; *les exposans des termes de la puissance seront aussi en progression arithmétique,*

DEMONSTRATION.

Soit

$$bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 \ldots\ldots + \vdots\, x^n$$

le polynome qu'on doit elever à la puissance dont l'exposant est q: que les étoiles $\vdots$ marquent le coëfficient de x^n, & que $\vdots\, x^n + A$ soit égal à tout le polynome, que A exprime jusqu'à $\vdots\, x^n$ exclusivement.

En négligeant les coëfficiens, auxquels on ne fait pas attention, on sait que

$$(x^n + A)^q = x^{nq} + x^{nq-n}A + x^{nq-2n}A^2 \ldots\ldots + A^q.$$

Or

$$A = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} \ldots\ldots + x^1.$$

Donc

$$x^{nq-n}A = x^{nq-n}(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} \ldots\ldots + x^1)$$

c'est à dire

$$x^{nq-n}A = x^{nq-1} + x^{nq-2} + x^{nq-3} \ldots\ldots + x^{nq-n+2} + x^{nq-n+1}.$$

Donc les deux premiers termes de $(x^n + A)^q$ ont leurs exposans en progression arithmétique; puisqu'ils sont

nq; $nq-1$; $nq-2$; $nq-3$ ...... $nq-n+3$; $nq-n+2$; $nq-n+1$.

Mais tous les autres termes se déterminent comme les deux premiers. Car soit

$A = x^{n-1} + B$; on aura $A^2 = x^{2n-2} + x^{n-1}B + B^2$.

&

&

$$B = x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} \ldots\ldots + x^{1}.$$

&

$$x^{n-1} B = x^{2n-3} + x^{2n-4} + x^{2n-5} \ldots\ldots + x^{n}.$$

Donc

$$x^{nq-2n} A^2 = x^{nq-3} + x^{nq-4} + x^{nq-5} \ldots\ldots + x^{nq-n}.$$

dont les expoſans ſont

$$nq-3;\ nq-4;\ nq-5;\ nq-6 \ldots\ldots nq-n+2;\ nq-n+1;\ nq-n$$

qui rentrent dans la premiere progreſſion, & l'augmentent d'un terme.

On prouvera la même choſe de B^2, en ſuppoſant $B = x^{n-2} + C$. Et ainſi toujours.

A' préſent

$$A^3 = x^{3n-3} + x^{2n-2}B + x^{n-1}B^2 + B^3$$

On appliquera le raiſonnement précédent à B & B^2; on l'étendra à B^3 en le faiſant $= x^{n-2} + C$; &c.

Il eſt évident que de cette maniere la démonſtration a lieu pour toutes les puiſſances de A; de B; de C &c. Donc &c.

COROLLAIRE.

Puisque les expoſans de ce polynome élevé à la puiſſance q, forment la progreſſion arithmétique

$$nq;\ nq-1;\ nq-2;\ nq-3 \ldots\ldots q+3;\ q+2;\ q+1;\ q;$$

les expoſans du même polynome élevé à la puiſſance $q+t$, formeront la progreſſion arithmétique

$$qn+nt;\ qn+nt-1;\ qn+nt-2 \ldots\ldots q+t+3;\ q+t+2;\ q+t+1;\ q+t.$$

Et en donnant à t la valeur des nombres naturels, 1., 2., 3., &c. on trouvera des progreſſions qui auront des termes communs. Par conſéquent, toutes ces différentes puiſſances du même polynome auront des termes communs.

Remarque.

On auroit pu donner à cette démonſtration un air plus général en prenant $x^{nq-mn} A^m$, terme général de $(x^n + A)^q$; en réduiſant ce terme en ſéries, & donnant à m ſucceſſivement les valeurs de 0., 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., &c. Mais la démonſtration que je viens de rapporter, m'a paru plus claire.

PROPOSITION II.

THEOREME.

Si on doit multiplier quelques termes de la puiſſance de la Prop. 1. *par les termes d'un polynome dont les expoſans ſont en progreſſion arithmétique depuis* 0 *juſqu'à m, terme à terme, en ſorte que la ſomme des expoſans dans chaque terme du produit faſſe toujours un nombre donné* p *plus grand que* m; *la moindre puiſſance qui ſatisfaſſe à la queſtion, eſt celle qui a pour expoſant* $q = \frac{p-m}{n}$.

DEMONSTRATION.

Soit le polynome $x^n + A = P$, qu'il faut élever à une certaine puiſſance; & qu'il faille multiplier quelques termes de cette puiſſance par les termes du polynome

$$Q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \;----\; + *x^m$$

dans leur ordre, en ſorte que, dans chaque terme du produit, la ſomme des expoſans de x donne le nombre p. L'étoile * denote le coëfficient du terme x^m dans le polynome Q.

La plus baſſe puiſſance de P, dont quelque terme multiplié par quelque terme de Q, donne l'expoſant p, eſt celle dont le plus haut terme de Q, fait p. Le plus haut terme de P a pour expoſant n. Si donc l'expoſant de la puiſſance, à laquelle il faut élever P, eſt y, l'expoſant du plus haut terme dans P^y ſera ny, qui, multiplié par m expoſant du plus haut terme de Q, produit $ny + m$; & ce nombre doit être égal à p: d'où on tire $y = \frac{p - m}{n} = q$, pour nous en tenir à la dénomination de la Prop. 1.

PROPOSITION III.

THEOREME.

Si $\frac{p - m}{n}$ *etoit une fraction lorsqu'il faut des nombres entiers, on doit prendre le plus petit des nombres entiers au deſſus de cette fraction.*

DEMONSTRATION.

Soit q le nombre entier qu'on prend au lieu de la fraction $\frac{p - m}{n}$: Si q étoit plus petit que $\frac{p - m}{n}$; alors nq ſeroit plus petit que $p - m$, & $nq + m$ plus petit que p. Mais nq eſt les plus haut expoſant de P^q. Donc cette puiſſance ne fournit aucun terme qui ſatisfaſſe à la queſtion.

Mais, lorsque q eſt plus grand que $\frac{p - m}{n}$; alors $nq + m$ eſt plus grand que p. Les expoſans de P^q vont en diminuant depuis nq jusqu'à q: donc les expoſans du produit iront en diminuant depuis $nq + m$ jusqu'à $q + m$. Si $q + m = p$; le dernier terme de P^q eſt celui qu'on demande. Si $q + m$ eſt plus

 grand

grand que p, la puissance P^q est trop haute. Et si $q + m$ est plus petit que p, la puissance P^q fournira quelque terme qui satisfait à la question.

Soit donc $q = \frac{p - m + r}{n}$, où $p - m + r$ est divisible par n. Il faut que q soit le plus petit des nombres entiers au dessus de la fraction $\frac{p - m}{n}$. Car autrement il y en auroit un plus petit, & P^q ne seroit pas la plus basse puissance; ce qui est contre la supposition.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Dans la supposition de la Prop. III. *les* m + 1 *premiers termes de* P^q *à commencer par le* r — m + 1 - - - eme *donneront ce qu'on demande dans la* Prop. II. *Et si* r — m + 1 *étoit un nombre négatif, il faudroit mettre avant le premier terme de* P^q *autant de* o *qu'il y a d'unités dans le nombre* m — r.

DEMONSTRATION.

1°. Les exposans que P^q a dans ses différens termes, sont

$$nq;\ nq-1;\ nq-2;\ nq-3 \cdots nq-y;\ nq-y-1;\ nq-y-2 \cdots q.$$

& le premier terme qui satisfait à la question, doit être multiplié par $a = ax^0$, & son exposant doit être p. Soit $nq - y$ l'exposant de ce terme: donc $nq - y + 0 = p$, & $y = nq - p$. Mais $nq = p - m + r$, & par conséquent $y = r - m$. Or le terme qui a pour exposant $nq - y$ est le $y + 1$ - - eme: il est donc le $r - m + 1$ - - eme.

2°. Le polynome Q a $m + 1$ termes. Chacun de ces termes doit être le multiplicateur d'un des termes de P^q: donc en tout il en faut multiplier autant qu'il y a d'unités dans le nombre $m + 1$ [illegible]

3°. Le nombre des termes de Pq eſt poſitif en deſcendant du premier, au ſecond, au troiſieme, au quatrieme &c. Donc il eſt négatif en remontant du premier à l'avant-premier &c. Mais ces termes ne ſubſiſtent point: c'eſt pourquoi il faut les repréſenter par des o.

Remarque.

Voici une autre démonſtration de la troiſieme partie de cette Propoſition. Le terme qu'on cherche doit avoir pour expoſant $nq - y = nq + m - r$. Mais $r - m$ eſt négatif par la ſuppoſition; donc $m - r$ eſt poſitif, & $nq + m - r$ eſt plus grand que nq. Le terme, dont $nq + m - r$ eſt l'expoſant, doit être tiré de Pq; & le plus grand expoſant qu'on y trouve, eſt nq. Donc le terme qu'on demande n'y eſt point.

De plus; le plus haut terme de Pq a pour expoſant $nq = p - m + r + o$, nombre qui eſt plus petit que p, puisque $- m + r$ eſt un nombre négatif. C'eſt pourquoi ce n'eſt pas par x^o qu'il faut multiplier le terme de Pq qui a pour expoſant $p - m + r$, pour lui donner l'expoſant p, mais par x^{m-r}. Or x^{m-r} eſt le $m - r + 1$---eme terme du polynome Q: donc il faut omettre les $m - r$, premiers termes de ce polynome dans la multiplication; ce qui eſt la même choſe que de les multiplier par o.

PROPOSITION V.

THEOREME.

La plus haute puiſſance qui ſatisfaſſe à la queſtion, eſt celle qui a l'expoſant p. *Chacune de celles dont les expoſans* q + t *ſont plus grands que* q *&* *moindres que* p, *fournit des termes tels que les demande la* Prop. II. *Ce ſont les* m + 1 *premiers à commencer par le* r − m + nt + 1--eme. *Et ſi après celui-ci il en reſtoit moins qu'il ne faut, on doit mettre autant de* o *après le dernier.*

DEMONSTRATION.

1°. Le dernier terme de P^q est x^p, qui multiplié par ax^0, donne le terme du produit qu'on demande. Tous les termes des puissances supérieures ont des exposans plus grands. Donc ces puissances plus hautes sont inutiles.

2°. Le plus haut terme satisfaisant de P^{q+t} soit le u -- eme: son exposant sera $nq + nt - u + 1$; qui ne change point lorsqu'on multiplie le terme u --- eme de P^{q+t} par a premier terme de Q. Donc $nq + nt - u + 1 = p = nq - m + r$; & $u = r - m + nt + 1$.

3°. Si P^{q+t} après le terme $r - m + nt + 1$ --- eme avoit moins que $m + 1$ termes, il est évident qu'il faut ajouter après le dernier terme autant de o qu'il est nécessaire pour compléter le nombre $m + 1$; parce que dans ce cas il n'y auroit que quelques uns des premiers termes de Q employés dans la multiplication: le produit des derniers seroit nul; ou les derniers seroient multipliés par o.

PROPOSITION VI.

THEOREME

La fraction $\dfrac{Ax^m}{A + Bx^n}$ *donne par la division actuelle une série recurrente géométrique.*

DEMONSTRATION.

Par la nature de la division, les nouveaux termes du dividende se trouvent en multipliant les derniers termes du quotient par Bx^n; & les nouveaux termes du quotient en divisant chacun des nouveaux termes du dividende par A. Le premier terme du quotient est $\dfrac{Ax^m}{A}$: donc

donc le nouveau dividende sera $\frac{ABx^{m+n}}{A} = \frac{Ax^m}{A} \times Bx^n$; & le second terme du quotient, en négligeant les signes, sera $\frac{ABx^{m+n}}{A^2}$. De même le troisieme, quatrieme &c. termes du quotient seront $\frac{AB^2x^{m+2n}}{A^3}$; $\frac{AB^3x^{m+3n}}{A^4}$ &c.

COROLLAIRE I.

La raison de deux termes consécutifs est celle de 1 à $\frac{Bx^n}{A}$.

COROLLAIRE II.

Les termes de cette série dont la place est marquée par un nombre impair, tels que le 1^r; le 3e; le 5e; le 7e; &c. sont positifs, & contiennent $\frac{Bx^n}{A}$ élevé à une puissance dont l'exposant est pair, en mettant le 0 parmi les nombres pairs. Ou, ce qui revient au même, si le terme en le $2m+1$ - - eme de la suite, l'exposant de $\frac{Bx^n}{A}$ sera $2m$. Les termes dont la place est déterminée par un nombre pair, tel que le 2^d; le 4e; le 6; &c., sont négatifs & contiennent $\frac{Bx^n}{A}$ élevé à une puissance dont l'exposant est un nombre impair. Si donc le terme est le $2m$ - - - eme, l'exposant de $\frac{Bx^n}{A}$ sera $2m-1$.

COROLLAIRE III.

Donc cette série devient

$$\frac{Ax^m}{A} - \frac{ABx^{m+n}}{A^2} + \frac{AB^2x^{m+2n}}{A^3} - \frac{AB^3x^{m+3n}}{A^4} + \frac{AB^4x^{m+4n}}{A^5} - \&c.$$

ou

ou bien

$$\frac{Ax^m}{A}\left(1 - \frac{Bx^n}{A} + \frac{B^2x^{2n}}{A^2} - \frac{B^3x^{3n}}{A^3} + \frac{B^4x^{4n}}{A^4} - \frac{B^5x^{5n}}{A^5} + \&c.\right)$$

COROLLAIRE. IV.

Si $\frac{Bx^n}{A}$ étoit un polynome, comme

$$\frac{bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \dots + zx^n}{a}$$

alors $\frac{Ax^m}{a}$ feroit multiplicateur d'une férie compofée de l'unité plus la premiere, plus la feconde, plus la troifieme, plus la quatrieme &c. puiffance de ce polynome pris négativement, puisque $(-\frac{Bx^n}{A})^{2m+1}$ eft un terme négatif; & $(-\frac{Bx^n}{A})^{2m}$ eft un terme pofitif.

COROLLAIRE V.

En donnant à m les valeurs 0; 1; 2; 3; 4; &c. fucceffivement, on aura la même férie géométrique

$$1 - Bx^n + B^2x^{2n} - B^3x^{3n} + B^4x^{4n} - B^5x^{5n} + \&c.$$

répétée plufieurs fois, & multipliée fucceffivement par

A; Ax; Ax^2; Ax^3; Ax^4; &c.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

La férie qui refulte de la divifion d'un polynome par un autre, eft la fomme d'autant de féries géometriques, qu'il y a de termes dans le numérateur de la fraction propofée, ou dans le polynome à divifer.

DE-

DÉMONSTRATION.

Soit la fraction

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 \cdots\cdots + {}^* x^m}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \cdots\cdots + \ddot{*} x^n}$$

à reduire en série; & que $A + Bx^n$ exprime le dénominateur. Cette fraction est égale à

$$\frac{\alpha}{A + Bx^n} + \frac{\beta x}{A + Bx^n} + \frac{\gamma x^2}{A + Bx^n} + \frac{\delta x^3}{A + Bx^n} + \&c.$$

chacune de ces fractions donne une serie géometrique (*Cor. V. Prop. VI.*): donc toutes ensemble donnent autant de séries géometriques, qu'il y a de fractions partielles

$$\frac{\alpha}{A + Bx^n};\ \frac{\beta x}{A + Bx^n};\ \frac{\gamma x^2}{A + Bx^n};\ \frac{\delta x^3}{A + Bx^n};\ \&c.$$

c'ast à dire qu'il y a de termes dans le numérateur de la fraction proposée.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

Trouver le terme général d'une série recurrente sans avoir recours aux facteurs du nominateur de la fraction d'où elle tire son origine.

SOLUTION.

Soit

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 \cdots\cdots + {}^* x^m}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \cdots\cdots + \ddot{*} x^n}$$

la fraction qui donne origine à la série recurrente. Soit p l'exposant que x doit avoir dans le terme qu'on cherche, & $m + 1$ le nombre des termes du numérateur.

Otez du dénominateur son terme constant a: renversez le reste: changez-en les signes: & divisez-le par le terme constant retranché. Vous aurez

$$\frac{-\,{}^{*}x^{n}\ldots\ldots-gx^{6}-fx^{5}-ex^{4}-dx^{3}-cx^{2}-bx}{a}=C.$$

Déterminez par les *Propp. II.* & *III.* l'exposant q de la plus basse puissance de C, dont les termes multipliés par les termes du numérateur de la fraction proposée, ayent l'exposant p. Prenez-en les $m+1$ premiers termes à commencer par le $r-m+1$ - - eme; & multipliez-les chacun par son terme correspondant du numérateur divisé par a, & disposé en sorte que les exposans de x aillent en croissant suivant les nombres naturels, en observant ce qui est prescrit par la *Prop. IV.*

De C élevé successivement aux puissances $q+1$; $q+2$; $q+3$; - - - p, choisissez les $m+1$ premiers termes à commencer par le $r-m+n+1$ - - - eme; par le $r-m+2n+1$ - - - eme; par le $r-m+3n+1$ - - - eme; &c. & multipliez-les chacun par le terme correspondant du numérateur, comme ci-dessus, en observant ce qui a été remarqué dans la *Prop. V.*

La somme de tous ces produits avec leurs coëfficients sera le terme général demandé.

DEMONSTRATION.

La fraction proposée donne par la *Prop. VII.*

$$\frac{\alpha}{a}(1-C+C^{2}-C^{3}+C^{4}-C^{5}+C^{6}-C^{7}+\&c.)$$

$$+\frac{\beta x}{a}(1-C+C^{2}-C^{3}+C^{4}-C^{5}+C^{6}-C^{7}+\&c.)$$

$$+\frac{\gamma x^{2}}{a}(1-C+C^{2}-C^{3}+C^{4}-C^{5}+C^{6}-C^{7}+\&c.)$$

— &c. &c. jusques à

$$+\frac{{}^{*}\lambda^{m}}{a}(1-C+C^{2}-C^{3}+C^{4}-C^{5}+C^{6}-C^{7}+\&c.)$$

On

On a choisi de chacune de ces séries les termes, dont les exposans avec l'exposant de son multiplicateur $\frac{\alpha}{a}$; $\frac{\beta x}{a}$; $\frac{\gamma x^2}{a}$ &c., font l'exposant donné p. Donc &c.

Remarques.

1°. La Proposition premiere avec son corollaire se démontre de la même maniere lorsque la différence des exposans n'est pas l'unité. Dans ce cas on peut, ou déterminer le nombre des termes de la *Prop. IV.*; ou suppléer les termes qui manquent en donnant le coëfficient o aux termes introduits.

2°. Les théoremes rapportés ci-dessus ont lieu aussi lorsque les exposans sont des nombres rompus. Mais cela n'arrive point dans les équations ordinaires. C'est pourquoi nous ne nous sommes pas arrêtés à cette considération.

3°. Le terme général d'un polynome élevé a une puissance quelconque donne aisément les termes dont on a besoin dans notre cas. J'en ai donné la démonstration dans mon Commentaire sur *l'Arithmétique universelle de Newton.*

L'application de ma regle aux exemples particuliers, & à l'approximation des racines, avec quelques remarques sur cette matiere, pourra faire le sujet d'un autre Mémoire.





RECHERCHES DES MOUVEMENS D'UN GLOBE SUR UN PLAN HORIZONTAL.

PAR M. J. ALBERT EULER.

Table VI. & VII. Lorsqu'on veut chercher les loix du mouvement des corps, de quelque figure qu'ils ſoient, dérangé par le frottement, ayant ſurtout égard aux diverſes rotations dont ces corps ſont capables, on rencontre des difficultés inſurmontables & on n'en ſauroit tirer la moindre conſéquence qui puiſſe être accommodée aux expériences.

Si la recherche des mouvemens d'une Toupie, l'effort qu'elle fait pour s'ériger verticalement & la rapidité du mouvement qu'elle reçoit par le moindre attouchement, ſi cette recherche, dis-je, qui n'eſt pourtant que très particuliere, embarraſſe les Géometres à un tel point, qu'ils ſe voyent bientôt obligés de lâcher priſe, quel ſuccès pourroit-on ſe promettre d'une pourſuite à cet égard plus étendue?

Ce n'eſt qu'en commençant par la recherche des choſes les plus ſimples qu'on peut parvenir à la connoiſſance des choſes les plus difficiles: c'eſt ſouvent le plus ſur moyen, & l'expérience nous le confirme. Combien de fois en effet, remontant ainſi de degré en degré, n'eſt-on pas parvenû à la ſolution des problèmes, qui autrement auroient été presque inſolubles?

Flatte

Flatté de cette espérance, j'ai entrepris les recherches présentes; elles sont très particulieres, il est vrai; mais étant nouvelles, elles pourront frayer une route à des recherches plus générales.

Je ne considere ici que des corps sphériques, qui ont non seulement leur centre de gravité dans le centre de la figure, mais qui puissent encore se mouvoir librement autour de chaque diametre, de sorte que les forces centrifuges se détruisent mutuellement de toutes parts. Tels corps seront les globes composés de matiere homogene.

Je suppose encore que le mouvement se fait sur un plan horizontal, de sorte que la pesanteur du corps ne trouble pas son mouvement.

Mais, comme on n'a jusqu'ici traité cette matiere que dans l'hypothèse d'un plan parfaitement poli, je tiendrai compte du frottement que le plan oppose au mouvement du corps.

Or ce sera aussi l'unique obstacle auquel j'aurai ici égard, & je ferai abstraction tant de la résistance de l'air que de tous les autres obstacles que le corps pourroit rencontrer dans son mouvement.

Nonobstant ces restrictions, les recherches présentes ne laisseront pas d'être asses universelles, & de renfermer une infinité de varietés qui dépendent du premier mouvement qu'on aura imprimé au globe. Mais, quelque compliqué que soit le mouvement du corps, on le peut toujours décomposer en deux, l'un progressif ou celui du centre, & l'autre rotatoire, par lequel le globe tourne autour de quelque axe passant par son centre: car, quelque mouvement que le globe puisse avoir, on peut toujours considérer séparément l'un & l'autre; & partant en considérant le mouvement de rotation, on peut supposer le centre en repos; & alors il faut absolument qu'il y ait toujours à chaque instant un diamètre en repos, qui par conséquent pour cet instant sera l'axe de rotation.

Un tel mouvement est donc susceptible d'un double changement; l'un par lequel l'axe de rotation change de situation, & l'autre par lequel la vitesse de rotation augmente ou diminue. Donc, pour avoir une parfaite connoissance d'un tel mouvement, il faut qu'on puisse à chaque instant assigner, tant le diametre autour duquel le globe tourne, que la vitesse de rotation. Toutes ces variations étant produites par le frottement, puisque la direction du frottement dépend de la position de l'axe de rotation comparée avec le mouvement progressif, on ne sauroit déterminer les variations de l'un & de l'autre mouvement sans avoir égard à tous les deux ensemble.

Pour mettre cette matiere dans tout son jour, il conviendra de considérer quelques cas particuliers & remarquables, avant que d'entreprendre la solution du probleme général; ce sera le plus sûr moyen de nous éclaircir sur cette matiere en montant par degrés à la solution générale, qui d'abord au commencement éblouïroit plutôt l'esprit qu'elle ne l'éclaireroit.

Or d'abord je remarque, qu'il y a des cas où le frottement évanouït, ce qui arrive lorsque le point d'attouchement ne rase point le plan. Le premier est lorsque l'axe de rotation est vertical & qu'il n'y a point de mouvement progressif; car alors le point d'attouchement étant en repos, il est clair que le globe ne souffre aucun frottement.

Un autre cas où il n'y a point de frottement est, lorsque l'axe de rotation est horizontal & perpendiculaire à la direction du mouvement, & que la vitesse rotatoire au point d'attouchement est précisément égale & contraire à la vitesse progressive. C'est le cas qui se rencontre le plus souvent, & qui porte le nom d'une rotation parfaite, à cause de sa ressemblance avec le mouvement d'une roue.

Il y a encore d'autres cas exempts de frottement, comme nous le verrons dans la suite: lorsque l'axe de rotation se trouve dans le plan perpendiculaire à la direction du mouvement progressif, & que la vitesse

de

de rotation au point d'attouchement est précisément égale & contraire à la vitesse progressive. Car, puisqu'il n'y a point de frottement dans ce cas, le mouvement restera toujours le même.

Dans tous ces cas donc, le mouvement du globe se conservera inaltéré, de sorte que tant le mouvement progressif que celui de rotation ne souffre aucun changement.

Ces cas sont d'autant plus remarquables que, quelque irrégulier que soit le mouvement du globe, il s'y réduit enfin toujours en sorte qu'après un certain tems déterminé, le globe acquiert un tel mouvement où le frottement n'a plus lieu.

C'est de plus ici qu'il faut reconnoitre un veritable saut; puisque le mouvement après avoir souffert des changemens continuels, commence subitement à se mouvoir uniformement: ce qui paroit être d'autant plus paradoxe que le calcul même ne renferme pas ce saut.

Cependant la raison en est très évidente si nous faisons réflexion à la nature du frottement qui, à ce que les expériences nous font voir, conserve toujours la même quantité, soit que le corps se meuve plus ou moins rapidement; & qui, dès que la vitesse evanouït, se réduit subitement à rien. Or cette circonstance ne pouvant pas être comprise dans le calcul, il ne faut pas être surpris que le mouvement actuel ne réponde au calcul que jusqu'à un certain terme. Donc, quand j'aurai trouvé des formules analytiques pour déterminer le mouvement du globe troublé par le frottement, ces formules n'auront lieu que tant que le frottement dure; & aussitôt que le frottement évanouït, il faut abandonner les formules trouvées, le mouvement devenant uniforme dès ce moment.

De là il est clair que tant s'en faut qu'on doive bannir tout saut de la Nature, que plutôt dans tous les mouvemens où le frottement a lieu, on est obligé d'admettre un saut réel; comme nous en serons convaincus bientôt par les recherches suivantes.

PRO-

PROBLEME I.

1. *Ayant imprimé au globe un mouvement tant progressif que rotatoire autour d'un axe horizontal & perpendiculaire à la direction du centre, déterminer la continuation du mouvement.*

SOLUTION.

Puisque la direction du frottement n'est pas différente de la direction du mouvement progressif, & qu'elle se trouve dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, ni celle-ci, ni la direction du mouvement progressif, n'en souffrira aucun changement: donc le centre du globe conservera toujours son mouvement en ligne droite, & l'axe de rotation restera constamment horizontal & perpendiculaire à la direction du centre. Il ne reste donc qu'à déterminer à chaque tems proposé, tant le lieu du centre, qui sera toujours dans la même ligne droite, que la vitesse de rotation.

Fig. 1. Soit le rayon du globe $OP = a$, son poids $= M$, & son moment d'inertie à l'égard d'un axe quelconque qui traverse le centre $= Mkk$, lequel, au cas que le globe soit composé de matière homogène, sera $= \frac{2}{5} Maa$.

Comme au commencement le globe est supposé toucher le plan au point A, soit sa vitesse imprimée au centre dans la direction $AB = Vb$, & sa vitesse rotatoire dans le sens LMPN, telle que la vitesse de l'équateur autour du centre soit duë à la hauteur c, ou que cette vitesse même soit $= Vc$.

Maintenant si Vc étoit $= Vb$, ce seroit le cas d'un roulement parfait, & le globe conserveroit sans cesse son premier mouvement. Ce cas étant clair de soi-même, nous aurons encore deux cas à examiner, l'un où $Vc > Vb$, & l'autre où $Vc < Vb$; auquel j'ajouterai le troisième où la vitesse de rotation Vc est négative; ou bien j'examinerai le cas où le globe tourne en arrière.

PRE-

PREMIER CAS

où $\sqrt{c} > \sqrt{b}$

2. Que le centre du globe ait parcouru pendant le tems t l'espace $AP = x$, & qu'il ait encore achevé autour de l'axe de rotation un angle ϕ, ou dans l'équateur un arc $a\phi$; & on aura pour le lieu P la viteſſe du mouvement progreſſif $= \frac{dx}{dt}$ & celle de rotation dans l'équateur $= \frac{ad\phi}{dt}$.

Soit encore $\frac{ad\phi}{dt} > \frac{dx}{dt}$, & le point P raſera le plan horizontal dans la direction PA avec la viteſſe $\frac{ad\phi - dx}{dt}$, & partant le frottement ſollicitera le globe dans la direction PB.

Comme le frottement tient toujours une raiſon conſtante à la preſſion, qui eſt ici la peſanteur du globe M, je le poſerai $= \lambda M$; & le mouvement progreſſif en ſera accéléré de même que ſi cette force λM étoit en effet appliquée au centre du globe.

Ces poſitions étant faites, le mouvement progreſſif du globe ſera renfermé dans l'équation ſuivante

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = \frac{\lambda M}{M} = \lambda$$

d'où l'on tire, à cauſe qu'au commencement où $t = o$ la viteſſe $\frac{dx}{dt}$ fut $= \sqrt{b}$:

$$\frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2}\lambda t + \sqrt{b}$$

& comme en poſant $t = o$, x évanouït, en intégrant pour la ſeconde fois on aura

$$x = \tfrac{1}{4}\lambda tt + t\sqrt{b}$$

De là on voit d'abord, que la viteſſe progreſſive $\frac{dx}{dt}$ va en augmentant continuellement jusqu'à ce qu'elle devienne égale à celle de rotation dans l'équateur; puisque, dès que cela arrive, elle demeure conſtante: car alors, parce que le frottement vient de ceſſer ſubitement, il y aura un ſaut, & le globe continuera à rouler uniformement ſur le plan.

Maintenant, pour trouver le moment auquel ce changement ſoudain arrivera, cherchons le mouvement rotatoire du globe. Or le moment de frottement qui tend à rallentir le mouvement de rotation étant égal à λMa, à cauſe du moment d'inertie $= Mkk$, on aura par les principes de Mécanique:

$$\frac{2\,dd\Phi}{dt^2} = \frac{-\lambda Ma}{Mkk} = \frac{-\lambda a}{kk} \text{ de là}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-\lambda at}{2kk} + \frac{\sqrt{c}}{a}$$

parce qu'au commencement la viteſſe rotatoire a été poſée $= \frac{\sqrt{c}}{a}$.

Enfin, en intégrant pour la ſeconde fois, on trouve l'angle $\Phi = \frac{-\lambda att}{4kk} + \frac{t\sqrt{c}}{a}$: & ce ſont les formules qui renferment le mouvement rotatoire du globe, mais qui, de même que celles trouvées ci-deſſus pour le mouvement progreſſif, ne vaudront plus longtems que jusqu'à que ce ſoit devenu $\frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{dx}{dt}$: après quoi le mouvement du globe ſera ſubitement changé dans un roulement parfait.

Or pour ce moment ſi remarquable nous aurons

$$-\frac{\lambda a^2 t}{2kk} + \sqrt{c} = \tfrac{1}{2}\lambda t + \sqrt{b} \text{ de là le tems}$$

$$t = \frac{2kk(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{\lambda(aa + kk)}.$$

Et

Et si nous substituons cette valeur pour t, nous aurons pour ce moment tant la vitesse du mouvement progressif que celle de rotation dans l'équateur,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt} = \frac{aa\sqrt{b} + kk\sqrt{c}}{aa + kk},$$

Conclusion.

Les formules trouvées n'auront donc lieu que tant que le tems $t < \frac{2kk(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{\lambda(aa + kk}$, & pendant cet intervalle nous aurons

la vitesse progressive $\frac{dx}{dt} = \sqrt{b} + \frac{1}{2}\lambda t$,

la vitesse de rotation dans l'équateur $\frac{ad\Phi}{dt} = \sqrt{c} - \frac{\lambda aat}{2kk}$,

l'espace parcouru par le

mouvement progressif $AP = x = \frac{1}{4}\lambda tt + t\sqrt{b}$, &

l'angle achevé par le

mouvement rotatoire $\Phi = \frac{t\sqrt{c}}{a} - \frac{\lambda att}{4kk}$

Or, aussi-tôt que le tems

$$t = \frac{2kk(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{\lambda(aa - kk)}$$

sera écoulé, pendant lequel le globe aura parcouru par son mouvement progressif

l'espace $AB = \frac{kk(\sqrt{c} - \sqrt{b})((2aa + kk)\sqrt{b} + kk\sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)^2}$

&

& par ſon mouvement rotatoire

$$\text{l'angle} = \frac{kk(\sqrt{c} - \sqrt{b})(aa\sqrt{b} + (aa + 2kk)\sqrt{c})}{\lambda a(aa + kk)^2}$$

il conſervera l'un & l'autre mouvement, qu'il aura alors, inaltéré, & les formules trouvées ne ſeront plus applicables, l'une & l'autre viteſſe demeurant toujours

$$= \frac{aa\sqrt{b} + kk\sqrt{c}}{aa + kk}$$

COROLLAIRE I.

3. Lorsque le globe eſt compoſé de matiere homogene, ou lorsque $kk = \frac{2}{5}aa$, on aura pour un tems t quelconque, pourvu qu'il ſoit plus petit que $\frac{4(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{7\lambda}$, les déterminations ſuivantes.

la viteſſe du centre $= \sqrt{b} + \frac{2}{5}\lambda t$

la viteſſe dans l'équateur $= \sqrt{c} - \frac{5}{4}\lambda t$

l'eſpace parcouru par le centre $= t\sqrt{b} + \frac{1}{4}\lambda tt$

l'angle achevé autour du centre $= \frac{t\sqrt{c}}{a} - \frac{5}{8}\frac{\lambda tt}{a}$

Or, après un tems écoulé $t = \frac{4(\sqrt{c} - \sqrt{b})}{7\lambda}$

pendant lequel le globe aura parcouru par ſon mouvement progreſſif l'eſpace

$$\frac{4(\sqrt{c} - \sqrt{b})(\sqrt{c} + 6\sqrt{b})}{49\lambda}$$

&

& par son mouvement de rotation l'angle

$$\frac{2(\sqrt{c} - \sqrt{b})(9\sqrt{c} - 5\sqrt{b})}{49\lambda a}$$

le globe roulera uniformement avec une vitesse

$$= \frac{5\sqrt{b} + 2\sqrt{c}}{7}.$$

COROLLAIRE II.

4. Soit pour le tems t la vitesse du centre $= \sqrt{v}$, & la vitesse dans l'équateur $= \sqrt{u}$; parce que nous avons trouvé $\sqrt{v} = \sqrt{b} + \frac{1}{2}\lambda t$ & $\sqrt{u} = \sqrt{c} - \frac{\lambda a a t}{2kk}$, on aura $aa\sqrt{v} + kk\sqrt{u} = aa\sqrt{b} + kk\sqrt{c}$: & de là ce beau Théoreme:

Lorsqu'un globe se meut sur un plan horizontal, & que l'axe de rotation est horizontal & perpendiculaire sur la direction du centre, la quantité $aa\sqrt{v}, + kk\sqrt{u}$, *ou bien celle ci* $Maa\sqrt{v} + Mkk\sqrt{u}$, *restera toujours la même, de quelque quantité que soit le frottement.*

SECOND CAS,

où $\sqrt{c} < \sqrt{b}$.

5. Soit, après le tems t, l'espace parcouru par le globe $AP = x$; qu'il ait en même tems fait autour de l'axe de rotation un angle $= \Phi$, ou dans l'équateur un arc $= a\Phi$; & on aura la vitesse progressive $= \frac{dx}{dt}$, & la vitesse rotatoire dans l'équateur $= \frac{ad\Phi}{dt}$. Soit encore, comme au commencement, celle-ci plus petite que celle-là; ou soit $ad\Phi < dx$, & le point d'attouchement rasera le plan dans le di-

direction PB avec la vitesse $= \frac{dx - ad\Phi}{dt}$, & partant le frottement agira selon la direction PA avec une force $= \lambda M$, par lequel le mouvement progressif sera rallenti, & le mouvement de rotation accéléré. Les formules différentio-différentielles deviendront donc contraires aux précedentes, savoir

$$\frac{2ddx}{dt^2} = -\lambda \quad \& \quad \frac{2dd\Phi}{dt^2} = \frac{\lambda a}{kk}$$

dont les intégrales prises duement seront

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{b} - \tfrac{1}{2}\lambda t \quad \& \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{c}}{a} + \frac{\lambda at}{2kk}$$

& partant

$$x = t\sqrt{b} - \tfrac{1}{4}\lambda tt: \qquad \Phi = \frac{t\sqrt{c}}{a} + \frac{\lambda att}{4kk}.$$

Or le mouvement selon ces formules ne durera plus longtems que jusqu'au moment, auquel la vitesse progressive $\frac{dx}{dt}$ sera devenue égale à la vitesse rotatoire dans l'équateur $\frac{ad\Phi}{dt}$; ce qui arrivera quand $\sqrt{b} - \tfrac{1}{2}\lambda t = \sqrt{c} + \frac{\lambda aat}{2kk}$, & par conséquent, après un tems écoulé

$$t = \frac{2kk(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)}$$

pendant lequel le globe aura parcouru par son mouvement progressif un espace

$$\frac{kk(\sqrt{b} - \sqrt{c})((2aa + kk)\sqrt{b} + kk\sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)^2}$$

&

& par son mouvement de rotation un angle

$$\frac{kk\,(\sqrt{b}-\sqrt{c})\,(aa\sqrt{b}+(aa+2kk)\sqrt{c})}{\lambda a\,(aa+kk)^2};$$

après quoi tant la vitesse progressive que celle de rotation dans l'équateur sera $\frac{aa\sqrt{b}+kk\sqrt{c}}{aa+kk}$; & depuis l'une & l'autre se conservera sans aucune altération, quoique le calcul ne soit pas d'accord.

COROLLAIRE I.

6. Lorsque le globe est composé de matiere homogene, parce qu'alors kk est $=\frac{2}{5}aa$, le mouvement sera renfermé dans les formules suivantes:

l'espace parcouru par le centre $= t\sqrt{b} - \frac{1}{4}\lambda tt$,

l'angle décrit autour du centre $= \frac{t\sqrt{c}}{a} + \frac{5\lambda tt}{8a}$,

la vitesse progressive $= \sqrt{b} - \frac{1}{2}\lambda t$, &

la vitesse rotatoire dans l'équateur $= \sqrt{c} + \frac{5}{4}\lambda t$

Or ces formules ne vaudront que pour un tems plus petit que

$$\frac{4(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{7\lambda}$$

& après un tems écoulé $= \frac{4(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{7\lambda}$, ou après que le globe aura achevé

par son mouvement progressif l'espace $= \frac{4(\sqrt{b}-\sqrt{c})(6\sqrt{b}+\sqrt{c})}{49\lambda}$ &

par son mouvement rotatoire l'angle $= \frac{2(\sqrt{b}-\sqrt{c})(5\sqrt{b}+9\sqrt{c})}{49\lambda a}$

le

le globe commencera à rouler uniformement avec une vitesse constante & égale à $\frac{5\sqrt{b} + 2\sqrt{c}}{7}$.

COROLLAIRE II.

7. En posant pour un tems indéterminé t la vitesse progressive $= \sqrt{v}$, & celle de rotation dans l'équateur $= \sqrt{u}$, on obtiendra de même que ci-dessus:

$$aa\sqrt{v} + kk\sqrt{u} = aa\sqrt{b} + kk\sqrt{c}$$

la quantité $Maa\sqrt{v} + Mkk\sqrt{u}$ restera donc toujours la même, & ne souffrira aucun changement par le frottement. Voila un principe de conservation, qui mérite une attention toute particuliere.

TROISIEME CAS.

Où l'on suppose qu'on ait imprimé au globe un mouvement de rotation dans le sens LNPM.

8. Ayant imprimé au globe une vitesse progressive selon la direction $AB = \sqrt{b}$, qu'il ait en même tems reçu un mouvement de rotation dans le sens LNPM, dont la vitesse dans l'équateur ait été $= \sqrt{c}$. Or, après un tems t, posons que le globe ait achevé par son mouvement progressif l'espace $AP = x$, & par son mouvement de rotation l'angle Φ, auquel répondra dans l'équateur un arc $= a\Phi$.

La vitesse progressive sera donc exprimée par $\frac{dx}{dt}$, & la vitesse rotatoire dans l'équateur par $\frac{ad\Phi}{dt}$.

Dans ce cas il est clair que le point d'attouchement rasera le plan avec la somme des vitesses selon la direction PB; & partant le frottement agira selon PA avec la force λM, par lequel tant le mouvement

pro-

progressif que celui de rotation sera rallenti, de sorte qu'on aura les formules suivantes:

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\lambda \quad \& \quad \frac{2\,dd\Phi}{dt^2} = \frac{-\lambda a}{kk}$$

dont les intégrales, prises comme il faut, donnent

$$\frac{dx}{dt} = \surd b - \tfrac{1}{2}\lambda t; \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\surd c}{a} - \frac{\lambda at}{2kk}, \text{ \& partant:}$$

$$x = t\surd b - \tfrac{1}{4}\lambda tt \quad \& \quad \Phi = \frac{t\surd c}{a} - \frac{\lambda att}{4kk}.$$

De là il est clair que l'une & l'autre vitesse va en diminuant; & il sera très important de voir laquelle évanouït la premiere? Or toutes les deux évanouïroient au même instant s'il étoit $\frac{kk\surd c}{aa} = \surd b$; donc, selon que $\frac{kk\surd c}{aa}$ est plus grand, ou égal, ou enfin plus petit que $\surd b$, nous aurons trois cas à examiner qui méneront à des conclusions tout-à-fait différentes.

I. Soit $kk\surd c = aa\surd b$, & les deux vitesses évanouïront ensemble; & puisque leurs directions au point d'attouchement s'accordent, le cas du roulement parfait ne sauroit arriver avant que les deux vitesses évanouissent, & dans ce cas, le globe étant réduit à un repos parfait, il est naturel qu'il y demeure perpétuellement; ce qui arrivera après un tems $t = \frac{2\surd b}{\lambda}$ ou après que le globe aura parcouru l'espace $= \frac{b}{\lambda}$.

II. Supposons maintenant $\surd b < \frac{kk}{aa}\surd c$, ou que le mouvement progressif s'éteigne le premier, ce qui arrivera après un tems écoulé

$t = \frac{2\sqrt{b}}{\lambda}$, ou après que le globe aura parcouru l'eſpace $\frac{b}{\lambda}$. Mais, le globe ayant encore alors une viteſſe rotatoire dans le ſens LNPM, qui dans l'équateur eſt $= \frac{\sqrt{c}}{a} - \frac{a\sqrt{b}}{kk} = \frac{kk\sqrt{c} - aa\sqrt{b}}{akk}$, il en réſultera de nouveau un mouvement progreſſif ſelon la direction PA contraire à la premiere.

Auſſi les formules que nous venons de trouver, en y poſant $t > \frac{2\sqrt{b}}{\lambda}$, le font appercevoir très clairement, en donnant une viteſſe négative pour le mouvement progreſſif, & à preſent ce mouvement ſuivra nos formules jusqu'à ce que cette viteſſe négative $\frac{1}{2}\lambda t - \sqrt{b}$ devienne égale à celle de rotation dans l'équateur qui eſt $= \sqrt{c} - \frac{\lambda aat}{2kk}$. Pour trouver ce moment, nous n'avons qu'à poſer $\frac{1}{2}\lambda t - \sqrt{b} = \sqrt{c} - \frac{\lambda aat}{2kk}$, d'où l'on tire

$$t = \frac{2kk(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)}$$

après lequel tems le globe continuera à rouler uniformement en arrière avec une viteſſe $= \frac{kk\sqrt{c} - aa\sqrt{b}}{aa + kk}$: cette uniformité du mouvement commencera donc dans le point D, l'eſpace AD étant $= \frac{kk(\sqrt{b} + \sqrt{c})((2aa + kk)\sqrt{b} - kk\sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)^2}$; & alors, après cet eſpace parcouru, les formules trouvées perdent toute leur force.

III.

III. Soit enfin $\sqrt{c} < \frac{aa}{kk}\sqrt{b}$, & ce sera le cas où le mouvement rotatoire évanouït avant le mouvement progressif; or, comme le premier arrive, après un tems $t = \frac{2kk\sqrt{c}}{\lambda aa}$, ou après un espace parcouru $x = \frac{kk\sqrt{c}(2aa\sqrt{b} - kk\sqrt{c})}{\lambda a^4}$, le globe ayant encore un mouvement progressif selon la direction PB, commencera de nouveau à se tourner dans le sens contraire LMPN, dont la vitesse croitra selon nos formules jusqu'à ce qu'elle égalera la progressive, ou jusqu'au tems écoulé

$$t = \frac{2kk(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)}$$

après lequel le globe continuera à rouler uniformement avec une vitesse $= \frac{aa\sqrt{b} - kk\sqrt{c}}{aa + kk}$. Cette uniformité du mouvement commencera donc au point B, de sorte que soit

$$AB = \frac{kk(\sqrt{b} + \sqrt{c})((2aa + kk)\sqrt{b} - kk\sqrt{c})}{\lambda(aa + kk)^2}$$

& après que le globe aura atteint ce terme, les formules trouvées ci-dessus ne serviront plus de rien.

Remarque.

9. J'aurois bien pu déduire le troisieme cas du second, en posant la vitesse de rotation $\sqrt{c}$ négative; mais il m'a paru que les variétés remarquables qui naissent du troisieme cas méritoient une solution particuliere pour le pouvoir mieux developer. Au reste, j'ai cru très convenable de commencer par le précédent probleme, à cause que

 les

les ſuivans doivent être jugés d'autant plus difficiles, que l'axe de rotation y eſt ſans ceſſe aſſujetti à des variétés jusqu'à ce que le globe ſoit enfin parvenu à un état de permanence. Or le moyen d'introduire le plus commodément dans le calcul la variation de l'axe ſera expliqué dans la propoſition ſuivante, qui ſervira encore à frayer une route des plus aiſées pour réſoudre tous les problemes qu'on pourroit former ſur la matiere préſente.

PROBLEME II.

10. *Lorsque le globe, pendant qu'il tourne autour de l'axe* RS *avec une viteſſe donnée, eſt aſſujetti à une force qui lui imprimeroit un mouvement de rotation autour d'un autre axe* TV *s'il étoit en repos, déterminer l'effet que cette force produira à préſent.*

SOLUTION

Fig. 2. Ayant poſé comme ci-deſſus la maſſe du globe $= M$, ſon moment d'inertie $= Mkk$, & ſon rayon $OR = a$, ſoit le mouvement de rotation tel que l'angle décrit autour de l'axe RS dans un tems infiniment petit dt, ſoit $d\phi$, & que le point T en ſoit élevé ſelon la figure.

Soit maintenant λMa le moment des forces qui tendent à imprimer au globe un mouvement de rotation autour d'un autre axe TV, & que le point R en ſoit déprimé; donc, ſi le premier mouvement n'exiſtoit pas, le globe obtiendroit en effet un mouvement autour de l'axe TV tel que l'angle achevé dans le tems infiniment petit dt ſeroit $= \frac{\lambda Ma}{4Mkk} dt^2 = \frac{\lambda a dt^2}{4kk}$. Or, le globe ayant déja un mouvement de rotation déterminé, voyons quel effet naitra de la combinaiſon des deux mouvemens. Nommons l'angle $ROT = \zeta$, & cherchons d'abord dans l'arc RT le point v, qui par le premier mouvement ſera autant élevé quil eſt abaiſſé par le ſecond, & qui partant

tant demeurera en repos. Soit pour cet effet l'angle $ROr = d\omega$, de sorte que soit $r o T = \zeta - d\omega$; & comme la distance du point r à l'axe RS est $= a \sin d\omega = a d\omega$, & à l'axe TV est $= a \sin(\zeta - d\omega) = a \sin\zeta - a d\omega \cos\zeta$; ce point r sera élevé moyennant le premier mouvement autour de l'axe RS dans un tems infiniment petit dt par l'espace $= a d\omega d\phi$, & moyennant le second mouvement autour de l'axe TV, il sera abaissé par un espace $= (a \sin\zeta - a d\omega \cos\zeta) \frac{\lambda a dt^2}{4kk}$. De là on tire l'équation suivante:

$$4kk d\omega d\phi = \lambda a dt^2 (\sin\zeta - d\omega \cos\zeta)$$

& partant l'angle $ROr = d\omega = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{4kk d\phi + \lambda a dt^2 \cos\zeta}$, ou parceque dt^2 évanouït à l'égard de $d\phi$, on aura $d\omega = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{4kk d\phi}$: ce qui nous assigne le lieu du point r qui pendant le tems dt aura demeuré en repos.

Cherchons à présent le changement qui sera produit dans la vitesse rotatoire, laquelle étant au commencement $= \frac{d\phi}{dt}$ soit à présent posée $= \frac{d\phi + d\psi}{dt}$, ou que son accroissement soit $= \frac{d\psi}{dt}$. Or le point R en sera déprimé par un espace infiniment petit $= a d\omega (d\phi + d\psi)$; & puisque ce même point R par le premier mouvement demeure en repos, & par le second est abaissé par l'espace infiniment petit $= \frac{\lambda a dt^2}{4kk} a \sin\zeta$, on aura l'équation suivante:

$$d\omega (d\phi + d\psi) = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{4kk}$$

de laquelle on trouvera la valeur de $d\psi$. Mais il faut remarquer

quer qu'on doit ici, en substituant pour $d\omega$ sa valeur, se servir de la premiere expression où le terme qui renferme dt^2 n'a pas été négligé à l'égard de $4kkd\Phi$ puisque les différentiels du premier ordre se détruisent: ainsi on aura

$$\frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta\,(d\Phi + d\psi)}{4kkd\Phi + \lambda a dt^2 \cos\zeta} = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{4kk} \text{ ou bien}$$

$$4kk\,(d\Phi + d\psi) = 4kkd\Phi + \lambda a dt^2 \cos\zeta, \text{ \& enfin}$$

l'accroissement de la vitesse de rotation

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\lambda a dt \cos\zeta}{4kk}$$

Mais ici nous avons supposé que la force sollicitante est quasi née subitement, & il est clair que, si la même force avoit déjà agi pendant l'élément du tems précédent dt, ces changemens trouvés demanderoient une correction.

Donc, puisque c'est le cas qui a lieu dans nos recherches, il faut, pour trouver cette correction, considérer que dans l'élément du tems précédent dt, l'angle parcouru auroit été $= d\Phi - \frac{\lambda a dt^2 \cos\zeta}{4kk}$ de sorte que l'incrément de cet angle soit maintenant doublé, savoir $= \frac{\lambda a dt^2 \cos\zeta}{2kk}$, ce qui est la véritable valeur du différentio-différentiel $dd\Phi$, d'où nous tirons $dd\Phi = \frac{\lambda a dt^2 \cos\zeta}{2kk}$. Pour le changement de l'axe, il a besoin d'une semblable correction par laquelle il doit être censé deux fois plus grand, de sorte que l'angle

$$ROr' = 2ROr = d\omega = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{2kkd\Phi}.$$

En

En effet, puisque le pole de rotation varie continuellement, le point r n'est pas le pole de rotation pour la fin du tems dt, mais tient plutôt un milieu entre le lieu du pole au commencement & la fin du tems dt, d'où l'on comprend que le véritable changement du pole r'OR est le double de l'angle rOR.

COROLLAIRE I.

11. Le moment des forces λMa donc, qui tâche à imprimer au globe un mouvement de rotation autour de l'axe TV, approchera le précédent axe de rotation RS, autour duquel le globe se mouvoit avec une vitesse angulaire $= \frac{d\Phi}{dt}$ plus vers TV, de maniere que le pole R fera autour du centre O dans un tems infiniment petit dt un angle RO$r' = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{2kk\, d\Phi}$ en nommant l'angle ROT $= \zeta$.

COROLLAIRE II.

12. Ce même moment des forces changera outre cela la vitesse angulaire $\frac{d\Phi}{dt}$ en la faisant croitre de la particule $\frac{dd\Phi}{dt} = \frac{\lambda a dt \cos\zeta}{2kk}$: & si ces forces venoient à cesser subitement après le tems dt, le globe continueroit à se mouvoir autour de l'axe $r' s'$.

Remarque.

13. J'ai supposé dans la solution, que le mouvement de rotation produit par les nouvelles forces est contraire à celui que le globe avoit déjà autour de l'axe RS. Or, si le nouveau mouvement de rotation se faisoit dans le même sens que le premier, on n'aura qu'à envisager le moment des forces λMa comme négatif; alors le nouvel axe $r' s'$ s'éloigneroit de la ligne TV du même angle $\frac{\lambda a dt \sin\zeta}{2kk}$,

&

& la vitesse de rotation décroitroit de la même quantité $\frac{\lambda a dt \cos\zeta}{2kk}$.

PROBLEME III.

14. *Ayant imprimé au globe un mouvement progressif selon la direction* AB, *& un mouvement rotatoire autour d'un axe horizontal* EF, *mais qui fasse un angle oblique avec la direction* AB, *déterminer la continuation du mouvement.*

SOLUTION.

Fig. 3. Soit la vitesse du centre selon AB $= \sqrt{b}$, l'angle BAF $= \alpha$, & supposons que le mouvement de rotation autour de cet axe EF soit dirigé en avant, dont la vitesse dans l'équateur soit $= \sqrt{c}$, le rayon du globe étant comme ci-dessus $= a$, sa masse $=$ M, & son moment d'inertie $=$ Mkk.

Maintenant, puisque dès le commencement le frottement n'agit point selon la direction du mouvement progressif AB, le centre du globe se mouvra dans une ligne courbe qui soit représentée par AYZ.

Que le centre du globe soit parvenu après le tems t en Y, & après avoir tiré YX perpendiculaire à AB, soient les coordinées AX $= x$; XY $= y$.

Or il suit de ce que nous venons d'expliquer, & que nous expliquerons bientôt plus clairement; il en suit, dis-je, que l'axe de rotation sera encore horizontal: qu'il soit donc représenté par la ligne MYN, & posons son inclinaison à la droite AB, ou l'angle ANY $= \theta$.

De plus, le mouvement de rotation autour de MN, supposons que dans le tems dt, il décrive l'angle $= d\varphi$, & qu'il soit encore dirigé

rigé en avant, de ſorte que dans la ſection horizontale les points ſitués en arriere, comme Q & V, en ſoient élevés.

Qu'on ſe repréſente maintenant le point Y comme le point le plus bas du globe qui touche le plan horizontal, & ce point aura un double mouvement, l'un égal au mouvement progreſſif dont la viteſſe ſelon la tangente YT eſt $= \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dt}$, & l'autre, qui réſulte du mouvement de rotation, le fera reculer ſelon la direction VQ perpendiculaire à MN avec une viteſſe $= \frac{a\,d\Phi}{dt}$: mais, à cauſe de l'angle QYX = ANY = θ, on aura QY $= \frac{y}{\cos\theta}$ & QX $= y \tang\theta$: qu'on prenne encore YT : QY $= \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dt} : \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ou bien YT $= \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{a\,d\Phi\cos\theta}$.
& ayant achevé le parallélogramme QYTS, la diagonale YS repréſentera la vraye direction du mouvement du point Y, à laquelle eſt contraire la direction du frottement YV, qui conſtamment eſt $= \lambda M$.

Or, pour trouver cette direction, il faut remarquer que $\sin XYT = \frac{dx}{ds}$: $\cos XYT = \frac{-dy}{ds}$: en poſant pour abréger $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

De là, à cauſe de l'angle QYX $= \theta$, nous aurons

$$\sin QYT = \frac{dx\cos\theta - dy\sin\theta}{ds} \quad \&$$

$$\cos QYT = \frac{-dx\sin\theta - dy\cos\theta}{ds}$$

Enſuite, à cauſe de $QY = \frac{y}{\operatorname{cof}\theta}$ & $YT = \frac{yds}{ad\phi \operatorname{cof}\theta}$, on trouvera

$$\operatorname{fin} QYS = \frac{dx \operatorname{cof}\theta - dy \operatorname{fin}\theta}{\sqrt{(aad\phi^2 + ds^2 - 2ad\phi(dx \operatorname{fin}\theta + dy \operatorname{cof}\theta))}},$$

$$\operatorname{cof} QYS = \frac{ad\phi - dx \operatorname{fin}\theta - dy \operatorname{cof}\theta}{\sqrt{(aad\phi^2 + ds^2 - 2ad\phi(dx \operatorname{fin}\theta + dy \operatorname{cof}\theta))}},$$

& enfin:

$$\operatorname{fin} XYS = \frac{dx - ad\phi \operatorname{fin}\theta}{\sqrt{(aad\phi^2 + ds^2 - 2ad\phi(dx \operatorname{fin}\theta + dy \operatorname{cof}\theta))}} = \operatorname{cof} XYK,$$

$$\operatorname{cof} XYS = \frac{ad\phi \operatorname{cof}\theta - dy}{\sqrt{(aad\phi^2 + ds^2 - 2ad\phi(dx \operatorname{fin}\theta + dy \operatorname{cof}\theta))}} = -\operatorname{fin} XYK,$$

ayant tiré LK perpendiculaire à YS.

Or, YV repréſentant la direction du frottement, le globe en ſera incliné autour de l'axe LK par le moment $\lambda M a$, de maniere que les points du plan LSK en ſeront déprimés; ce qui fait juſtement le cas conſidéré au Probleme précedent.

Qu'on en faſſe donc l'application, & ce ſera ici l'angle KYN, que nous avons là appellé ζ; or, à cauſe que les angles KYS & QYN ſont droits, ζ ſera $= 180 - QYS$, & partant

$$\operatorname{fin}\zeta = \frac{dx \operatorname{cof}\theta - dy \operatorname{fin}\theta}{\sqrt{(aad\phi^2 + ds^2 - 2ad\phi(dx \operatorname{fin}\theta + dy \operatorname{cof}\theta))}},$$

$$\operatorname{cof}\zeta = \frac{dx \operatorname{fin}\theta + dy \operatorname{cof}\theta - ad\phi}{\sqrt{(aad\phi^2 + ds^2 - 2ad\phi(dx \operatorname{fin}\theta + dy \operatorname{cof}\theta))}},$$

Donc, dans un tems infiniment petit dt, l'axe de rotation ſera transporté vers YK dans $Y\nu$, de ſorte que l'angle

NYν

$NY\nu = \frac{\lambda a dt^2 \sin\zeta}{2kkd\Phi}$, & comme l'angle qui fut par ci devant $ANY = \theta$, préſentement eſt $A\nu Y = \theta + d\theta$, on aura

$$d\theta = \frac{\lambda a dt^2 (dx \cos\theta - dy \sin\theta)}{2kkd\Phi V(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx \sin\theta + dy \cos\theta))}.$$

Maintenant, puisque la viteſſe de rotation a été $= \frac{d\Phi}{dt}$ elle aura, après le tems infiniment petit dt, pris un accroiſſement tel que ſera

$$dd\Phi = \frac{\lambda a dt^2 \cos\zeta}{2kk}, \text{ ou}$$

$$dd\Phi = \frac{\lambda a dt^2 (dx \sin\theta + dy \cos\theta - ad\Phi)}{2kkV(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx \sin\theta + dy \cos\theta))}.$$

Et ainſi, tout ce qui appartient à la variation du mouvement rotatoire vient d'être ſuffiſamment déterminé. Paſſons donc à la recherche de la variation du mouvement progreſſif.

D'abord, la force du frottement $YV = \lambda M$ donne par la décompoſition

I. une force ſelon la direction $YX = \lambda M \cos VYX = - \lambda M \cos XYS$

$$\text{qui ſera} = \frac{\lambda M(dy - ad\Phi \cos\theta)}{V(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx \sin\theta + dy \cos\theta))} = - \frac{2Mddy}{dt^2},$$

II. une force ſelon la direction $XA = \lambda M \sin VYX = \lambda M \sin XYS$

$$\text{qui donc ſera} = \frac{\lambda M(dx - ad\Phi \sin\theta)}{V(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx \sin\theta + dy \cos\theta))} = - \frac{2Mddx}{dt^2},$$

Poſons pour abréger $V(aad\Phi^2 + ds^2 - 2ad\Phi(dx \sin\theta + dy \cos\theta)) = adt$, & nous aurons enfin pour la détérmination du mouvement du globe les quatre équations ſuivantes:

 I.

I. $\frac{2ddy}{dt^2} + \frac{\lambda(dy - ad\Phi\cos\theta)}{zdt} = 0$; ou $ddy = \frac{\lambda dt(ad\Phi\cos\theta - dy)}{2z}$,

II. $\frac{2ddx}{dt^2} + \frac{\lambda(dx - ad\Phi\sin\theta)}{zdt} = 0$: ou bien $ddx = \frac{\lambda dt(ad\Phi\sin\theta - dx)}{2z}$,

III. $d\theta = \frac{\lambda adt\ (dx\cos\theta - dy\sin\theta)}{2kkzd\Phi}$,

IV. $dd\Phi = \frac{\lambda adt\ (dx\sin\theta + dy\cos\theta - ad\Phi)}{2kkz}$.

d'où il nous faudra définir les quantités x, y θ & Φ par le tems t.

En introduisant l'angle NYT, que l'axe MN fait avec la direction du mouvement YT, les quatre équations trouvées peuvent être rendues plus simples. Soit donc cet angle NYT $= \omega$ pour avoir $\sin\omega = \frac{dx\sin\theta + dy\cos\theta}{ds}$ & $\cos\omega = \frac{dx\cos\theta - dy\sin\theta}{ds}$, dont la différentiation donne

$$ddx\sin\theta + ddy\cos\theta + dsd\theta\cos\omega = dds\sin\omega + dsd\omega\cos\omega$$

$$ddx\cos\theta - ddy\sin\theta - dsd\theta\sin\omega = dds\cos\omega - dsd\omega\sin\omega.$$

Mais on tire des deux premieres équations I. & II.

$$ddx\sin\theta + ddy\cos\theta = \frac{\lambda dt\ (ad\Phi - ds\sin\omega)}{2z},$$

$$ddx\cos\theta - ddy\sin\theta = \frac{-\lambda dtds\cos\omega}{2z}.$$

Donc, puisque $zdt = \sqrt{(aad\Phi^2 + ds^2 - 2adsd\Phi\sin\omega)}$, nous pouvons entierement éliminer les coordinées x & y, de sorte que nous ayons les quatre équations suivantes:

I.

I. $dds\,\text{fin}\,\omega + ds(d\omega - d\theta)\,\text{cof}\,\omega = \frac{\lambda dt(ad\Phi - ds\,\text{fin}\,\omega)}{2z}$,

II. $dds\,\text{cof}\,\omega - ds\,(d\omega - d\theta)\,\text{fin}\,\omega = \frac{-\lambda dt ds\,\text{cof}\,\omega}{2z}$,

III. $d\theta = \frac{\lambda a dt ds\,\text{cof}\,\omega}{2kkz d\Phi}$,

IV. $dd\Phi = \frac{\lambda a dt\,(ds\,\text{fin}\,\omega - ad\Phi)}{2kkz}$:

& maintenant les quatre inconnues font s, θ, Φ & ω, lesquelles étant déterminées, on aura

$$dx = ds\,\text{cof}(\omega - \theta) \quad \& \; dy = ds\,\text{fin}\,(\omega - \theta).$$

En combinant les deux premieres équations, elle feront transformées en celles-ci.

I. $dds = \frac{\lambda dt\,(ad\Phi\,\text{fin}\,\omega - ds)}{2z}$,

II. $ds\,(d\omega - d\theta) = \frac{\lambda a dt d\Phi\,\text{cof}\,\omega}{2z}$,

Mais, fi nous fubftituons ici au lieu de $d\theta$ fa valeur de la troifieme équation, la folution de notre probleme pourra être comprife dans les trois équations fuivantes.

I. $dds = \frac{\lambda dt\,(ad\Phi\,\text{fin}\,\omega - ds)}{2z}$,

II. $dsd\omega = \frac{\lambda a dt\,ds^2\,\text{cof}\,\omega}{2kkz d\Phi} + \frac{\lambda a dt\,d\Phi\,\text{cof}\,\omega}{2z}$,

III. $dd\Phi = \frac{\lambda a dt\,(ds\,\text{fin}\,\omega - ad\Phi)}{2kkz}$,

desquelles, quand nous en aurons trouvé les trois quantités s, Φ, & ω, nous aurons d'abord

$$d\theta = \frac{\lambda a dt ds \operatorname{cof} \omega}{2kkz d\Phi}, \text{ \& enſuite}$$

$$x = \int ds \operatorname{cof}(\omega - \theta), \quad y = \int ds \operatorname{fin}(\omega - \theta),$$

où il faut remarquer que l'élément dt eſt pris conſtant.

Voyons comment ces trois équations pourront être réſolues, ce qui ſe fera par les opérations ſuivantes.

I. Operation.

15. Délivrons d'abord nos équations des différentielles du ſecond ordre, en poſant $ds = pdt$ & $d\Phi = qdt$: d'où nous aurons $z = \sqrt{(aaqq + pp - 2apq \operatorname{fin} \omega)}$, & nos équations feront:

$$\text{I. } dp = \frac{\lambda dt (aq \operatorname{fin} \omega - p)}{2z},$$

$$\text{II. } pd\omega = \frac{\lambda a dt \operatorname{cof} \omega (pp + kkqq)}{2kkqz},$$

$$\text{III. } dq = \frac{\lambda a dt (p \operatorname{fin} \omega - aq)}{2kkz}.$$

De là en éliminant dt, puisque par cette opération le nombre λ avec la quantité z s'en vont en même tems, nous aurons encore ces deux équations

$$\frac{dq}{dp} = \frac{a (p \operatorname{fin} \omega - aq)}{kk (aq \operatorname{fin} \omega - p)} \text{ \& } \frac{dq}{d\omega} = \frac{pq (p \operatorname{fin} \omega - aq)}{\operatorname{cof} \omega (pp + kkqq)}.$$

II. Operation.

16. Comme la premiere de ces deux équations donne

$$kk = \frac{adp (p \operatorname{fin} \omega - aq)}{dq (aq \operatorname{fin} \omega - p)},$$

cette

cette valeur étant substituée dans la seconde produira celle-ci:

$$ppdq(aq\sin\omega - p) + aqqdp(p\sin\omega - aq) = \frac{pqd\omega}{\cos\omega}(p\sin\omega - aq)(aq\sin\omega - p),$$

qui divisée par $p^3 q^3 \cos\omega^2$ prendra la forme suivante

$$0 = \frac{qd\omega\sin\omega - dq\cos\omega}{q^3\cos\omega^3} + \frac{a(pdq + qdp)\sin\omega}{ppqq\cos\omega^2} - \frac{ad\omega(1 + \sin\omega^2)}{pq\cos\omega^3}$$
$$+ \frac{aa(pd\omega\sin\omega - dp\cos\omega)}{p^3\cos\omega^3},$$

laquelle étant évidemment intégrable donne

$$\tfrac{1}{2}CC = \frac{1}{2qq\cos\omega^2} - \frac{a\sin\omega}{pq\cos\omega^2} + \frac{aa}{2pp\cos\omega^2} \quad \text{ou}$$

$$CCppqq\cos\omega^2 = pp - 2apq\sin\omega + aaqq = zz$$

de sorte que nous ayons déjà

$$z = Cpq\cos\omega.$$

III. Operation.

17. De cette équation, à cause de $\cos\omega^2 = 1 - \sin\omega^2$, on aura la valeur de

$$\sin\omega = \frac{a + \sqrt{(1 - CCqq)(aa - CCpp)}}{CCpq}.$$

Mais on tire de la premiere équation

$$\sin\omega = \frac{aaqdp - kkpdq}{a(pdp + kkqdq)},$$

& partant, ces deux valeurs étant égalées ensemble, nous obtiendrons une équation qui ne renferme que les deux variables p & q: savoir

$$0 = aapdp(1 - CCqq) - kkqdq(aa - CCpp) + a(pdp - kkqdq)$$
$$+ a(pdp - kkqdq)\sqrt{(1 - CCqq)(aa - CCpp)},$$

qui

qui étant divisible par $\sqrt{(aa - CCpp)} + a\sqrt{(1 - CCqq)}$, menera à l'une ou l'autre de ces deux équations,

$$\sqrt{(aa - CCpp)} + a\sqrt{(1 - CCqq)} = 0,$$

$$apdp\sqrt{(1 - CCqq)} - kkqdq\sqrt{(aa - CCpp)} = 0,$$

qui nous fournissent les deux solutions suivantes.

I. SOLUTION.

18. En prenant $\sqrt{(aa - CCpp)} = - a\sqrt{(1 - CCqq)}$, on aura $pp = aaqq$ de là $p = \pm aq$, & partant $\sin\omega = \pm 1$; $\cos\omega = 0$, dont l'angle NYT étant trouvé droit, l'axe de rotation sera normal à la direction du centre; ce qui étant arrivé une fois, le globe poursuivra son mouvement toujours dans la même ligne droite. C'est le cas du probleme premier, & partant le présent probleme exige l'autre solution.

II. SOLUTION.

19. Ayant donc cette équation à résoudre:

$$\frac{apdp}{\sqrt{(aa - CCpp)}} = \frac{kkqdq}{\sqrt{(1 - CCqq)}},$$

dont l'intégrale fournit $a\sqrt{(aa - CCpp)} = Dkk + kk\sqrt{(1 - CCqq)}$; posons l'une & l'autre partie $= ar$, de sorte que nous obtenions $p = \frac{\sqrt{(aa - rr)}}{C}$; $q = \frac{\sqrt{(k^4 - (ar - Dkk)^2)}}{Ckk}$,

& de là $\sin\omega = \frac{kka + r(ar - Dkk)}{\sqrt{(aa - rr)(k^4 - (ar - Dkk)^2)}}$,

$\cos\omega = \frac{(a(ar - Dkk) + kkr)\sqrt{-1}}{\sqrt{(aa - rr)(k^4 - (ar - Dkk)^2)}}$.

Donc

Donc, pour que cette expression ne soit pas imaginaire, écrivons $r\sqrt{-1}$ & $D\sqrt{-1}$, au lieu de r & D, & nous aurons:

$$p = \frac{1}{2C}\sqrt{(aa + rr)}: q = \frac{1}{Ckk}\sqrt{(k^4 + (ar - Dkk)^2)};$$

$$\sin\omega = \frac{akk - r(ar - Dkk)}{\sqrt{(aa + rr)(k^4 + (ar - Dkk)^2)}},$$

$$\cos\omega = \frac{a(ar - Dkk) + kkr}{\sqrt{(aa + rr)(k^4 + (ar - Dkk)^2)}},$$

d'où nous tirons

$$z = \frac{a(ar - Dkk) + kkr}{Ckk} = \frac{(aa + kk)r - aDkk}{Ckk}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation

$$2zdp = \lambda dt(aq\sin\omega - p),$$

on obtiendra

$$\frac{2rdr((aa + kk)r - aDkk)}{CCkk\sqrt{(aa + rr)}} = \frac{-\lambda rdt((aa + kk)r - aDkk)}{Ckk\sqrt{(aa + rr)}},$$

qui se réduit à celle-ci

$$dr = -\lambda Cdt \quad \text{dont l'intégrale est}$$

$$r = E - \tfrac{1}{2}\lambda Ct$$

de sorte que nous ayons déjà déterminé, par le tems t, les quantités p, q & z, avec l'angle ω.

Continuation.

20. Or ds étant $= pdt$ & $d\phi = qdt$, puisqu'en posant $dt = \frac{-2dr}{\lambda C}$, on peut retenir dans le calcul la lettre r, au lieu de t nous pourrons pour un tems donné assigner premierement la vi-

viteſſe progreſſive $\frac{ds}{dt} = p$, puis la ſituation de l'axe horizontal autour duquel le globe tourne, ſavoir l'angle NYT $= \omega$, & enfin la viteſſe de rotation $\frac{d\Phi}{dt} = q$. Il reſte donc encore à déterminer la ligne courbe décrite par le mouvement progreſſif du globe; & cela ſera d'autant plus néceſſaire que l'angle ω s'en rapporte.

Cherchons pour cet effet l'angle ANY $= \theta$, moyennant l'équation $d\theta = \frac{\lambda apdt \operatorname{cof}\omega}{kkqz}$, qui ſe change par la ſubſtitution en

$$d\theta = \frac{-akkdr}{k^4 + (ar - Dkk)^2}, \text{ dont l'intégrale donne}$$

$$\theta = A. \cot \frac{ar - Dkk}{kk}, \text{ ou}$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{kk}{ar - Dkk}, \text{ de ſorte que nous ayons}$$

$$\operatorname{fin}\theta = \frac{kk}{V(k^4 - (ar - Dkk)^2)}, \quad \&$$

$$\operatorname{cof}\theta = \frac{ar - Dkk}{V(k^4 - (ar - Dkk)^2)}.$$

Or de là nous trouverons pour la différence des angles ω & θ ces ſimples formules

$$\operatorname{cof}(\omega - \theta) = \frac{a}{V(aa + rr)}: \operatorname{fin}(\omega - \theta) = \frac{-r}{V(aa + rr)}.$$

Main-

Maintenant, puisque $ds = \frac{-2dr\sqrt{(aa+rr)}}{\lambda CC}$, nous aurons enfin

$$dx = ds\,\mathrm{cos}(\omega - \theta) = \frac{-2adr}{\lambda CC},\ \&\ dy = ds\,\mathrm{sin}(\omega - \theta) = \frac{2rdr}{\lambda CC},$$

& par conséquent:

$$x = \mathrm{E} - \frac{2ar}{\lambda CC}\ \ \&\ y = \mathrm{F} + \frac{rr}{\lambda CC},$$

d'où il est d'abord clair que la courbe décrite est une parabole.

Mais ayant ici négligé d'introduire une constante dans l'intégration de l'angle θ, je suppléerai à ce défaut.

Dévelopement ultérieur.

21. Considérons pour cet effet le commencement du mouvement, pour lequel je poserai la vitesse progressive selon $AB = \sqrt{b} = \beta$: l'angle FAB que l'axe de rotation fait avec la direction AB $= \alpha$, la vitesse rotatoire dans l'équateur dirigée en avant $= \sqrt{c} = \gamma$: & déterminons par ces données les quantités constantes nées par l'intégration.

Qu'on fasse au commencement $r = f$, de sorte que nous ayons en général $t = \frac{2(f-r)}{\lambda C}$, ou $r = f - \frac{1}{2}\lambda Ct$. Ainsi, en posant $r = f$, il faut que p devienne $= \beta$, $q = \frac{\gamma}{a}$, & $\omega = \alpha$; de là nous aurons

$$\beta = \frac{\sqrt{(aa+ff)}}{C}:\ \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{(k^4 + (af - \mathrm{D}kk)^2)}}{Ckk},\ \&$$

$$\mathrm{tang}\ \alpha = \frac{akk - f(af - \mathrm{D}kk)}{fkk + a(af - \mathrm{D}kk)}.$$

d'où il faudra chercher les constantes f, C & D.

Or de la derniere nous tirons

$$af - Dkk = \frac{kk(a\cos\alpha - f\sin\alpha)}{a\sin\alpha + f\cos\alpha},\ \text{de là}$$

$$\sqrt{(k^4 + (af - Dkk)^2)} = \frac{kk\sqrt{(aa + ff)}}{a\sin\alpha + f\cos\alpha},\ \text{donc}$$

$$\frac{\gamma}{a\beta} = \frac{1}{a\sin\alpha + f\cos\alpha}\ \text{ou}\ f = \frac{a(\beta - \gamma\sin\alpha)}{\gamma\cos\alpha},$$

par conſéquent $C = \frac{a\sqrt{(\beta\beta + \gamma\gamma - 2\beta\gamma\sin\alpha)}}{\beta\gamma\cos\alpha}$, &

$$af - Dkk = \frac{kk(\gamma - \beta\sin\alpha)}{\beta\cos\alpha},\ \text{\& enfin}$$

$$Dkk = \frac{aa(\beta - \gamma\cos\alpha)}{\gamma\cos\alpha} - \frac{kk(\gamma - \beta\sin\alpha)}{\beta\cos\alpha},$$

Intégration de l'angle θ.

22. Ayant donc déterminé ces quantités conſtantes, intégrons généralement, & nous aurons

$$\text{tang}\,(\theta + G) = \frac{kk}{ar - Dkk},$$

dont pour le commencement du mouvement où θ doit devenir $= \alpha$, on trouve $\text{tang}\,(\alpha + G) = \frac{kk}{af - Dkk} = \frac{\beta\cos\alpha}{\gamma - \beta\sin\alpha} = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,G}{1 - \text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,G}$ & de là $\text{tang}\,G = \frac{\beta - \gamma\sin\alpha}{\gamma\cos\alpha} = \frac{f}{a}$:

On aura donc pour un tems quelconque

$$\text{tang}\,\theta = \frac{akk + Dfkk - afr}{aar - aDkk + fkk} = \frac{akk - f(ar - Dkk)}{fkk + a(ar - Dkk)}.$$

Or

Or tang ω étant $= \dfrac{akk - r\,(ar - \mathrm{D}kk)}{kkr + a\,(ar - \mathrm{D}kk)}$ en développant ces formules on aura

$$\theta = \mathrm{A.\ tang}\,\frac{a}{f} - \mathrm{A.\ tang}\,\frac{ar - \mathrm{D}kk}{kk}, \quad \&$$

$$\omega = \mathrm{A.\ tang}\,\frac{a}{r} - \mathrm{A.\ tang}\,\frac{ar - \mathrm{D}kk}{kk},$$ d'où l'on tire

$$\omega - \theta = \mathrm{A.\ tang}\,\frac{a}{r} - \mathrm{A.\ tang}\,\frac{a}{f} = \mathrm{A.\ tang}\,\frac{a(f-r)}{aa+fr},$$ & de là

$$\sin(\omega-\theta) = \frac{a\,(f-r)}{\sqrt{(a^4 + aa\,(ff+rr) + ffrr)}} = \frac{a\,(f-r)}{\sqrt{(aa+ff)\,(aa+rr)}},$$

$$\cos(\omega-\theta) = \frac{aa+fr}{\sqrt{(aa+ff)\,(aa+rr)}}.$$

Donc, à cause de $ds = \dfrac{-2dr\,\sqrt{(aa+rr)}}{\lambda\,\mathrm{CC}}$,

dx sera $= \dfrac{-2dr\,(aa+fr)}{\lambda\,\mathrm{CC}\sqrt{(aa+ff)}}$, & $dy = \dfrac{-2adr\,(f-r)}{\lambda\,\mathrm{CC}\sqrt{(aa+ff)}}$,

& comme x & y doivent évanouïr en posant $r = f$, nous aurons par l'intégration

$$x = \frac{2aaf + f^3 - 2aar - frr}{\lambda\,\mathrm{CC}\sqrt{(aa+ff)}}, \quad \&$$

$$y = \frac{aff - 2afr + arr}{\lambda\,\mathrm{CC}\sqrt{(aa+ff)}},$$

d'où nous pourrons déterminer, & la ligne courbe décrite par le centre du globe, & son lieu pour un tems quelconque t écoulé depuis le commencement, en prenant

$$r = f - \tfrac{1}{2}\lambda\,\mathrm{C}t$$

f étant $= \frac{a(\beta - \gamma \text{ fin } \alpha)}{\gamma \text{ cof } \alpha}$, &

$$C = \frac{V(aa + ff)}{\beta} = \frac{aV(\beta\beta + \gamma\gamma - 2\beta\gamma \text{ fin } \alpha)}{\beta\gamma \text{ cof } \alpha}.$$

Conclusion.

23. Après avoir trouvé la ligne courbe décrite par le centre du globe qui eſt viſiblement toujours une parabole, dans laquelle pour un tems quelconque le lieu du globe Y peut être aſſigné, on pourra à préſent encore déterminer l'angle NYT, que l'axe de rotation MN, y fait avec la direction du mouvement; ſavoir NYT $= \omega$ ſera $=$ A. tang $\frac{a}{r}$ — A. tang $\frac{ar - Dkk}{kk}$, ou bien on pourra déterminer l'angle ANY, que l'axe fait avec la premiere direction du mouvement, lequel ſera ANY $= \theta =$ A. tang $\frac{a}{f}$ — A. tang $\frac{ar - Dkk}{kk}$,

$$Dkk \text{ étant } = af - \frac{kk(\gamma - \beta \text{ fin } \alpha)}{\beta \text{ cof } \alpha}.$$

Ou, puisqu'en gardant f; $\frac{\beta}{\gamma}$ eſt $= \frac{a \text{ fin } \alpha + f \text{ cof } \alpha}{a}$,

$$Dkk \text{ ſera } = af - \frac{kk(a \text{ cof } \alpha - f \text{ fin } \alpha)}{a \text{ fin } \alpha + f \text{ cof } \alpha}.$$

Enfin la viteſſe rotatoire autour de cet axe MN, dirigée en avant ſera $\frac{d\Phi}{dt} = q = \frac{1}{Ckk} V(k^4 + (ar - Dkk)^2)$ & la viteſſe progreſſive $\frac{ds}{dt} = p = \frac{1}{C} V(aa + rr)$.

De la durée du mouvement en ligne courbe.

24. Le mouvement du globe ne demeurera conforme aux formules trouvées que tant qu'il y a du frottement. Or le frottement ne peut évanouïr à moins que ne devienne, & $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, & $\omega = 90°$.

En posant $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, on trouve $r = \frac{aDkk}{aa \mp kk}$, & partant, à cause de $a(ar - Dkk) = \pm kkr$.

$\omega = \text{A. tang}\,\frac{a}{r} - \text{A. tang}\,(\pm\frac{r}{a})$, où le signe inférieur donne effectivement $\omega = \text{A. tang}\,\frac{a}{r} + \text{A. tang}\,\frac{r}{a} = 90°$. de sorte qu'au tems où r devient $= \frac{aDkk}{aa + kk}$, le globe commencera à rouler uniformement, & conservera depuis ce mouvement en ligne droite pour toujours. Or alors la vitesse progressive sera

$$= \frac{a}{C}\,\sqrt{(1 + \frac{DDk^4}{(aa + kk)^2})},$$

& ce mouvement uniforme commencera après un tems écoulé

$$t = \frac{2}{\lambda C}\left(f - \frac{aDkk}{aa + kk}\right) = \frac{2kk\,(aa + ff)\cos\alpha}{\lambda C\,(aa + kk)\,(a\sin\alpha + f\cos\alpha)},$$

ou $t = \frac{2kk\,(aa + ff)\,\gamma\cos\alpha}{\lambda C a\beta\,(aa + kk)}$.

Et alors l'axe de rotation fera avec la droite AB un angle $\theta = \text{A tang}\,\frac{a}{f} + \text{A tang}\,\frac{r}{a}$, r étant $= \frac{aDkk}{aa + kk}$.

Or

Or on pourra encore de là trouver les coordonnées pour le lieu où ce mouvent uniforme commencera car, $f - r$ étant $=$
$$\frac{kk(aa + ff)\cos\alpha}{(aa + kk)(a\sin\alpha + f\cos\alpha)}.$$

$$2aa + ff + fr = \frac{2aa(aa + ff)}{aa + kk} + \frac{kk(aa + ff)(2a\sin\alpha + f\cos\alpha)}{(aa + kk)(a\sin\alpha + f\cos\alpha)}, \text{ ou}$$

$$2aa + ff + fr = 2(aa + ff) - \frac{fkk(aa + ff)\cos\alpha}{(aa + kk)(a\sin\alpha + f\cos\alpha)},$$

on aura $x = \dfrac{(f - r)(2aa + ff + fr)}{\lambda(aa + ff)\sqrt{(aa + ff)}}.\beta\beta$

$$y = \frac{a(f - r)^2}{\lambda(aa + ff)\sqrt{(aa + ff)}}.\beta\beta$$

ou en substituant:

$$x = \frac{\beta\beta kk\cos\alpha \times \sqrt{(aa + ff)}}{\lambda(aa + kk)(a\sin\alpha + f\cos\alpha)}\left(2 - \frac{fkk\cos\alpha}{(aa + kk)(a\sin\alpha + f\cos\alpha)}\right),$$

$$y = \frac{\beta\beta ak^4\cos\alpha^2 \times \sqrt{(aa + ff)}}{\lambda(aa + kk)^2(a\sin\alpha + f\cos\alpha)^2},$$

Mais tout ceci mérite d'être encore plus soigneusement dévelopé, ce que je ferai dans les articles suivans.

Du commencement du mouvement.

25. Le globe ayant recu un mouvement progressif selon la direction AB, avec une vitesse $= \sqrt{b} = \mathfrak{G}$, & en même tems un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal EF, qui fasse avec AB, un angle BAF $= \alpha$, & dont la vitesse dans l'équateur soit $= \sqrt{c} = \gamma$, de sorte que la partie de devant EHF en est déprimée;

Fig. 4

mé; qu'on tire dans le plan horizontal AO, perpendiculaire à EF, & le point le plus bas du globe rasera le plan à cause du mouvement rotatoire selon la direction AC, avec une vitesse $= \gamma$; & à cause du mouvement progressif ce même point se mouvra selon AB, avec une vitesse $= \beta$. Voyons maintenant suivant quelles loix le globe sollicité par ce double mouvement se mouvra.

Qu'on fasse $Aa : AC = \beta : \gamma$ & à cause de $AC = a$, $Aa = \frac{a\beta}{\gamma}$; qu'on tire encore CD parallele à AB, & après y avoir abaissé du point A une perpendiculaire AD, décomposons le mouvement AC selon les directions $A\alpha$ & AD. Mais, puisque $CAD = FAB = \alpha$, on aura $CD = a \sin \alpha$, & $AD = a \cos \alpha$. Retranchons de CD la ligne $CG = Aa = \frac{a\beta}{\gamma}$, & nous aurons

$$DG = a \sin \alpha - \frac{a\beta}{\gamma} = \frac{a(\gamma \sin \alpha - \beta)}{\gamma}, \text{ \& partant}$$

$$AG = \frac{a}{\gamma} \sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma \sin \alpha + \gamma\gamma)}.$$

Or AG donnant la vraye direction du mouvement au point d'attouchement, la direction du frottement AH lui sera contraire, & l'angle HAB sera $= AGD$. Donc, si l'angle BAH est posé $= \varepsilon$,

$$\sin \varepsilon \text{ sera } = \frac{\gamma \cos \alpha}{\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma \sin \alpha + \gamma\gamma)}},$$

$$\cos \varepsilon = \frac{\gamma \sin \alpha - \beta}{\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma \sin \alpha + \gamma\gamma)}}, \quad \&$$

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{\gamma \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha - \beta}.$$

Le globe sera donc au premier instant sollicité selon la direction AH par une force $= \lambda M$; la lettre M représentant le poids du globe

globe, & λ la partie du poids à laquelle le frottement eſt égal, de ſorte que ſoit ſelon les experiences $\lambda = \frac{1}{3}$.

Mais, en introduiſant cet angle BAH $= \varepsilon$ dans le calcul, les quantités conſtantes de deſſus ſeront déterminées en ſorte que nous ayons:

$$f = \frac{-a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon}, \; C = \frac{a}{\beta \sin \varepsilon}, \text{ \& à cauſe de } \frac{\beta}{\gamma} = \frac{-\cos(\alpha + \varepsilon)}{\sin \varepsilon},$$

$$Dkk = \frac{-aa \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} + \frac{kk(\sin \varepsilon + \sin \alpha \cos(\alpha + \varepsilon))}{\cos \alpha . \cos(\alpha + \varepsilon)}, \text{ ou}$$

$$Dkk = -aa \cot \varepsilon + kk \tang(\alpha + \varepsilon), \text{ \& } \sqrt{(aa + ff)} = \frac{a}{\sin \varepsilon},$$

où $\alpha + \varepsilon$ repréſente l'angle FAH.

Donc, puiſque le globe ſera au premier moment ſollicité ſelon la direction AH, il ſe détournera de la ligne AB, & ſe mouvra en ligne courbe AYZ, dont nous allons maintenant chercher la nature.

De la ligne courbe décrite par le centre du globe.

26. Soit après le tems t le centre du globe en Y, pour lequel point nous avons poſé ci-deſſus AX $= x$, & XY $= y$. Nous y avons encore introduit la variable r, de maniere que ſoit

$$t = \frac{2(f - r)}{\lambda C} = \frac{2\beta(f - r)\sin \varepsilon}{\lambda a}, \text{ \& de là nous avons en-}$$

fin trouvé, à cauſe de $\beta\beta = b$,

$$x = \frac{(f - r)(2aa + ff + fr)}{\lambda CC \sqrt{(aa + ff)}} = \frac{b(f - r)(2aa + ff + fr)\sin \varepsilon^3}{\lambda a^3},$$

$$y = \frac{a(f - r)^2}{\lambda CC \sqrt{(aa + ff)}} = \frac{b(f - r)^2 \sin \varepsilon^3}{\lambda aa}.$$

Or

Or, en introduisant au lieu de r une autre variable u, qui est proportionelle au tems, ces formules deviendront plus simples; soit donc $(f - r)\sin\varepsilon = u$, ou $r = f - \frac{u}{\sin\varepsilon}$, de sorte que soit $t = \frac{2\beta u}{\lambda a}$, & on aura

$$x = \frac{bu\,(2(aa + ff)\sin\varepsilon - fu\sin\varepsilon)}{\lambda a^3}, \quad \&$$

$$y = \frac{buu\sin\varepsilon}{\lambda aa},$$ ou bien à cause de

$f\sin\varepsilon = -a\cos\varepsilon$, & $(aa + ff)\sin\varepsilon^2 = aa$,

x sera $= \frac{bu\,(2a + u\cos\varepsilon)}{\lambda aa}$, &

$$y = \frac{buu\sin\varepsilon}{\lambda aa}.$$

laquelle ligne courbe doit être continuée jusqu'à ce que r devienne $= \frac{a\,\mathrm{D}kk}{aa + kk}$.

Or, r étant $= \frac{-a\cos\varepsilon - u}{\sin\varepsilon}$, lorsqu'on substitue pour $\mathrm{D}kk$ sa valeur, on obtiendra

$$\frac{-u}{\sin\varepsilon} = \frac{akk(\cos\varepsilon + \mathrm{tang}\,(\alpha + \varepsilon))}{aa + kk}, \quad \text{\& de là}$$

$$u = \frac{-akk\cos\alpha}{(aa + kk)\cos(\alpha + \varepsilon)}$$

dont la valeur sera toujours positive.

 Car

Car $\alpha + \varepsilon$ représentant l'angle FAH, dont le complément à deux droits est FAG, qui, puisque AG tombe dans l'angle CAB, s'étendant sur l'un & l'autre côté de la ligne droite AF, sera nécessairement aigu, & partant son cosinus étant positif, celui de l'angle FAH, sera négatif. En effet on trouve

$$\cos(\alpha + \varepsilon) = \frac{-\beta \cos\alpha}{\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma \sin\alpha + \gamma\gamma)}}.$$

Par conséquent, quelque mouvement qu'on ait imprimé au globe, il deviendra nécessairement uniforme après un tems écoulé

$$t = \frac{2kk\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma \sin\alpha + \gamma\gamma)}}{\lambda(aa + kk)},$$

qui sera toujours positif.

Or, pour un point quelconque Y de la ligne courbe, on trouvera, le rayon de la courbure

$$= \frac{2b\,(aa + 2au \cos\varepsilon + uu)^{\frac{3}{2}}}{\lambda a^3 \sin\varepsilon},$$

qui donc au commencement en A sera $= \dfrac{2b}{\lambda \sin\varepsilon}$.

Mais, pour entrevoir mieux la situation de cet arc parabolique, en éliminant u, nous trouvons

$$(x \sin\varepsilon - y \cos\varepsilon)^2 = \frac{Aby \sin\varepsilon}{\lambda},$$

d'où nous apprenons que l'axe de la parabole est parallele à la ligne droite AH, que son paramètre est $= \dfrac{4b \sin\varepsilon}{\lambda}$, & que son sommet sera trouvé en posant $u = -a \cos\varepsilon$, de sorte que nous ayons pour le sommet

$x =$

$$x = \frac{-b \operatorname{cof} \varepsilon \, (2 - \operatorname{cof} \varepsilon^2)}{\lambda} = \frac{-b \operatorname{cof} \varepsilon \, (\operatorname{cof} \varepsilon^2 + 2 \operatorname{fin} \varepsilon^2)}{\lambda}, \ \&$$

$$y = \frac{b \operatorname{fin} \varepsilon \operatorname{cof} \varepsilon^2}{\lambda}.$$

Or l'axe de la parabole qui eſt parallele à AH, en eſt éloigné de la diſtance $\frac{2b \operatorname{fin} \varepsilon \operatorname{cof} \varepsilon}{\lambda}$; cet axe traverſera donc la ligne droite AB, au point I, de ſorte que ſoit $AI = \frac{2b \operatorname{cof} \varepsilon}{\lambda}$, & l'éloignement du ſommet de la parabole au point I ſera $= \frac{b \operatorname{cof} \varepsilon^2}{\lambda}$. C'eſt pourquoi, tirant par le point I une ligne parallele à AH, & ſur celle-ci une perpendiculaire OV, qui doit être menée par le milieu O de l'intervalle AI, cette perpendiculaire aſſignera en V, le ſommet de la parabole dont le foyer ſera éloigné du point I de la diſtance $\frac{b}{\lambda}$, de ſorte qu'en faiſant tomber une perpendiculaire ſur la ligne AI, celle-ci en ſera coupée en deux parties égales; & par conſéquent la ligne droite qui joint le foyer de la parabole avec le point A, fera avec AI un angle $= \varepsilon$, & partant ſa longueur ſera $= \frac{\beta}{\lambda}$.

Conſtruction de la Courbe.

27. La ſituation de la droite AH, la hauteur b due à la viteſſe du mouvement progreſſif du globe au point A, avec la fraction λ née par le frottement, étant connues, qu'on érige la ligne $AS = \frac{b}{\lambda}$, de ſorte qu'elle incline ſur AI autant que AH eſt incliné ſur AB. Enſuite, tirant du point S, SI parallele à AH, & SO perpendiculaire

 ſur

sur AI, qu'on fasse tomber du point O sur la ligne SI, la normale OV, alors V sera le sommet, & S le foyer de la parabole cherchée. Or il est clair que, si l'angle HAB étoit aigu, l'axe de la parabole VS tomberoit hors de la droite AB, & s'il étoit obtus, l'axe VS tomberoit entre la ligne AB; mais si l'angle BAH étoit droit, alors le point A lui-même seroit le sommet de la parabole, & son axe insisteroit perpendiculairement sur AB.

Du mouvement du globe.

28. Après un tems écoulé $t = \frac{2\beta u}{\lambda a}$, le globe étant parvenu en Y, la direction du mouvement progressif sera inclinée à la droite AB, d'un angle dont la tangente est $\frac{dy}{dx} = \frac{u \sin \varepsilon}{a + u \cos \varepsilon}$, & la vitesse progressive sera $\frac{ds}{dt} = \frac{\beta}{a} \sqrt{(aa + 2au \cos \varepsilon + uu)}$.

Or, pour ce qui regarde le mouvement rotatoire, puisque l'axe, autour duquel il se fait demeure toujours horizontal, qu'il soit représenté par la ligne MYN, qui prolongée rencontre la droite AB en R, & ARY sera l'angle que nous avons appellé ci-dessus θ, & que nous avons trouvé $=$ A. tang $\frac{a}{f}$ — A. tang $\frac{ar - Dkk}{kk}$. Comme donc, en introduisant l'angle HAB $= \varepsilon$, f est $= \frac{-a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon}$; A. tang $\frac{a}{f}$ sera $= - \varepsilon$, & à cause de $r = \frac{-a \cos \varepsilon - u}{\sin \varepsilon}$; $Dkk = - aa \cot \varepsilon + kk \tang (\alpha + \varepsilon)$, $ar - Dkk$ sera $= - kk \tang (\alpha + \varepsilon) - \frac{au}{\sin \varepsilon}$, d'où se fait

$\theta =$

$\theta = \mathrm{A\ tang}\left(\frac{au}{kk\sin\varepsilon} + \mathrm{tang}(\alpha+\varepsilon)\right) - \varepsilon$, & partant

$\mathrm{tang}(\theta+\varepsilon) = \mathrm{tang}(\alpha+\varepsilon) + \frac{au}{kk\sin\varepsilon}$, ou

$$\mathrm{tang}\,\theta = \left(\frac{au}{kk\sin\varepsilon} + \frac{\sin\alpha}{\cos\varepsilon.\cos(\alpha+\varepsilon)}\right) : \left(\frac{au}{kk\cos\varepsilon} + \frac{\cos\alpha}{\cos\varepsilon.\cos(\alpha+\varepsilon)}\right)$$

ou bien $\mathrm{tang}\,\theta = \frac{kk\sin\alpha\sin\varepsilon + au\cos\varepsilon\cos(\alpha+\varepsilon)}{kk\cos\alpha\sin\varepsilon + au\sin\varepsilon\cos(\alpha+\varepsilon)}$, d'où nous

tirons $\mathrm{tang}(\theta-\alpha) = \frac{au\cos(\alpha+\varepsilon).\cos(\alpha+\varepsilon)}{kk\sin\varepsilon + au\sin(\alpha+\varepsilon).\cos(\alpha+\varepsilon)}$.

Mais, si nous cherchions l'angle RYZ $= \omega$, puisque nous avons eu

$$\mathrm{tang}\,\omega = \frac{akk - r(ar - \mathrm{D}kk)}{kkr + a(ar - \mathrm{D}kk)},$$

nous trouverions, en faisant les substitutions de ci-dessus:

$$\mathrm{tang}\,\omega = \frac{akk\sin\alpha\sin\varepsilon + kku\sin\varepsilon\sin(\alpha+\varepsilon) + aau\cos\varepsilon\cos(\alpha+\varepsilon) + auu\cos(\alpha+\varepsilon)}{akk\cos\alpha\sin\varepsilon + (aa+kk)u\sin\varepsilon\cos(\alpha+\varepsilon)},$$

ou bien

$$\mathrm{tang}(\omega-\alpha) = \frac{kku\sin\varepsilon^2 + aau\cos(\alpha+\varepsilon)^2 + auu\cos\alpha\cos(\alpha+\varepsilon)}{akk\sin\varepsilon + kku\sin\varepsilon\cos\varepsilon + aau\sin(\alpha+\varepsilon)\cos(\alpha+\varepsilon) + auu\sin\alpha\cos(\alpha+\varepsilon)},$$

Enfin, la vitesse angulaire autour de cet axe MN dirigée en avant, est trouvée

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\beta}{akk\cos(\alpha+\varepsilon)}\sqrt{(k^4\sin\varepsilon^2 + 2akku\sin\varepsilon\sin(\alpha+\varepsilon)\cos(\alpha+\varepsilon) + a^2u^2\cos(\alpha+\varepsilon)^2)}.$$

Or

Or en prenant $u = \frac{-akk \operatorname{cof} \alpha}{(aa + kk) \operatorname{cof} (\alpha + \varepsilon)}$, où le mouvement uniforme & rectiligne commence, la viteffe du mouvement progreffif fera =

$$\frac{-\beta \sqrt{(a^4 \operatorname{cof} (\alpha + \varepsilon)^2 - 2 aakk \operatorname{fin} \alpha \operatorname{fin} \varepsilon \operatorname{cof} (\alpha + \varepsilon) + k^4 \operatorname{fin} \varepsilon^2)}}{(aa + kk) \operatorname{cof} (\alpha + \varepsilon)},$$

à laquelle la viteffe rotatoire dans dans l'équateur fera égale.

Remarque.

29. Ce probleme qui n'étoit pas peu difficile étant expédié, la route pour réfoudre le probleme général, que je me fuis propofé de fuivre ici, n'en eft pas peu facilitée. Mais alors, l'axe de rotation n'étant plus horizontal, mais incliné à l'horizon, l'inclinaifon en pourra continuellement varier; & la plus grande difficulté confiftera en la maniere la plus propre de faire entrer au calcul tant la pofition de l'axe que fa continuelle variation, où il paroit encore que tout dépendra d'une préfentation convenable de la figure. Enfuite, nous venons d'apprendre par le dévelopement du probleme précédent, que les difficultés du calcul, furtout à l'égard des quantités conftantes nées par l'intégration, deviennent beaucoup plus aifées à furmonter, lorfqu'on recherche premierement la variation momentanée que le mouvement du globe éprouve au premier inftant, entant que cette détermination peut enfuite aifément être appliquée aux élémens des tems quelconques. C'eft par cette raifon que j'ai choifi la même route pour réfoudre le probleme général, en le foudivifant dans les problemes fuivans.

PROBLEME IV.

Fig. 5. 30. *Ayant imprimé au globe tant un mouvement progreffif qu'un rotatoire autour d'un axe quelconque qui paffe par fon centre, déterminer la variation que le mouvement fouffre au premier inftant.*

SOLU-

SOLUTION.

Que la Table des figures représente le plan horizontal sur lequel le mouvement se fait; que A soit le point auquel le globe touche le plan avant de commencer à se mouvoir, & qu'on lui imprime maintenant un mouvement progressif selon la direction AB, & avec une vitesse $= \sqrt{b} = \beta$.

Or, pour concevoir mieux le mouvement de rotation, qu'on s'imagine que le globe $Ab\alpha\beta$ soit constitué sur le plan horizontal de la maniere usitée dans la Trigonométrie sphérique. Soit le centre du globe en O, son rayon $= a$, & βOb le diametre horizontal & parallele à la droite AB, auquel réponde le grand cercle horizontal $bfi\beta$. Ensuite, soit p un des poles autour duquel la rotation se fait au premier moment, de sorte que Op soit l'axe de rotation que je pose incliné à l'horizon sous l'angle δ, & dont la projection sur le plan horizontal soit la ligne droite AF, faisant avec AB un angle BAF $= \alpha$, de maniere que l'axe de rotation rencontre enfin la droite AF.

Pour réduire tout ceci à la sphere, je tire par p le cercle vertical Apf, & l'angle bAf sera $=$ BAF $= \alpha$: de là l'arc $bf = a\alpha$, & $fp = a\delta$, de sorte que soit $Ap = a\,(90° - \delta)$. Qu'on imprime maintenant au globe un mouvement de rotation autour de cet axe Op, dont la vitesse dans l'équateur soit $= \sqrt{c} = \gamma$, de sorte que le point π en soit élevé, & la vitesse rotatoire du point A sera $= \gamma \sin.(90° - \delta) = \gamma \cos.\delta$, dont la direction sera AC normale à AF.

Qu'on fasse $Aa = \beta$, AC $= \gamma \cos.\delta$; & après avoir tiré CF parallele à AB, qu'on y fasse tomber du point A la perpendiculaire AD. Maintenant, à cause de CAD $= \alpha$, AD sera $= \gamma \cos.\alpha \cos.\delta$ & CD $= \gamma \sin.\alpha \cos.\delta$: donc, après avoir retranché de CF la ligne CG $= Aa = \beta$, on aura pour la décomposition du mouvement selon les directions AD & DC: DG $= \beta - \gamma \sin.\alpha \cos.\delta$, & la droite

droite AG repréſentera la vraye direction du mouvement du point A, qui donc prolongée de l'autre côté aſſignera la direction du frottement, qui toujours eſt $= \lambda M$.

Poſons, pour abréger le calcul, l'angle BAG $= \zeta$, de ſorte que ζ ſoit ici ce que nous avons indiqué ci-deſſus par $180° - \varepsilon$, & nous aurons $\tang \zeta = \frac{\gamma \cos \alpha \cos \delta}{\mathfrak{G} - \gamma \sin \alpha \cos \delta}$. Donc, pour le mouvement progreſſif, il naitra une force contraire au mouvement $= \lambda M \cos \zeta$, & une autre normale à la précédente qui tâchera de détourner le globe de la direction AB $= \lambda M \sin \zeta$, par laquelle donc le chemin du globe ſera courbé. Or, en tirant AI, perpendiculaire à AG, & du point O la ligne Oi parallele à AI, de ſorte que ſoit l'arc $bi =$ BAI $= 90° + \zeta$, cette droite Oi ſera l'axe horizontal autour duquel la force du frottement tâche de tourner le globe, de maniere que le point π en ſoit déprimé. Comme donc ce mouvement eſt contraire à celui autour de Op, en décrivant l'arc d'un grand cercle ip, après un tems infiniment petit dt, la rotation ſe fera autour d'un autre axe $O\pi$. Or, pour en déterminer la ſituation par le probleme ſecond, il faut commencer par la recherche de l'arc ip, ce qui ſe fera par la réſolution du triangle ſphérique iAp, dans lequel eſt $Ap = a(90° - \delta)$; $Ai = a.\, 90°$, & $pAi = 90° + \zeta - \alpha$, & dont on trouve $\cos \frac{ip}{a} = - \cos \delta \sin (\zeta - \alpha) = \cos iOp$. J'appellerai en attendant cet angle $iOp = \Sigma$ qui, dans le probleme ſecond a été poſé $= \zeta$; & comme la viteſſe rotatoire qui là étoit $= \frac{d\Phi}{dt}$, ici eſt $= \frac{\gamma}{a}$, en poſant le moment d'inertie du globe $= Mkk$, l'angle $pO\pi$ ſera $= \frac{\lambda a a dt}{2 \gamma k k} \sin \Sigma$, & la viteſſe de rotation $\frac{\gamma}{a}$ aura pris, dans le tems infiniment petit dt, un accroiſſement

ment $= \frac{\lambda a dt \operatorname{cof} \Sigma}{2kk} = \frac{-\lambda a dt \operatorname{cof} \delta \operatorname{fin} (\zeta - \alpha)}{2kk}$. Donc, puisque l'axe de rotation s'eſt cependant mis de la ſituation Op en Oπ, ni ſon inclinaiſon à l'horizon $\zeta\pi$, ni celle de la projection AΦ à AB, ne ſeront changées. Or ip étant $= a\Sigma$, ſin ipA ſera $= \frac{\operatorname{cof} (\zeta - \alpha)}{\operatorname{fin} \Sigma}$, c'eſt pourquoi, tirant le petit arc πq perpendiculaire à Af, à cauſe de $p\pi = \frac{\lambda a^3 dt}{2\gamma kk} \operatorname{fin} \Sigma$ πq ſera $= \frac{\lambda a^3 dt \operatorname{cf} (\zeta - \alpha)}{2\gamma kk} = \pi A q \operatorname{fin} A p =$ FAΦ. $a \operatorname{cf} \delta$, & partant la variation faite dans l'angle BAF $= \alpha$, ou ſon accroiſſement ſera FAΦ $= \frac{\lambda a a dt \operatorname{cof} (\zeta - \alpha)}{2\gamma kk \operatorname{cof} \delta}$.

Enſuite cof ipA eſt $= \frac{\operatorname{fin} \delta \operatorname{fin} (\zeta - \alpha)}{\operatorname{fin} \Sigma}$, & enfin

$$pq = \frac{\lambda a^3 dt \operatorname{fin} \delta \operatorname{fin} (\zeta - \alpha)}{2\gamma kk},$$

& par conſéquent, comme l'axe de rotation a été incliné à l'horizon de l'angle δ, à préſent après le tems dt cette inclination ſera augmentée de l'angle $\frac{\lambda a a dt \operatorname{fin} \delta \operatorname{fin} (\zeta - \alpha)}{2\gamma kk}$.

PROBLEME V.

31. *Ayant imprimé au globe tant un mouvement progreſſif qu'un rotatoire autour d'un diametre quelconque, aſſigner pour tout tems & ſon lieu & ſon mouvement.*

SOLUTION.

Le rayon du globe étant $= a$, ſon poids $=$ M, & ſon moment d'inertie autour d'un diametre quelconque $=$ Mkk; qu'on lui Fig. 6.

 ait

ait imprimé au commencement un mouvement progressif selon la direction AB, & avec une vitesse $= \sqrt{b} = \beta$; & comme au commencement le globe est supposé toucher le plan au point A, qu'on lui ait encore imprimé un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque, qui prolongé rencontre le plan horizontal en F, de manière qu'en tirant AF l'angle BAF soit $= \alpha$, & l'inclinaison de l'axe à la droite AF $= \delta$, de sorte que soit $\tang \delta = \frac{a}{AF}$.

Que le globe se meuve donc autour de cet axe en avant avec une vitesse qui dans l'équateur soit $= \sqrt{c} = \gamma$, & qu'on détermine de ces données l'angle ζ, de sorte que soit

$$\tang \zeta = \frac{\gamma \cos \alpha \cos \delta}{\beta - \gamma \sin \alpha \cos \delta}, \quad \text{\& partant}$$

$$\tang (\zeta - \alpha) = \frac{\gamma \cos \delta - \beta \sin \alpha}{\beta \cos \alpha}.$$

Maintenant, aprés un tems écoulé t, que le globe touche le plan au point Y, & soit AY $= s$ la ligne courbe décrite par le globe, dans laquelle il parcourre dans l'élément du tems dt, l'espace infiniment petit Y$y = ds$.

Soit YR $= r$, le rayon de la courbure au point Y: que la vitesse progressive y soit $= p$, de sorte que nous ayons $ds = p\,dt$, & que le globe se tourne encore en avant autour d'un axe qui prolongé rencontre le plan horizontal en N, & ayant tiré la droite YN, nommons l'angle NYZ $= \omega$, & l'inclinaison de l'axe à l'horizon $= \theta$, de maniere que soit $\tang \theta = \frac{a}{YN}$. Ensuite, la vitesse rotatoire même autour de cet axe étant posé dans l'équateur $= q$, formons pareillement un angle ϕ, de maniere que soit

tang

$$\text{tang}\,\Phi = \frac{q\,\text{cof}\,\omega\,\text{cof}\,\theta}{p - q\,\text{fin}\,\omega\,\text{cof}\,\theta}, \text{ ou}$$

$$\text{tang}\,(\Phi - \omega) = \frac{q\,\text{cof}\,\theta - p\,\text{fin}\,\omega}{p\,\text{cof}\,\omega}.$$

A' préfent, comme par le probleme précédent la force retardante eft $= \lambda M\,\text{cof}\,\Phi$, on aura $2dp = \lambda dt\,\text{cof}\,\Phi$, & à caufe de la force détournante $\frac{2pp}{r}$ fera $= \lambda\,\text{fin}\,\Phi$: enfuite, on aura pour le mouvement de rotation dont la viteffe eft q, fon accroiffement $dq = \frac{-\lambda aadt\,\text{cof}\,\theta\,\text{fin}\,(\Phi - \omega)}{2kk}$, & l'inclinaifon de l'axe à l'horizon, qui dans ce moment eft pofé $= \theta$, aura pris un accroiffement dans le tems infiniment petit dt, de forte que foit

$$d\theta = + \frac{\lambda aadt\,\text{fin}\,\theta\,\text{fin}\,(\Phi - \omega)}{2kkq}.$$

Enfin tirant Yn, on obtiendra $NYn = \frac{\lambda aadt\,\text{cof}\,(\Phi - \omega)}{2kkq\,\text{cof}\,\theta}$.
Mais cette quantité n'étant point le différentiel de l'angle $ZYN = \omega$, puis qu'en y la direction de la ligne courbe prend un accroiffement $YRy = \frac{ds}{r}$, en ajoutant cette particule à la premiere NYn, le vrai différentiel de ω fera

$$d\omega = \frac{ds}{r} + \frac{\lambda aadt\,\text{cof}\,(\Phi - \omega)}{2kkq\,\text{cof}\,\theta}.$$

Or, à caufe de $ds = pdt$ & $r = \frac{2pp}{\lambda\,\text{fin}\,\Phi}$, on aura

$$\frac{ds}{r} = \frac{\lambda dt\,\text{fin}\,\Phi}{2p}.$$

Voici donc les équations qui renferment la folution de notre probleme

I. $2\,dp = -\lambda\,dt\,\mathrm{cos}\,\Phi.$

II. $\frac{ds}{r} = \frac{\lambda\,dt\,\mathrm{sin}\,\Phi}{2p}.$

III. $dq = \frac{-\lambda\,aadt\,\mathrm{cos}\,\theta\,\mathrm{sin}\,(\Phi - \omega)}{2kk}.$

IV. $d\theta = \frac{+\lambda\,aadt\,\mathrm{sin}\,\theta\,\mathrm{sin}\,(\Phi - \omega)}{2kkq}.$

V. $d\omega = \frac{\lambda\,dt\,\mathrm{sin}\,\Phi}{2p} + \frac{\lambda\,aadt\,\mathrm{cos}\,(\Phi - \omega)}{2kkq\,\mathrm{cos}\,\theta}.$

ds étant $= p\,dt$ & $\mathrm{tang}\,\Phi = \frac{q\,\mathrm{cos}\,\omega\,\mathrm{cos}\,\theta}{p - q\,\mathrm{sin}\,\omega\,\mathrm{cos}\,\theta}$, ou bien

$$\mathrm{tang}\,(\Phi - \omega) = \frac{q\,\mathrm{cos}\,\theta - p\,\mathrm{sin}\,\omega}{p\,\mathrm{cos}\,\omega}.$$

Et si l'on prend l'intégrale de cette équation $\frac{ds}{r} = \frac{\lambda\,dt\,\mathrm{sin}\,\Phi}{2p}$, de maniere qu'elle évanouïsse en posant $t = o$, la valeur de $\int \frac{ds}{r}$, donnera l'amplitude de la courbe AY, laquelle étant nommée ψ, & ayant fait tomber de Y sur AB, la perpendiculaire YX, en posant les coordonnées $AX = x$ & $XY = y$, on aura

$$dx = p\,dt\,\mathrm{cos}\,\psi \quad \& \quad dy = p\,dt\,\mathrm{sin}\,\psi$$

I Opération.

32. Commencons par les équations III. & IV. dont celle-là divisée par celle-ci donne:

$$\frac{dq}{d\theta} = \frac{-q\,\mathrm{cos}\,\theta}{\mathrm{sin}\,\theta} \text{ ou } \frac{dq}{q} = \frac{-d\theta\,\mathrm{cos}\,\theta}{\mathrm{sin}\,\theta}$$

dont

dont l'intégrale est $q = \frac{C}{\sin\theta}$. Or, puisqu'en posant $t = o$, q devient $= \gamma$ & $\theta = \delta$, la constante C étant justement déterminée, il sera $q = \frac{\gamma \sin\delta}{\sin\theta}$: laquelle valeur étant substituée dans la quatrieme donne

$$d\theta = \frac{+ \lambda aadt \sin\theta^2 \sin(\phi - \omega)}{2kk\gamma \sin\delta}.$$

Ensuite, par la même substitution

$$\text{tang}\,\phi \text{ sera } = \frac{\gamma \cos\omega \sin\delta \cos\theta}{p \sin\theta - \gamma \sin\omega \sin\delta \cos\theta},$$

$$\text{tang}(\phi - \omega) = \frac{\gamma \sin\delta \cos\theta - p \sin\theta \sin\omega}{p \sin\theta \cos\omega}, \quad \&$$

$$d\omega = \frac{\lambda dt \sin\phi}{2p} + \frac{\lambda aadt \sin\theta \cos(\phi - \omega)}{2kk\gamma \sin\delta \cos\theta}.$$

Substituons y encore pour λdt, sa valeur $- \frac{2dp}{\cos\phi}$, afin que dt en soit éliminé, & nous aurons

$$d\theta = \frac{- aadp \sin\theta^2 \sin(\phi - \omega)}{kk\gamma \sin\delta \cos\phi};$$

$$d\omega = - \frac{dp \sin\phi}{p \cos\phi} - \frac{aadp \sin\theta \cos(\phi - \omega)}{kk\gamma \sin\delta \cos\theta \cos\phi},$$

d'où, en chassant kk, on obtient

$$d\omega + \frac{dp}{p} \text{tang}\,\phi - \frac{d\theta \cot(\phi - \omega)}{\sin\theta \cos\theta} = 0:$$

& enfin, en substituant pour tang ϕ sa valeur, à cause de

$$\cot(\phi - \omega) = \frac{p \sin\theta \cos\omega}{\gamma \sin\delta \cos\theta - p \sin\theta \sin\omega},$$ il sera

$$d\omega + \frac{\gamma\, dp \sin\delta \cos\omega \cos\theta}{p(p\sin\theta - \gamma \sin\delta \sin\omega \cos\theta)} - \frac{p\, d\theta \cos\omega}{\cos\theta(\gamma\sin\delta\cos\theta - p\sin\omega\sin\theta)} = 0,$$

Or nous éviterons ces détours en retenant l'angle ϕ au calcul; car

$$\operatorname{tang}\phi \text{ étant } = \frac{\gamma \sin\delta \cos\omega}{p \operatorname{tang}\theta - \gamma \sin\delta \sin\omega},$$

$$p \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\phi \text{ sera} = \gamma \sin\delta (\sin\omega \operatorname{tang}\phi + \cos\omega) = \frac{\gamma \sin\delta \cos(\phi-\omega)}{\cos\phi},$$

& délà $\dfrac{p \operatorname{tang}\theta \sin\phi}{\cos(\phi - \omega)} = \gamma \sin\delta$, ou $p = \dfrac{\gamma \sin\delta \cos(\phi - \omega)}{\operatorname{tang}\theta \sin\phi}$,

dont le différentiel logarithmique donne

$$\frac{dp}{p} = -(d\phi - d\omega)\operatorname{tang}(\phi - \omega) - \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta} - d\phi \cot\phi,$$

laquelle valeur étant substituée dans l'équation

$$d\omega + \frac{dp}{p}\operatorname{tang}\phi - \frac{d\theta \cot(\phi - \omega)}{\sin\theta\cos\theta} = 0,$$ on obtiendra

$$d\omega - d\phi - \frac{d\theta \operatorname{tang}\phi}{\sin\theta\cos\theta} - (d\phi - d\omega)\operatorname{tang}\phi.\operatorname{tang}(\phi-\omega) - \frac{d\theta\cot(\phi-\omega)}{\sin\theta\cos\theta} = 0,$$

ou

$$(d\phi - d\omega)(1 + \operatorname{tang}\phi \operatorname{tang}(\phi-\omega)) + \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta}\left(\operatorname{tang}\phi + \frac{1}{\operatorname{tang}(\phi-\omega)}\right) = 0,$$

qui divisée par $1 + \operatorname{tang}\phi \operatorname{tang}(\phi - \omega)$ donne

$$(d\phi - d\omega)\operatorname{tang}(\phi - \omega) + \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 0,$$

dont l'intégrale est $-l\cos(\phi - \omega) + l\operatorname{tang}\theta = C$, ou bien

bien, puisqu'en posant $t = 0$, θ devient $= \delta$, & $\phi - \omega = \zeta - \alpha$, nous obtiendrons

$$\frac{\text{tang}\,\theta}{\text{cos}(\phi - \omega)} = \frac{\text{tang}\,\delta}{\text{cos}(\zeta - \alpha)},$$

Or le diviseur $1 + \text{tang}\,\phi\,\text{tang}(\phi - \omega) = \frac{\text{cos}\,\omega}{\text{cos}\,\phi\,\text{cos}(\phi - \omega)}$, contient une solution particuliere qui donne $\text{cos}\,\omega = 0$, & partant $\omega = 90°$, d'où résulte $p = \frac{\gamma\,\text{sin}\,\delta}{\text{tang}\,\theta}$, & $dp = \frac{-\gamma\,d\theta\,\text{sin}\,\delta}{\text{sin}\,\theta^2}$, laquelle valeur étant donc substituée dans l'équation

$$d\theta = \frac{-aadp\,\text{sin}\,\theta^2\,\text{sin}(\phi - \omega)}{kk\gamma\,\text{sin}\,\delta\,\text{cos}\,\phi} = \frac{aadp\,\text{sin}\,\theta^2}{kk\gamma\,\text{sin}\,\delta},$$

elle se changera en celle-ci

$$d\theta = \frac{-aad\theta}{kk}, \quad \text{on}\ d\theta = 0,$$

Dans ce cas donc le mouvement devient uniforme.

II Opération.

33. Nous avons déjà fait deux intégrations dont l'une donne $q = \frac{\gamma\,\text{sin}\,\delta}{\text{sin}\,\theta}$, & l'autre $\text{tang}\,\theta = \frac{\text{tang}\,\delta\,\text{cos}(\phi - \omega)}{\text{cos}(\zeta - \alpha)}$. Nous en avons ensuite tiré la valeur de $p = \frac{\gamma\,\text{cos}\,\delta\,\text{cos}(\zeta - \alpha)}{\text{sin}\,\phi}$, qui, à cause de $\text{cos}(\zeta - \alpha) = \frac{\mathfrak{C}\,\text{sin}\,\zeta}{\gamma\,\text{cos}\,\delta}$, se change en celle-ci $p = \frac{\mathfrak{C}\,\text{sin}\,\zeta}{\text{sin}\,\phi}$.

Considérons maintenant cette équation différentielle

$$d\theta = \frac{-aadp \sin\theta^2 \sin(\phi - \omega)}{kk\gamma \sin\delta \cos\phi},$$

elle se changera, à cause de $dp = \frac{-\beta d\phi \sin\zeta \cos\phi}{\sin\phi^2}$, dans la suivante

$$\frac{d\theta}{\sin\theta^2} = \frac{aa\beta d\phi \sin\zeta \sin(\phi - \omega)}{kk\gamma \sin\delta \sin\phi^2} = -d.\cot\theta.$$

Or $\cot\theta$ étant $= \frac{\cos(\zeta - \alpha)}{\tang\delta \cos(\phi - \omega)}$:

$$d.\cot\theta \text{ sera } = \frac{(d\phi - d\omega)\cos(\zeta - \alpha)\sin(\phi - \omega)}{\tang\delta \cos(\phi - \omega)^2},$$

& partant, en divisant par $\sin(\phi - \omega)$, on obtiendra

$$\frac{aa\beta d\phi \sin\zeta}{kk\gamma \sin\delta \sin\phi^2} + \frac{(d\phi - d\omega)\cos(\zeta - \alpha)}{\tang\delta \cos(\phi - \omega)^2} = 0,$$

ou bien à cause de $\frac{\cos(\zeta - \alpha)}{\tang\delta} = \frac{\beta \sin\zeta}{\gamma \sin\delta}$, il sera

$$\frac{aad\phi}{kk\sin\phi^2} + \frac{d\phi - d\omega}{\cos(\phi - \omega)^2} = 0,$$

laquelle équation étant intégrée comme il faut, on obtiendra

$$-\frac{aa}{kk}\cot\phi + \tang(\phi - \omega) = -\frac{aa}{kk}\cot\zeta + \tang(\zeta - \alpha),$$

de sorte qu'on ait

$$\tang(\phi - \omega) = \tang(\zeta - \alpha) + \frac{aa}{kk}(\cot\phi - \cot\zeta).$$

Nous

Nous venons donc de déterminer tout par la seule variable ϕ. Or celle-ci dépendra encore du tems t, de maniere que soit

$$2\,dp = \frac{-2\,\mathfrak{G}\,d\phi \sin\zeta \cos\phi}{\sin\phi^2} = -\lambda\,dt\cos\phi,$$

ce qui donne $\lambda\,dt = \dfrac{2\,\mathfrak{G}\,d\phi \sin\zeta}{\sin\phi^2}$, dont l'intégrale est

$$\lambda t = 2\,\mathfrak{G}\sin\zeta\,(\cot\zeta - \cot\phi).$$

Nous aurons donc $\cot\phi = \cot\zeta - \dfrac{\lambda t}{2\,\mathfrak{G}\sin\zeta}$, & partant

$$\tang(\phi - \omega) = \tang(\zeta - \alpha) - \frac{\alpha\alpha}{kk}\cdot\frac{\lambda t}{2\,\mathfrak{G}\sin\zeta};$$

Or nous avons déjà trouvé

$$\tang\theta = \frac{\tang\delta\cos(\phi - \omega)}{\cos(\zeta - \alpha)};\ p = \frac{\mathfrak{G}\sin\zeta}{\sin\phi},\ \&\ q = \frac{\gamma\sin\delta}{\sin\theta}.$$

III Opération.

34. Puisque nous venons de déterminer les quantités $p, q, \theta, \&\ \omega$, pour un tems donné t, il ne nous reste qu'à sonder la nature de la ligne courbe même décrite par le globe. Cherchons pour cet effet l'angle ψ. Or

$d\psi$ étant $= \dfrac{\lambda\,dt\sin\phi}{2p} = \dfrac{2\,\mathfrak{G}\,d\phi\sin\zeta}{2p\sin\phi}$, à cause de

$p = \dfrac{\mathfrak{G}\sin\zeta}{\sin\phi}$, nous aurons d'abord $d\psi = d\phi$, & partant

$$\psi = \phi - \zeta.$$

Donc $p\,dt$ étant $= \dfrac{2\,\mathfrak{G}\mathfrak{G}\,d\phi\sin\zeta^2}{\lambda\sin\phi^3}$, il sera

$$dx = \frac{2bb \sin\zeta^2}{\lambda \sin\phi^3} d\phi (\cos\zeta \cos\phi + \sin\zeta \sin\phi), \quad \&$$

$$dy = \frac{2bb \sin\zeta^2}{\lambda \sin\phi^3} d\phi (\cos\zeta \sin\phi - \sin\zeta \cos\phi),$$

lesquelles formules étant intégrées donneront les valeurs suivantes

$$x = \frac{b \sin\zeta^2}{\lambda} \left(2\cos\zeta + \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta^2} - \frac{2\sin\zeta\cos\phi}{\sin\phi} - \frac{\cos\zeta}{\sin\phi^2}\right),$$

$$y = \frac{b \sin\zeta^2}{\lambda} \left(\frac{2\cos\zeta^2}{\sin\zeta} - \frac{1}{\sin\zeta} - \frac{2\cos\zeta\cos\phi}{\sin\phi} + \frac{\sin\zeta}{\sin\phi^2}\right),$$

d'où l'on tirera pour trouver une équation entre x & y,

$$x \sin\zeta + y \cos\zeta = \frac{b \sin\zeta^2}{\lambda} \left(\frac{2\cos\zeta}{\sin\zeta} - \frac{2\cos\phi}{\sin\phi}\right),$$

$$y \sin\zeta - x \cos\zeta = \frac{b \sin\zeta^2}{\lambda} \left(\frac{1}{\sin\phi^2} - \frac{1}{\sin\zeta^2}\right), \text{ \& de là}$$

$$\frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \frac{\cos\zeta}{\sin\zeta} - \frac{\lambda(x\sin\zeta + y\cos\zeta)}{2b\sin\zeta^2},$$

$$\frac{1}{\sin\phi^2} = \frac{1}{\sin\zeta^2} + \frac{\lambda(y\sin\zeta - x\cos\zeta)}{b\sin\zeta^2},$$

Or le quarré de la premiere donnant

$$\frac{\cos\phi^2}{\sin\phi^2} = \frac{\cos\zeta^2}{\sin\zeta^2} - \frac{\lambda\cos\zeta(x\sin\zeta + y\cos\zeta)}{b\sin\zeta^3} + \frac{\lambda\lambda(x\sin\zeta + y\cos\zeta)^2}{4bb\sin\zeta^4},$$

en ôtant donc celle-ci de la seconde, il restera

$$\frac{\lambda y}{b\sin\zeta^3} = \frac{\lambda\lambda(x\sin\zeta + y\cos\zeta)^2}{4bb\sin\zeta^4}, \quad \text{ou}$$

$$(x\sin\zeta + y\cos\zeta)^2 = \frac{4by\sin\zeta}{\lambda},$$

d'où il est clair que la ligne courbe cherchée est une parabole.

Recher-

De la durée de ce mouvement en ligne courbe.

35. Ayant donc trouvé la ſolution du Probleme propoſé, qui mérite d'autant plus une attention particuliere, qu'elle vient de réuſſir heureuſement après tant d'intégrations compliquées, il nous faut encore examiner jusqu'à quand le mouvement du globe ſera conforme aux formules trouvées. Mais, puisqu'il ne ſauroit arriver ici qu'au même inſtant p devienne $= q$, $\omega = 90^\circ$, & $\theta = 0$, il eſt clair qu'un mouvement uniforme, tel que nous l'avons eu dans le probleme précédent, ne ſauroit avoir lieu lorsque l'axe de rotation n'eſt pas horizontal. Or j'ai déjà remarqué au commencement de cette Diſſertation, qu'il y a encore d'autres états de permanence, excepté celui que j'ai conſidéré jusqu'ici, & que le globe peut ſe mouvoir uniformément, quand même l'axe de rotation fait un angle avec l'horizon: ce qui arrivera effectivement lorsque l'angle ω devient droit, & qu'en même tems p ſoit $= q \cos\theta$; car, puisqu'alors au point le plus bas du globe il n'y a point de mouvement, manque de frottement, la cauſe d'une variation ultérieure en ſera détruite. Nos formules demeureront donc conformes au mouvement du globe jusqu'à ce qu'il devienne, & $\omega = 90^\circ$, & $p = q \cos\theta$: lesquelles conditions ſe trouvent auſſi remplies à la fois, car, en poſant $\omega = 90^\circ$, on a

$$-\cot\phi = \operatorname{tang}(\zeta - \alpha) + \frac{aa}{kk}(\cot\phi - \cot\zeta),$$

$$\text{\& de là } \cot\phi = \frac{aa\cot\zeta - kk\operatorname{tang}(\zeta - \alpha)}{aa + kk},$$

Or la condition $p = q\cos\theta$, donne l'équation

$$\frac{\beta\sin\zeta}{\sin\phi} = \frac{\gamma\sin\delta}{\operatorname{tang}\theta} = \frac{\gamma\cos\delta\cos(\zeta - \alpha)}{\sin\phi}, \text{ d'où l'on tire}$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}\delta\sin\phi}{\cos(\zeta - \alpha)},$$

 Mais

Mais, à cause de $\omega = 90°$, tang θ sera trouvé de même $= \frac{\text{tang}\,\delta \sin\phi}{\cos(\zeta - \alpha)}$, & partant il est évident que cette condition $p = q \cos\theta$, renferme déjà en soi celle-ci $\omega = 90°$.

Le mouvement uniforme commencera donc effectivement dès que $\cot\phi$ sera devenu $= \frac{aa \cot\zeta - kk\,\text{tang}(\zeta - \alpha)}{aa + kk}$.

Or, à cause de $\frac{\lambda t}{2\beta \sin\zeta} = \cot\zeta - \cot\phi$,

$\frac{\lambda t}{2\beta \sin\zeta}$ sera alors $= \frac{kk\,(\cot\zeta + \text{tang}\,(\zeta - \alpha))}{aa + kk}$, ou bien

$\frac{\lambda t}{2\beta \sin\zeta} = \frac{kk \cos\alpha}{(aa + kk) \sin\zeta \cos(\zeta - \alpha)}$, & partant

$$t = \frac{2kk\gamma \cos\alpha \cos\delta}{\lambda(aa + kk) \sin\zeta},$$

Or, afin que cette formule trouvée pour le moment dans lequel le mouvement uniforme commence, ne paroisse pas évanouir par la position de $\alpha = 90°$, ou de $\delta = 90°$, ou bien qu'elle ne paroisse pas encore croitre jusqu'à l'infini en posant $\zeta = 0$, substituons-y pour ζ sa valeur, & ce tems t écoulé depuis le commencement jusqu'à l'uniformité du mouvement sera

$$= \frac{2kk}{\lambda(aa + kk)} \sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma \sin\alpha \cos\delta + \gamma\gamma \cos\delta^2)}.$$

Donc, afin que le mouvement devienne uniforme dès le commencement, il faudra que soit & $\alpha = 90°$, & $\beta = \gamma \cos\delta$.

Evo-

Evolution ultérieure des formules trouvées.

56. Puisque nous avons ici réduit tout à l'angle Φ, dont la raison au tems t est déterminée, nous pourrons de même que ci-dessus introduire au lieu du tems t une certaine ligne u qui lui est proportionelle. Qu'on pose donc $u = \frac{\lambda a t}{2\,\text{ϐ}}$, de sorte que soit $t = \frac{2\,\text{ϐ}\, u}{\lambda a}$; & qu'on se serve encore, lorsque les circonstances le feront juger à propos, de cette rélation

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\gamma \cos\alpha \cos\delta}{\beta - \gamma \sin\alpha \cos\delta}, \text{ ou bien de celle-ci}$$

$$\cos(\zeta - \alpha) = \frac{\beta \sin\zeta}{\gamma \cos\delta}: \text{ \& les formules trouvées}$$

pour le mouvement du corps, avant qu'il soit devenu uniforme, seront les suivantes

$$\cot\Phi = \cot\zeta - \frac{u}{a \sin\zeta}, \text{ ou } \operatorname{tang}\Phi = \frac{a \sin\zeta}{a \cos\zeta - u}. \text{ D'où s'ensuit}$$

$$\sin\Phi = \frac{a \sin\zeta}{\sqrt{(aa - 2au\cos\zeta + uu)}}.$$

Ensuite, on aura $\operatorname{tang}(\Phi - \omega) = \operatorname{tang}(\zeta - \alpha) - \frac{au}{kk \sin\zeta}$.

De là on tire:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{kk\gamma \cos\delta\,(a \sin\alpha + u \sin(\zeta - \alpha)) + \beta a u (a \cos\zeta - u)}{kk\gamma \cos\delta\,(a \cos\alpha - u \cos(\zeta - \alpha)) - \beta a a u \sin\zeta}.$$

De plus, l'inclinaison de l'axe de rotation θ sera déterminée de maniere que soit

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{kk\gamma \sin\delta}{\sqrt{(k^4\gamma\gamma \cos\delta^2 - 2\beta a kk\gamma u \cos\delta \sin(\zeta - \alpha) + \beta\beta aauu)}},$$

ou

ou $\sin\theta = \frac{kk\gamma\ \sin\delta}{V(k^4\gamma\gamma - 2\beta akk\gamma u \cos\delta \sin(\zeta - \alpha) + \beta\beta aauu)}$.

De là se fera $p = \beta V(1 - \frac{2u}{a}\cos\zeta + \frac{uu}{aa})$,

$$\& \quad q = V(\gamma\gamma - \frac{2\beta\gamma au}{kk}\cos\delta \sin(\zeta - \alpha) + \frac{\beta\beta aauu}{k^4}).$$

Enfin, pour la ligne courbe décrite on aura

$$x = \frac{bu\,(2a - u\cos\zeta)}{\lambda aa}, \quad \& \ y = \frac{buu\ \sin\zeta}{\lambda aa}.$$

Or ces formules ne dureront pas plus longtems que jusqu'à ce que soit devenu $u = \frac{akk\gamma\ \cos\alpha\ \cos\delta}{\beta(aa + kk)\ \sin\zeta}$, ou bien

$$u = \frac{akk}{\beta(aa+kk)} V(\beta\beta - 2\beta\gamma \sin\alpha \cos\delta + \gamma\gamma\cos\delta^2),$$

après quoi la vitesse progressive du globe sera

$$p = \frac{V(\beta\beta a^4 + 2\beta\gamma\, aakk \sin\alpha \cos\delta + \gamma\gamma k^4 \cos\delta^2)}{aa + kk},$$

auquel la vitesse rotatoire $q\cos\theta$ au point d'attouchement étant égale; le globe continuera de se mouvoir de cette maniere uniformement en ligne droite. Ensuite, l'axe de rotation sera incliné à l'horizon de l'angle ZYN $= \omega$ existant droit, de sorte que soit.

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{\gamma(aa + kk)\ \sin\delta}{V(\beta\beta a^4 + 2\beta\gamma aakk\ \sin\alpha\ \cos\delta + \gamma\gamma k^4\ \cos\delta^2)}.$$

COROLLAIRE I.

37. Le globe rouleroit dès le commencement en ligne droite si ζ étoit $= 0$. Or cela pourra encore arriver d'une double façon excepté

excepté le cas $\gamma = o$ traité ci-dessus: premierement, lorsque l'angle BAF $= \alpha$ est droit; & en second lieu, lorsque l'axe de rotation au commencement du mouvement est vertical, ou que δ est $= 90°$.

COROLLAIRE II.

38. Mais, lorsque $\delta = 90°$, l'angle BAF $= \alpha$ n'entre plus au calcul. Donc, puisqu'il nous sera permis de le prendre à notre volonté, posons $\alpha = 90°$, & nous serons en état de déduire ce cas du précédent. Je vais déveloper ces deux cas dans les paragraphes suivans.

Dévelopement des cas, où au commencement la projection de l'axe de rotation EF est normale à la direction du mouvement AB.

39. α étant donc $= 90°$, après avoir posé l'inclinaison de l'axe de rotation à l'horizon $= \delta$, la vitesse progressive $= \sqrt{b} = \beta$, & celle de rotation en avant & dans l'équateur $= \sqrt{c} = \gamma$, on obtiendra tang $\zeta = o$, & de là

$$\text{ou } \zeta = 0° \quad \text{lorsque } \beta > \gamma \cos\delta,$$
$$\text{ou } \zeta = 180° \quad \text{lorsque } \beta < \gamma \cos\delta.$$

Donc, après un tems écoulé t, en prenant $u = \frac{\lambda a t}{2\beta}$, à cause de XY $= o$, le globe se trouvera au point X. Or, pour déterminer ce lieu, nous aurons à distinguer les cas suivans.

I. Soit $\beta > \gamma \cos\delta$, & partant $\zeta = o$; on aura donc AX $= x = \frac{b u (2a - u)}{\lambda a a}$, & la vitesse progressive en cet endroit sera $p = \frac{\beta (a - u)}{a}$. Ensuite, à cause de $\cos\alpha = o$, $\cos(\zeta - \alpha) = o$, & $\sin\zeta = o$, il se fera $\omega = 90°$, savoir la projection de l'axe de rotation demeurera sans cesse perpendiculaire

 à la

à la droite A B. Or l'axe de rotation ſera incliné à l'horizon ſous l'angle θ:

$$\text{tang}\,\theta \text{ étant } = \frac{kk\gamma \sin\delta}{kk\gamma \cos\theta + \epsilon a u}.$$

De là nous apprennons que cette inclinaiſon diminue continuellement. Enſuite la viteſſe de rotation autour de cet axe ſera dans l'équateur

$$q = \sqrt{\left(\gamma\gamma + \frac{2\epsilon\gamma a u \cos\delta}{kk} + \frac{\epsilon\epsilon a a u u}{k^4}\right)},$$

laquelle augmentera continuellement, jusqu'à ce que le mouvement uniforme commence, ce qui arrivera en faiſant

$$u = \frac{akk\,(\epsilon - \gamma\cos\delta)}{\epsilon\,(aa + kk)}, \text{ ou après un tems écoulé}$$

$$t = \frac{2kk\,(\epsilon - \gamma\cos\delta)}{\lambda\,(aa + kk)}.$$

Or alors la viteſſe progreſſive ſera $p = \dfrac{\epsilon aa + \gamma kk \cos\delta}{aa + kk}$,

& $\text{tang}\,\theta = \dfrac{\gamma\,(aa + kk)\sin\delta}{\epsilon aa + \gamma kk \cos\delta}$.

C'eſt ici qu'il faut rapporter le cas, où le globe ait au commencement reçu un mouvement de rotation en arriere; on ſatisfera à ce cas en prenant γ négatif. Or, poſant $-\gamma$, au lieu de γ, les quantités p & x, ne ſe changeront pas, & alors on aura

$$\text{tang}\,\theta = \frac{kk\gamma \sin\delta}{kk\gamma\cos\delta - \epsilon a u}, \quad \& \quad q = -\gamma + \frac{\epsilon a u}{kk}.$$

Enſuite le mouvement uniforme commencera en prenant

$$u = \frac{akk\,(\epsilon + \gamma\cos\delta)}{\epsilon\,(aa + kk)}, \text{ ou } t = \frac{2kk\,(\epsilon + \gamma\cos\delta)}{\lambda\,(aa + kk)},$$

alors

alors la vitesse progressive sera $= \frac{\beta aa - \gamma kk \cos\delta}{aa + kk}$, & la tangente de l'inclinaison de l'axe à l'horizon sera $= \frac{\gamma(aa + kk)\sin\delta}{\gamma kk \cos\delta - \beta aa}$.

Il peut arriver en ce cas que le globe recule, savoir lorsque $\gamma kk \cos\delta$ est $> \beta aa$; où en même tems l'axe de rotation sera incliné de l'autre part. Or, si $\gamma \cos\delta = \frac{\beta aa}{kk}$, le globe seroit réduit en repos, & l'axe de rotation deviendroit en même tems vertical.

II. Lorsque $\beta < \gamma \cos\delta$; ζ sera $= 180°$, & après un tems écoulé t, en posant $u = \frac{\lambda at}{2\beta}$, le globe sera en X; AX $= x$, étant $= \frac{bu(2a+u)}{\lambda aa}$, & là la vitesse progressive p sera $= \frac{\beta(a+u)}{a}$: Ensuite, il se fera comme ci-dessus $\omega = 90°$, de sorte que la projection de l'axe demeure perpendiculaire à AB: or, pour l'inclinaison de l'axe à horizon, on aura tang $\theta = \frac{kk\gamma \sin\delta}{kk\gamma \cos\delta - \beta aa}$, qui donc augmentera continuellement, & l'axe deviendra même vertical en prenant $u = \frac{\gamma kk \cos\delta}{\beta a}$, & puis l'angle θ surpassera $90°$.

Or la vitesse de rotation dans l'équateur sera

$$q = \sqrt{(\gamma\gamma - \frac{2\beta\gamma au \cos\delta}{kk} + \frac{\beta\beta aauu}{k^4})},$$

qui donc sera la plus petite lorsque u est $= \frac{\gamma kk \cos\delta}{\beta a}$, & alors q sera $= \gamma \sin\delta$, après lequel tems q augmentera de nouveau.

Mais le mouvement uniforme commencera après un tems écoulé $t = \frac{2kk(\gamma\cos\delta - \beta)}{\lambda(aa + kk)}$, de sorte que soit $u = \frac{akk(\gamma\cos\delta - \beta)}{\beta(aa + kk)}$;

alors

alors la viteſſe progreſſive p deviendra $= \frac{\beta a u + \gamma k k \cos \delta}{a a + k k}$, & tang θ ſera $= \frac{\gamma\,(aa + kk) \sin \delta}{\beta a a + \gamma k k \cos \delta}$. Où il faut remarquer que cette valeur de u eſt plus petite que l'autre $\frac{\gamma k k \cos \delta}{\beta a}$, qui produiroit la plus petite viteſſe rotatoire, βa, & que partant ce cas du plus petit ne ſauroit avoir lieu.

C'eſt ici qu'il nous faudra conſidérer en particulier le cas où la viteſſe progreſſive β évanouit; car alors, à cauſe de $\beta u = \frac{1}{2} \lambda a t$, la quantité u deviendra infinie; & partant il ſera néceſſaire d'introduire à ſa place le tems même t.

Donc, après un tems écoulé t, à cauſe de $b = \beta \beta$, le globe ſera en X; $AX = x$ étant $= \frac{1}{4} \lambda t t$; où la viteſſe progreſſive ſera $p = \frac{1}{2} \lambda t$: de ſorte que ce mouvement ſoit uniformement accéléré, & même il ſera toujours également vite, quel que ſoit le mouvement de rotation qu'on ait imprimé au globe, pourvu que α ſoit $= 90°$.

Or alors ſera trouvé tang $\theta = \frac{k k \gamma \sin \delta}{k k \gamma \cos \delta - \frac{1}{2} \lambda a a t}$, & la viteſſe de rotation dans l'équateur ſera

$$q = \sqrt{\left(\gamma\gamma - \frac{\lambda \gamma a a t \cos \delta}{k k} + \frac{\lambda \lambda a^4 t t}{4 k^4}\right)}.$$

Mais le mouvement devient uniforme après un tems écoulé $t = \frac{2 k k \gamma \cos \delta}{\lambda\,(aa + kk)}$: lequel tems eſt égal au tems d'une chute libre d'un corps par une hauteur, de laquelle il auroit acquis la viteſſe $\frac{k k \gamma \cos \delta}{\lambda\,(aa + kk)}$:

Or

Or alors sera la vitesse progressive $= \frac{\gamma kk \cos\delta}{aa + kk}$, &

$$\tang \theta = \left(1 + \frac{aa}{kk}\right) \tang \delta.$$

Soit $kk = \frac{2}{5} aa$, comme cela arrive dans les globes homogenes, & on aura la vitesse progressive $= \frac{2}{7} \gamma \cos\delta$, & $\tang \theta = \frac{7}{2} \tang \delta$.

Dévelopement du cas où au commencement l'axe de rotation fut vertical.

40. Comme δ est $= 90°$: $\cos\delta$ sera $= 0$, & partant ce cas doit être déduit de la premiere partie du cas précédent. Donc ici, après un tems ecoulé t, posant $u = \frac{\lambda a t}{\mathfrak{E}}$, le globe se trouvera en X, de sorte que soit $AX = x = \frac{bu(2a - u)}{\lambda aa}$, & là la vitesse progressive sera $p = \mathfrak{E}\left(1 - \frac{u}{a}\right) = \mathfrak{E} - \lambda t$. Ensuite, on aura pour la position de l'axe constamment $\omega = 0$, & $\tang \theta = \frac{\gamma kk}{\mathfrak{E} a u} = \frac{\gamma kk}{\lambda aat}$, & partant l'angle θ qui au commencement fut droit, décroitra continuellement, & la vitesse dans l'équateur sera

$$q = \sqrt{\left(\gamma\gamma + \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{E} aauu}{k^4}\right)} = \sqrt{\left(\gamma\gamma + \frac{\lambda\lambda a^4 tt}{k^4}\right)}.$$

Or le globe acquerra un mouvement uniforme après un tems écoulé $t = \frac{2\mathfrak{E}kk}{\lambda(aa + kk)}$, & alors la vitesse progressive sera $p = \frac{\mathfrak{E}aa}{aa + kk}$, & $\tang \theta$ sera $= \frac{\gamma(aa + kk)}{\mathfrak{E}aa}$.

 Soit

Soit $kk = \frac{2}{5} aa$, & ce mouvement uniforme commencera après le tems $t = \frac{4\beta}{7\lambda}$. En attendant un corps pesant en tombant librement acquerra une vitesse $= \frac{2\beta}{7\lambda}$, & tang θ sera $= \frac{7\gamma}{5\beta}$.

41. Dans tous les autres cas, auxquels ni $\beta = 0$, ni $\alpha = 90°$, ni $\delta = 90°$, le globe ne roulera point en ligne droite, mais en ligne courbe, dont le mouvement sera déterminé par les formules données au §. 36. de cette maniere.

Solution générale du Probleme proposé.

42. Lorsqu'on imprime au globe étant en A une vitesse progressive $= \sqrt{b} = \beta$, dans la direction AB, & qu'on lui imprime en même tems un mouvement de rotation dirigé en avant dont la vitesse soit dans l'équateur $= \sqrt{c} = \gamma$, & qui se fait autour d'un axe incliné à l'horizon; que cet axe étant prolongé rencontre le plan horizontal en F, de sorte que soit BAF $= \alpha$, & l'inclinaison de l'axe à l'horizon $= \delta$, où tang $\delta = \frac{a}{AF}$; a dénotant ici le rayon du globe.

Qu'on cherche de là l'angle ζ, de maniere que soit tang $\zeta = \frac{\gamma \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \delta}{\beta - \gamma \operatorname{sin} \alpha \operatorname{cos} \delta}$, & posant la pesanteur du globe $= M$, la force du frottement $= \lambda M$, le moment d'inertie du globe $= Mkk$, son mouvement se déterminera de la maniere suivante: où il faudra encore remarquer que lorsque le globe consiste d'une matiere homogene, kk est $= \frac{2}{5} aa$, & qu'on puisse pour la plûpart prendre $\lambda = \frac{1}{3}$.

I. Soit t le tems écoulé depuis le commencement, qu'on prenne une ligne u proportionelle à ce tems, & qu'on pose $u = \frac{\lambda a t}{2\beta}$; t ex-

pri-

primera donc encore le tems dans lequel un corps grave tombant librement acquiert une viteſſe $= \frac{\beta u}{\lambda a}$. Ou bien, en poſant le tems écoulé $t = \Theta$ ſecondes, & la viteſſe acquiſe par la chute d'une ſeconde $= \sqrt{g}$; la lettre g dénotant la hauteur de la chute, de même que b & c ſignifient les hauteurs dues aux viteſſes β & γ, on aura $u = \lambda \Theta a \sqrt{\frac{g}{b}}$. Or il eſt connu qu'un corps parcourt avec la viteſſe $\sqrt{g}$ toutes les ſecondes un eſpace des $31\frac{1}{4}$ pieds du Rhin; il faudra donc auſſi ſubſtituer ce nombre à la place de $\sqrt{g}$, lorsqu'on exprime également les viteſſes $\beta = \sqrt{b}$, & $\gamma = \sqrt{c}$, par des eſpaces parcourus dans une ſeconde, & meſurés avec le pied du rhin.

II. Or, le tems t ou de Θ ſecondes étant écoulé, le globe touchera le plan horizontal dans le point Y, de ſorte que ſoit, après en avoir tiré ſur AB la perpendiculaire YX,

$$AX = x = \frac{bu\,(2a - u\,\mathrm{cos}\,\zeta)}{\lambda aa}, \quad \& \; XY = y = \frac{buu\,\mathrm{sin}\,\zeta}{\lambda aa},$$

où b eſt la hauteur, par laquelle un corps tombant acquiert la viteſſe β, & qui, lorsqu'on l'exprime par le nombre des pieds parcouru dans une ſeconde, ſera $= \frac{2}{125}\,\beta\beta$ pieds.

III. Enſuite, dans cet endroit Y, la viteſſe progreſſive ſera $p = \beta \sqrt{(1 - \frac{2u}{a}\,\mathrm{cos}\,\zeta + \frac{uu}{aa})}$, dont la direction eſt Yy, qui prolongée ſera avec AB un angle dont la tangente ſera $= \frac{u\,\mathrm{sin}\,\zeta}{a - u\,\mathrm{cos}\,\zeta}$ $=$ tang. BTY, & la viteſſe rotatoire dans l'équateur pour ce même endroit ſera

$q =$

$$q = \sqrt{(\gamma\gamma - \frac{2\beta\gamma au}{kk}\cos\delta\sin(\zeta-\alpha) + \frac{\beta\beta aauu}{k^4})},$$

& cette viteſſe ſera dirigée en avant.

IV. J'entends ici par équateur, le grand cercle ſur la ſurface du globe qui eſt perpendiculaire à l'axe de rotation. Que cet axe prolongé rencontre le plan horizontal en N, & que ſon inclinaiſon à l'horizon ſoit θ, de ſorte que ſoit

$$\tang\theta = \frac{\gamma\, kk \sin\delta}{\sqrt{(\gamma\gamma k^4 \cos\delta^2 - 2\beta\gamma akku\cos\delta\sin(\zeta-\alpha) + \beta aauu)}}.$$

V. Or, tirant la droite YN, celle-ci fera avec la direction Yy un angle y YN $=\omega$, de maniere que ſoit

$$\tang\omega = \frac{\gamma kk\cos\delta\,(a\sin\alpha + u\sin(\zeta-\alpha)) + \beta au\,(a\cos\zeta - u)}{\gamma kk\cos\delta\,(a\cos\alpha - u\cos(\zeta-\alpha)) - \beta aau\sin\zeta},$$

$$\text{ou } \tang(\omega-\alpha) = \frac{\gamma kku\cos\delta\sin\zeta + \beta au\,(a\cos(\zeta-\alpha) - u\cos\alpha)}{\gamma kk\cos\delta\,(a - u\cos\zeta) - \beta au\,(a\sin(\zeta-\alpha) + u\sin\alpha)},$$

Mais cette ligne YN fera encore avec AB, un angle dont la tangente ſera $= \frac{\gamma kk\sin\alpha\cos\delta + \beta au\cos\zeta}{\gamma kk\cos\alpha\cos\delta - \beta au\sin\zeta}$.

VI. Or ce mouvement curviligne ne durera pas plus longtems que jusqu'à ce que ſoit fait

$$u = \frac{\gamma akk\cos\alpha\cos\delta}{\beta\,(aa+kk)\sin\zeta}, \text{ ou}$$

$$u = \frac{akk}{\beta(aa+kk)}\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\gamma\sin\alpha\cos\delta + \gamma\gamma\cos\delta^2)},$$

après

après lequel tems écoulé sera la vitesse progressive

$$= \frac{\sqrt{(\beta\beta a^4 + 2\beta\gamma aakk \sin\alpha \cos\delta + \gamma\gamma k^4 \cos\delta^2)}}{aa + kk},$$

& alors l'angle ZYN deviendra droit, & l'axe de rotation sera incliné à l'horizon d'un angle dont la tangente est $=$

$$\frac{\gamma\,(aa + kk)\sin\delta}{\sqrt{(\beta\beta a^4 + 2\beta\gamma aakk \sin\alpha \cos\delta + \gamma\gamma k^4 \cos\delta^2)}}.$$

Enfin, la vitesse de rotation q dans l'équateur sera telle qu'il soit $q \cos\theta = p$; & comme il n'y aura plus de frottement, le globe continuera de rouler uniformement en ligne droite.



DÉMONSTRATION DU THEOREME DE HARRIOT,

AVEC UNE

METHODE DE CHERCHER,

SI UNE E'QUATION ALGE'BRIQUE A TOUTES LES RACINES POSSIBLES, OU NON?

PAR M. AEPINUS.

Traduit du Latin.

Planche VIII. L'Epoque principale des accroissemens que l'Algébre a reçu dans le siecle passé, peut être à bon droit assignée au tems où, soit *Descartes*, soit *Harriot*, ou qui que ç'ait été, (car les Ecrivains varient sur cet Inventeur,) ont trouvé que chaque équation algébrique peut être résolue en des facteurs simples qui contiennent les racines de l'équation, laquelle doit être considérée comme le produit de tous ces facteurs. En effet, cette proposition a ouvert un vaste champ pour découvrir sans effort plusieurs propriétés insignes des équations; aussi ceux qui s'appliquoient alors à cultiver l'analyse, n'ont-ils pas négligé la belle occasion qui leur étoit offerte. Cependant la plûpart des choses qu'ils ont tirées de ce principe par rapport à la nature des équations, en ont plutôt été déduites par une simple induction, que par voye de démonstration. Dans la suite, on n'a pas eu de peine à appuyer un grand nombre de ces Propositions sur des démonstrations assez rigoureuses; mais il en reste encore quelques unes qui ont donné bien de la peine aux plus grands Mathématiciens, lorsqu'ils ont voulu en trouver les démonstrations; & ils y ont souvent travaillé sans succès.

Il

Il faut ranger dans cette claſſe le Theorème, où, par la ſérie des ſignes dont les termes d'une équation ſont affectés, on détermine le nombre des racines poſitives & négatives de cette équation. C'eſt celui qu'on appelle communément *le Théorème d'Harriot*. Je vais fournir ici après d'autres ſa démonſtration, dont je n'ai autre choſe à dire, ſinon que je crois qu'elle n'eſt pas indigne d'attention. Les cinq premieres propoſitions de mon Mémoire comprennent cette démonſtration; mais, comme les principes ſur leſquels elle eſt fondée, m'ont conduit comme par la main à une méthode de chercher, ſi toutes les racines d'une équation propoſée ſont poſſibles, ou non; différente, autant que je puis le ſçavoir, de toutes les méthodes connues jusqu'à préſent, j'ai crû qu'il n'étoit pas hors de propos d'ajoûter encore quelques autres propoſitions qui ſervent à expliquer cette méthode.

PROPOSITION I.

Si la courbe ABCDEF eſt définie par l'équation algébrique Fig. 3.

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - - - - - + F = y$$

en prenant x pour l'abſciſſe, y pour l'appliquée, & que toutes les racines de l'équation ſoyent réelles, ſans qu'aucunes ſe trouvent égales,

1. cette courbe concourt avec le diametre m fois.

2. le diametre en eſt coupé autant de fois, de façon qu'à chaque interſection les y paſſent au côté oppoſé, c'eſt à dire, de poſitifs deviennent négatifs, ou de négatifs poſitifs,

3. les x étant poſitifs, les y deviennent enfin auſſi poſitifs, ſoit que m ſoit pair ou impair; mais les x étant négatifs, les y deviennent enfin poſitifs, lorsque m eſt *pair*, mais négatifs lorsqu'il eſt impair.

4. ſi les y commencent à décroitre, il ne ſe fait jamais de croiſſans des décroiſſans, à moins que la courbe n'ait auparavant coupé le diamètre.

5. entre deux interſections quelconques de la courbe avec le diametre, tombe un plus grand y, mais ſeulement unique, & les plus grands y ſont alternativement poſitifs & négatifs.

DÉMONSTRATION.

1. En effet, toutes les fois que x devient racine de l'équation, tout autant de fois y devient $= 0$; mais, ſi x paſſe par toutes les valeurs poſſibles, il devient m diverſes fois racine (par l'hypotheſe.) Donc la courbe m concourt avec le diamètre m fois, d'où

2. elle touche, ou coupe le diamètre. Or ce n'eſt pas le premier. Car, qu'elle touche le diamètre en H, & qu'on mene NS parallele au diamètre dans la diſtance $MH = G$, & la courbe coupera la ligne NS, $m + 1$ fois; car le contact venant à ceſſer, il nait à ſa place deux interſections. Mais, en poſant $MH = G = WT$, & $VT = Z$, on aura $WV = Y = Z + G$, d'où la courbe rapportée à la droite NS ſeroit définie par l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} - - - - - \begin{matrix} + F \\ - G \end{matrix} = Z$$

c'eſt pourquoi cette équation de m dimenſions auroit $m + 1$ racines, ce qui ſeroit abſurde. La courbe coupe donc le diametre à chaque concours, & les y paſſent à chaque interſection au côté oppoſé.

3. En poſant $x = \infty$, tous les termes, outre le premier, évanouïſſent, d'où $x^m = y$, laquelle valeur eſt poſitive, ſi x eſt poſitif; mais, ſi x eſt négatif, & m pair, cette valeur eſt pareillement poſitive, au lieu qu'elle devient négative, lorſque m eſt un nombre impair.

Fig. 2. 4. En effet, que les y décroiſſent en QP, & que de là ils deviennent de nouveau croiſſans; qu'on mene GH parallele au diametre CD, dans la diſtance $PR > PQ$; & cette droite ſera coupée par la courbe $m + 2$ fois. Soit $PR = VT = G$, $VW = Z$, $G = Z$ ſera

sera y; d'où la courbe rapportée au diametre GH est définie par l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} - - - - - \begin{matrix} + F \\ - G \end{matrix} = Z$$

Or alors l'équation de m dimensions auroit $m + 2$ racines; ce qui est absurde.

5. Car dans l'une & l'autre intersection les y deviennent $= 0$, d'où s'ensuit qu'ils doivent croître depuis 0, & ensuite décroître de nouveau jusqu'à 0: ce qui fait qu'entre deux intersections prochaines quelconques tombe nécessairement le plus grand y, mais seulement unique; car, s'il y en avoit plusieurs, les y de décroissants deviendroient croissants, sans intersection préalable: ce qui est contraire au N°. 4. Mais comme les y à chaque intersection passent au côté opposé (n. 2.) la méme chose doit arriver aussi dans les plus grands y, qui tombent entre deux intersections prochaines quelconques.

COROLLAIRE I.

On peut former les fluxionales d'une semblable équation jusqu'à l'ordre m^{eme}, en prenant dx pour constante.

En effet soit

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - - - - - = y$, on aura la fluxionale

1. $mx^{m-1}dx + (m - 1)Ax^{m-2}dx - - -$

2. $m(m-1)x^{m-2}dx^2 + (m-1)(m-2)Ax^{m-3}dx^2 - - -$

& en général

r^{eme}. $m(m-1) \ldots (m-r)+1x^{m-r}dx^r + (m-1) \ldots (m-r)Ax^{m-r-1}dx^r \ldots$

Que si dans cette formule on substitue pour r un nombre quelconque entier, plus grand que m, tous les termes évanouissent; ce qui

 n'arri-

n'arrive pas, tant que r n'eſt pas plus grand que m, d'où toutes les fluxionales au delà de l'ordre m deviennent $= 0$.

COROLLAIRE II.

Si l'on conçoit que la fluxionale de l'ordre r ſoit diviſée par la conſtante dx^r, ſa valeur ſera proportionelle au différentiel de y du même degré r; d'où, ſi l'on ſuppoſe que des courbes ſoyent conſtruites, dont les appliquées ſont définies par ces équations, leurs y appliquées feront comme les fluxions de y de tous les dégrés. Or tout ce qui a été démontré dans la propoſition convient à ces courbes, que j'appellerai fluxionales. J'indiquerai à l'avenir leurs appliquées par $1F$, $2F$ — — — nF. J'ai tracé un ſyſteme de ſemblables courbes, qui appartiennent à l'équation du cinquieme degré dans la Figure III. où je ſuppoſe que l'on compte les abſciſſes depuis le point auquel la droite GH rencontre chaque diametre, en prenant les abſciſſes poſitives vers la gauche, & les négatives vers la droite. Cette Figure pourra fournir des exemples particuliers des choſes que je démontrerai dans la ſuite d'une maniere univerſelle.

COROLLAIRE III.

Le dernier terme de la fluxionale r^{me} eſt $= r.(r-1)-.-.-.1 \times + \phi$, en entendant par ϕ le coëfficient du terme de l'équation primitive de l'ordre $m + r - 1$. En effet, le terme f^{me} de la fluxionale de l'ordre r eſt $=$

$$(m-f-1)(m-f) - - - - (m-r-f+2) \times + \phi x^{m-r-f+1}.$$

ϕ indiquant le coëfficient du terme $f$eme de l'équation primitive, ce qui réſulte de l'induction, & peut être facilement démontré. Mais le dernier terme de la fluxionale de l'ordre r eſt celui dans lequel l'expoſant de x eſt $= 0$, d'où, ſi le $f$me doit être le dernier, $m - r - f + 1$ ſera $= 0$, ou bien $f = m - r + 1$, laquelle valeur de f, étant ſubſtituée dans la formule générale, on parvient à la valeur du dernier terme.

COROL-

COROLLAIRE IV.

Au même x, où tombe dans la premiere fluxionale une interſection, tombe le plus grand y, & de la même maniere au même x où dans la fluxionale de l'ordre $(n + 1)$ tombe une interſection, là tombe dans celle de l'ordre n le plus grand nF. Car là où la fluxionale 1e. ou $(n + 1)^{me}$ coupe le diametre, 1F ou $(n + 1)$F prenant la valeur contraire, d'où les y, ou nF, commencent de nouveau à décroître, & par conſéquent ſont les plus grands.

PROPOSITION II.

Si de l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} - - - - - + F = y.$$

on prend tous les F tombants en $x = 0$, dans la ſérie de ces F mêmes, il y aura autant d'échanges de ſignes, & autant de ſucceſſions, qu'il s'en trouve dans l'équation même.

DÉMONSTRATION.

En effet, en concevant $x = 0$, dans la fluxionale de l'ordre r (Cor. II. Prop. I.) tous les termes évanouïſſent outre le dernier, dans lequel x ne ſe trouve pas. Or ce dernier terme eſt (Cor. III. Prop. I.) $= (r . r - 1 - - - - 1) . x + \phi$. Comme donc $(r . r - 1 - - - - 1)$ eſt un nombre poſitif, cet rF obtiendra le même ſigne de ϕ, c'eſt à dire, celui du coëfficient du terme $(m - r + 1)$; d'où il eſt néceſſaire que la ſuite des ſignes des F tombants en $x = 0$, ſoit la même que celle des ſignes de l'équation.

PROPOSITION III.

La fluxionale n^{me} coupe le diametre pour le moins autant de fois, aux abſciſſes tant poſitives que négatives, que celle de l'ordre ſuivant $n + 1$.

DÉMON-

DÉMONSTRATION.

Que la fluxionale $(n + 1)^{me}$ coupe le diametre r fois.

1. aux x positifs; & comme, à chaque interſection de celle-ci, il tombe un *maximum* dans celle de l'ordre n, le nombre de ces *maximum* ſera $= r$, aux abſciſſes poſitives. Or, entre deux plus grands quelconques, tombe une interſection; ainſi les interſections qui tombe entre les plus grands nF, ſont au nombre de $r - 1$. Mais comme les nF aux abſciſſes poſitives deviennent enfin poſitifs croiſſant à l'infini, (Prop. I.) le dernier *maximum* de ces côtés-là eſt négatif; d'où réſulte que ce *maximum* eſt encore ſuivi d'une interſection, qui ne tombant point entre deux *maxima*, n'eſt pas contenue parmi celles dont on a fait ci-devant l'enumération; & ainſi il y a au moins r interſections dans la fluxionale n aux poſitifs.

2. La démonſtration eſt la même, ſi l'on prend les interſections, qui ſe font aux x négatifs.

PROPOSITION IV.

Si les ſignes des nF & $(n + 1)$ F, qui tombent aux $x = 0$ changent, il y aura dans la fluxionale n des interſections $r + 1$, aux abſciſſes poſitives. Mais, ſi les ſignes ſe ſuccedent, il n'y a pas plus d'interſections que r. Le contraire a lieu aux abſciſſes négatives.

DÉMONSTRATION.

En effet, quand les ſignes ſont changés, les $(n + 1)$F, ont une valeur oppoſée à nF, d'où les nF ſont décroiſſans; de la vient qu'aux x poſitifs la fluxionale n coupe enfin le diametre. Mais cette interſection tombe avant le premier *maximum* nF. Car ſoit le contraire, & l'interſection de n^{me} ne tombera pas avant l'interſection la plus proche de $(n + 1)^{me}$. Or, dans l'interſection de $n + 1$, les $(n + 1)$ F deviennent homogenes aux nF; d'où les nF devien-

droient

droient de nouveau croissants de décroissants sans l'interfection préalable, (ce qui est contre la Propos. I.) Cette interfection tombe donc avant le premier *maximum* nF. Et comme elle n'est pas contenue parmi celles qui ont été rapportées dans la proposition précédente, il y aura en tout (r + 1) interfections dans la fluxionale de l'ordre n.

Au contraire, si les signes se succedent, les nF croissent jusqu'à la premiere interfection de (n + 1), c'est à dire jusqu'au premier *maximum* nF, d'où s'ensuit qu'il ne tombe aucune interfection avant le premier *maximum* nF, mais qu'elles sont toutes contenues sous celles qui ont été précédemment indiquées.

La démonstration vers les abscisses négatives se fait de la même maniere, moyennant les changemens convenables.

PROPOSITION V.

S'il est vrai qu'il y ait dans la fluxionale (n + 1) autant d'interfections aux x positifs, qu'il y a d'échanges de signes dans la série des F mêmes, pris aux $x = 0$, qui suivent (n + 1) F, cela est pareillement vrai dans la fluxionale n. Et s'il est encore vrai dans la fluxionale (n + 1) qu'il y ait autant d'interfections aux x négatifs qu'il y a de successions de signes dans la série des F mêmes aux $x = 0$ qui suivent (n + 1) F, cela sera vrai dans celle de l'ordre n.

DÉMONSTRATION.

En effet que cela soit vrai dans la (n + 1)^{me}, &

1. nF & (n + 1) F, pris aux $x = 0$, soyent hétérogenes à la série des signes des F mêmes, qui suivent (n + 1) F, est

joint un changement de signes, qui deviennent $r + 1$. Mais, dans ce cas aussi, le nombre des intersections dans la fluxionale n devient $r + 1$. (par la Propos. précéd.) Au contraire, si

2. nF & $(n + 1)$ F sont homogenes, & alors il n'y a point de changement de signes dans la série des F, ni de nouvelle intersection jointe au nombre des intersections qui se trouvent dans la fluxionale n, d'où s'ensuit que de part & d'autre demeurent les r intersections.

La démonstration du second membre s'exécute de la même maniere.

COROLLAIRE I.

Si dans la fluxionale $(m - 1)$me, qui coupe le diametre une seule fois, on prend un point duquel les abscisses soient comptées, de façon que $(m - 1)$ F pris aux $x = 0$ soit positif, il ne tombe point d'intersection aux x positifs; le contraire arrivant, si $(m - 1)$ F aux $x = 0$ est négatif. De là vient qu'il est vrai dans la fluxionale $(m - 1)$, qu'il y a autant d'intersections aux x positifs, qu'il existe d'échanges dans la série des F, qui suivent nF, les mF étant toujours positifs. La même chose a donc lieu dans la fluxionale $(m - 2)$, $(m - 3)$ &c.

COROLLAIRE II.

En comparant ces positions, la vérité du Théoreme de *Harriot* se manifeste d'elle-même.

PROPOSITION VI.

Oter un terme quelconque d'une équation.

SOLU-

SOLUTION.

Cela se fait, comme on le sçait par les élémens, en augmentant ou diminuant les racines de l'équation. Soit donc l'équation donnée

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - - - -$$

En substituant au lieu de x, $y + z$, on aura

$$x^m = y^m + \frac{m}{1} Ay^{m-1} z^n + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2} y^{m-2} z^2 - - -$$

$$+ Ax^{m-1} = + Ay^{m-1} + \frac{m-1}{1} Ay^{m-2} z - - -$$

$$+ Bx^{m-2} = \qquad + By^{m-2} - - -$$

Ainsi le coëfficient de chaque puissance de y sera de

$$m) = 1$$

$$m - 1) = \frac{m}{1} z + A$$

$$m - 2) = \frac{m.\overline{m-1}}{1.2} z^2 + \frac{m-1}{1} Az + B.$$

& en général le coëfficient de la puissance y^{m-n}, c'est à dire, du $(n+1)^{me}$ terme sera

$$\frac{m.\overline{m-1}\ldots\ldots\overline{m-n+1}}{1.2\ldots\ldots n} z^n + \frac{\overline{m-1}\ldots\ldots\overline{m-n+1}}{1\ldots\ldots(n-1)} Az^{n-1} + \&c.$$

Donc, si l'on veut ôter de l'équation le terme $(n+1)^{me}$, on n'a qu'à substituer pour z une des racines de cette expression, égalé à zero, d'où le coëfficient de ce terme devient $= 0$.

PROPOSITION VII.

Si d'une équation quelconque le terme $(n+1)$ manque, je dis que $(m-n)$ F, pris aux $x=0$, sera pareillement $=0$, c'est à dire que $x=0$ est la racine de la fluxionale $(m-n)^{me}$.

DÉMONSTRATION.

En effet $(m-n)$ F aux $x=0$, est

$$(n+1.\ n.\ n-1\ -\ -\ -\ -\ 1)\ \times\ +\ \phi$$

mais le terme $(n+1)$ manquant, son coëfficient ϕ devient $=0$, d'où aussi $(m-n)$ F $=0$.

PROPOSITION VIII.

Si l'on prend $(n-1)$ F & $(n+1)$ F, tombants au même x avec la derniere intersection de la fluxionale n, vers les x positifs, $(n-1)$ F & $(n+1)$ F seront hétérogenes, si toutes les racines de l'équation sont réelles.

DÉMONSTRATION.

Au même x, qui convient à la derniere intersection de l'n^{me}, tombant le dernier *maximum* de l'$(n-1)^{me}$, qui est négatif, si toutes les racines sont réelles (par la Prop. I.) mais $(n+1)$ F tombant à cet x, est positif. Car la derniere intersection de n tombe après le plus grand *maximum* nF: donc, après la derniere intersection de $(n+1)$, par laquelle les $(n+1)$ F deviennent positifs, (Prop. I.) d'où $(n+1)$ F est nécessairement positif.

PRO-

PROPOSITION IX.

Si la proposition précédente est véritable dans le cas démontré, je dis qu'elle est vraye aussi de tous les $(n - 1)$ F & $(n + 1)$ F, qui tombent au même x, avec une intersection quelconque de l'n^{me}.

DÉMONSTRATION.

En effet, si cette Proposition est vraye pour un x quelconque, auquel tombe l'intersection de l'n^{me}, je dis qu'elle le sera de même pour tout x immédiatement suivant, auquel la fluxionale n^{me} coupe le diametre. Car au même x, avec l'intersection la plus prochaine de l'n^{me}, tombe le *maximum* de l'$(n - 1)^{me}$ qui suit immédiatement. Or entre deux *maxima* quelconques tombe l'intersection, d'où s'ensuit que les $(n - 1)$ F passent à l'opposite. Mais les $(n + 1)$ Fy passent pareillement. Car, entre deux intersections de n tombe le plus grand nF, & au même x, avec le plus grand nF, la fluxionale $(n + 1)$ coupe le diametre. Donc les $(n + 1)$ F passent du côté opposé. Ainsi $(n - 1)$ F & $(n + 1)$ F passant ainsi à l'opposite, il est manifeste que, s'ils ont été auparavant hétérogenes, ils le demeureront encore. Or cette proposition a lieu par rapport aux derniers $(n + 1)$ F; donc elle est applicable à tous. (Prop. VIII.)

COROLLAIRE.

Si donc de tels $(n - 1)$ F & $(n + 1)$ F deviennent homogenes, toutes les racines de l'équation ne seront pas réelles.

PROPOSITION X.

Si d'une équation quelconque on ôte un terme, & que les termes qui touchoient de part & d'autre celui qu'on a ôté, deviennent homogenes, ce sera un indice de racines impossibles.

DÉMONSTRATION.

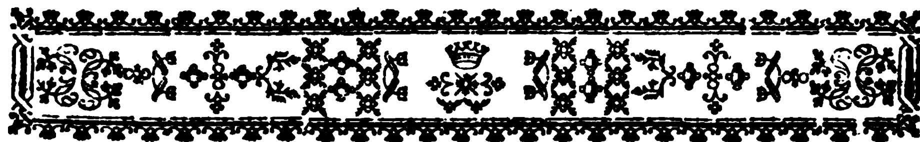
En effet, la série des signes de l'équation est la même que la série des signes des F mêmes, pris aux $x = 0$. (Prop. II.) Si donc, en ôtant un terme, les termes placés de côté & d'autre sont homogenes, dans la série des F mêmes, les F placés de côté & d'autre du terme $(m - n)$ F qui manque (Prop. VII.) seront aussi homogenes; d'où il s'ensuit nécessairement que quelques unes des racines sont impossibles.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.





MÉMOIRE,

SUR

LA DÉCOUVERTE DES LOIX D'UN CHIFRE DE FEU M. LE PROFESSEUR HERMAN,

PROPOSÉ COMME ABSOLUMENT INDÉCHIFRABLE.

PAR M. BEGUELIN.

I.

Je ne sai si le sujet de ce Mémoire seroit digne de l'Académie à laquelle j'ai l'honneur d'en rendre compte, n'étoit que le chifre dont il s'agit contient un défi formel, non seulement à tous les Mathématiciens de l'Europe, mais encore à toutes les Sociétés des Sciences; & qu'en effet il est resté indéchifrable des années entieres.

Ce chifre m'aiant été communiqué vers la fin de Mai passé, par l'un des premiers Géometres de l'Europe, je m'en chargeai, plus par curiosité, que dans l'espérance d'y déterrer une clé, que des calculateurs incomparablement plus habiles que moi s'étoient rebutés d'y chercher. Aussi ma surprise fut-elle extreme, quand, dès le troisieme jour, je vis que cette clé étoit en mon pouvoir, & qu'il ne faloit plus qu'un peu de loisir pour la dégager tout à fait des difficultés qui restoient à résoudre. J'y réussis assez bien pour pouvoir rendre le chifre & sa clé huit jours après qu'il m'eût été confié.

II. S'il y a quelque chose d'intéressant dans cette découverte, c'est moins la connoissance du chifre en lui-même, qui ne fait que l'objet

jet d'une ſimple curioſité, que la maniere d'y parvenir. C'eſt la marche de l'eſprit dans ces ſortes de recherches, qui, (comme l'a déjà obſervé M. sGraveſande dans ſa Métaphyſique, à l'occaſion d'un chifre moins compliqué,) peut être d'une influence réelle dans les Sciences, & manifeſter l'uſage, & la juſte application, des premiers principes de la Métaphyſique. Auſſi, ce que je me propoſe principalement dans ce Mémoire, c'eſt de rapporter au vrai la route que j'ai ſuivie dans ce déchifrement. Quoiqu'elle m'ait conduit aſſez droit au but, je me flatte qu'on ne me ſoupçonnera pas d'en vouloir impoſer. Ceux qui ſavent le peu de tems que j'ai à donner à des occupations de cette nature, comprendront aſſez, que, pour peu d'écarts que j'euſſe fait, ils auroient conſumé plus de tems que je n'en ai mis à arriver à la vraie ſolution de ce probleme.

Pl. VIII. & IX. No. 1. & 2. III. Le chifre propoſé eſt compoſé d'environ 25 caracteres différens, outre les neuf chifres de l'arithmétique. A chacun de ces caracteres répond immédiatement au deſſous une lettre de l'alphabet; & chaque mot eſt ſéparé de l'autre par un point. Pluſieurs de ces caracteres en ont encore un autre immédiatement au deſſus d'eux, & ces caracteres ſupérieurs ſont en partie les mêmes que les inférieurs; quelques autres, qui ne conſiſtent qu'en points ou en ſimples lignes, paroiſſent affectés à la rangée ſupérieure, & ne ſe rencontrent nulle part dans l'inférieure. C'eſt ce que l'inſpection du chifre explique au premier coup d'oeil.

IV. Comme je croyois ce chifre extrèmement difficile, & qu'il n'étoit pas naturel, dans cette ſuppoſition, de penſer que chaque caractere repondit à la lettre placée au deſſous; ma premiere idée fut, que ces caracteres inférieurs n'étoient placés là que pour faire prendre le change, & qu'il n'y avoit que les ſignes ſupérieurs qui fuſſent ſignificatifs. Mais, dans cette ſuppoſition, il auroit falu que chaque ſigne ſupérieur exprimât, ou des ſillabes entieres, ou certain nombre de lettres; & je m'apperçus d'abord que cela ne pouvoit pas être; 1°. puiſqu'il eût falu un beaucoup plus grand nombre de caracteres ſupérieurs,

qu'il

qu'il n'y en avoit effectivement; 2°. parce qu'aux mêmes signes supérieurs, répondoient des sillabes différentes. Je tirai donc de là ma premiere conclusion: *Les signes supérieurs ne désignent pas des sillabes.*

V. Cela posé, ma seconde conclusion fut: *chaque caractere inférieur désigne effectivement une lettre de l'alphabet;* puisque je voyois autant de ces caracteres que de lettres au dessous, & que chaque mot étoit distingué par des points, & même par une parenthese lorsque le cas l'exigeoit.

VI. Passant plus loin, je crus pouvoir supposer, que *chaque caractere répondoit à la lettre de l'alphabet placée immédiatement au dessous de lui.* Il est vrai que l'epithete d'*orientalische Wissenschaft*, que l'Auteur donne à son chifre, me fit soupçonner que peut-être faloit-il lire chaque mot de droite à gauche, & qu'ainsi les caracteres seroient dans un ordre renversé par rapport aux lettres auxquelles ils répondoient. Mais, outre que je ne trouvois pas une correspondance plus uniforme entre ces caracteres, & les lettres, soit que je les prisse à rebours, ou de gauche à droite; j'observai de plus que *chaque lettre initiale d'un mot avoit un double caractere, au lieu que la finale n'en avoit quelquefois qu'un simple.* Or si le signe supérieur étoit peut-être la marque d'une clé particuliere, il étoit naturel qu'elle se trouvât sur la premiere lettre du mot.

VII. Cependant je ne pouvois me dissimuler, qu'*un même caractere, soit simple ou double, désignoit tantôt une lettre tantôt une autre.* C'est ce que la simple inspection du chifre montroit presque à chaque mot; & de plus l'auteur du chifre avoit assuré que chaque mot pouvoit s'écrire en autant de manieres différentes qu'il y avoit de différens caracteres.

VIII. Je fus d'abord tenté de croire que cette diversité de signification d'un même signe, venoit de la multiplicité des clefs particulieres, que je supposois être indiquées par les signes supérieurs. Je con-

concevois qu'on pouvoit avoir rangé tous les caracteres du chifre dans une Table, ou espece d'échiquier, d'environ 24. files; que chaque caractere, se retrouvant une fois dans chaque rang, pouvoit par là répondre successivement à chaque lettre de l'alphabet, & que le signe supérieur désignoit le rang, ou la file, qui déterminoit la signification du caractere. Mais, pour que cette hypothese fut la vraye, il faloit que toutes les fois qu'un même caractere seroit précédé, ou accompagné du même signe supérieur, il signifiât la même lettre de l'alphabet, & c'est ce que je ne trouvois presque nulle part; d'où je crus pouvoir conclure: que *la raison de la différente signification d'un même caractere, ne venoit, ni de la multiplicité des clefs particulieres, ni du signe supérieur qui l'accompagnoit, ou qui le précédoit.*

IX. Combinant cette conclusion-ci avec celle de l'Article VI. qui me paroissoit également sûre, voici comme je raisonnai. Il est impossible que la diversité de signification d'un même caractere soit arbitraire; *il faut* donc *qu'il y ait toujours une raison suffisante pourquoi dans chaque place ce caractere désigne plutôt une lettre qu'une autre.* Or cette raison n'étant, ni dans le caractere même qui n'a point de signification fixe (§. VII.) ni dans les signes supérieurs (§. VIII.) il ne reste à la chercher que *dans la rélation du caractere*, c. à. d. *dans sa maniere de coëxister avec les autres;* en un mot, *dans sa situation par rapport à ceux qui le précédent, ou qui le suivent, soit médiatement, ou immédiatement.*

X. Poussant ce raisonnement plus loin, pour arriver à une conclusion plus précise, je dis: que, comme en écrivant, les caracteres qui ont précédé sont plus connus que ceux qui suivront, *il y avoit plus de raison de chercher la cause de cette diversité de signification dans les caracteres qui précédoient, que dans ceux qui suivoient.*

XI. Faisant ensuite réflexion qu'il y a des mots qui ne sont composés que de deux lettres, & me rappellant en même tems l'observation de l'Article VI. que chaque initiale a un double caractere, j'en con-

clus:

clus: que *probablement ce n'étoit que le caractere immédiatement précédent qui déterminoit la signification du caractere suivant*, & que c'*étoit la raison pourquoi chaque initiale étoit composée de deux caracteres.*

XII. Avant d'aller plus loin, il étoit également aisé, & nécessaire, de vérifier cette hypothese. Je cherchai dans le chifre des endroits où les deux mêmes caracteres voisins se trouvassent répétés. S'ils donnoient toujours la même lettre, mon raisonnement étoit juste; s'ils en donnoient d'autres, ma supposition tomboit d'elle-même. Je trouvai plus que je ne cherchois: j'avois apperçu que les caracteres 3Θ, étoient souvent répétés; en les rassemblant tous, j'eus la table suivante.

Dans le mot	*Societaten*	— — —	Δ̄ 3Θ	a pour finale —	*t*
— — —	*Secretaires*	— — —	3Θ	— — — —	*t*
— — —	*Interpretes*	— — —	⊤ 3Θ	— — — —	*t*
— — —	*Potentaten*	— — —	⊥ 3Θ	— — — —	*t*
— — —	*Potentaten*	— — —	Θ3	— — — —	*t*
— — —	*anstatt*	— — —	Θ over 3	— — — —	*t*
— — —	*buchstaben*	— — —	Θ over 3	— — — —	*t*
— — —	*dexteritat*	— — —	3Θ	— — — —	*t*

Tous ces divers exemples, qu'aucun cas contraire ne démentoit, confirmerent non seulement ma conclusion du §. XI. mais me firent voir de plus; 1°. que *le signe supérieur du caractere qui précéde, n'influe point à déterminer la signification du caractere suivant*, & 2°. qu'*il n'im-*

n'importe quelle position les deux caracteres ayent l'un par rapport à l'autre, pour donner la même signification : puisque, dans les exemples recueillis ci-dessus, que ⊖ soit à gauche, ou à droite, ou au dessus de 3. il donne toujours également : *t.*

XIII. M'étant ainsi assûré que chaque lettre étoit déterminée par l'assemblage de deux caracteres voisins, il ne s'agissoit plus que de découvrir comment cette détermination résultoit d'un tel assemblage. Or il étoit évident que la raison de ce résultat ne pouvoit être que dans la figure même du groupe formé par les deux caracteres, ou dans la valeur arbitraire de chaque caractere, dont la somme ou la différence exprimât le nombre attribué à chaque lettre de l'alphabet.

La premiere supposition ne me paroissoit point vraisemblable; 1°. parce qu'il auroit falu autant de groupes, ou de doubles caracteres pour chaque mot, que ce mot contenoit de lettres : ce qui ne se trouve point dans ce chifre; 2°. y ayant environ 32. caracteres différens, leur combinaison de deux à deux pour en former des groupes, eût donné une clé de plus de mille chifres différens pour n'exprimer que vingt & quatre lettres; ce qui rendroit un chifre très incommode. 3°. Dès que la signification d'une lettre seroit attachée à la figure du groupe, il ne devroit plus être indifférent que l'un des caracteres fut devant, ou derriere, dessous ou dessus l'autre, comme cela paroissoit l'être par les exemples de l'Article XII.

Par toutes ces raisons je conclûs donc : que, *pour que chaque caractere pût être déterminé par celui qui le précédoit immédiatement à représenter une certaine lettre, & qu'il pût en même tems concourir avec le caractere suivant à signifier une autre lettre ; il faloit,* puisque chaque lettre étoit en soi un tout indivisible, *supposer à chaque caractere une valeur numéraire, qui, combinée avec celle du caractere voisin, exprimât le nombre assigné à chaque lettre de l'alphabet.*

XIV. Arrivé à cette conclusion, je n'eus rien de plus pressé que de la vérifier sur le chifre même. Je m'attendois cependant à y rencon-

contrer deux grands obſtacles. 1°. Je ne connoiſſois point encore la ſignification des ſignes ſupérieurs. 2°. Je ne pouvois découvrir la valeur arbitraire de chaque caractere que par le moyen du nombre atribué à chaque lettre ; & je n'oſois pas eſpérer que ce nombre fût celui qui réſulte de leur ordre naturel. Pour écarter ces difficultés, je m'appliquai à chercher dans le chifre propoſé des mots où il n'y eût que peu de ſignes ſupérieurs, & pluſieurs chifres arabes qui ſe ſuiviſſent deux à deux, dans la ſuppoſition que ceux-ci retenoient leur valeur connue.

Je trouvai toutes ces conditions réunies dans le mot *Geſchicklihkeits*. J'y vis que 8. précédé de 3. deſignoit *l*: or $8 + 3 = 11$. & *l* eſt l'onzieme dans l'ordre alphabetique. J'y vis enſuite 1. précédé de 8. deſigner *i*, neuviéme lettre de l'Alphabet; enfin j'y trouvai 2. précédé de 3. ſignifier *e*. cinquieme lettre dans l'ordre naturel.

XV. Parvenu à cette ouverture, le plus difficile étoit fait. J'eus bientôt la valeur de divers caracteres, à l'aide des chifres qui les accompagnoient ; & ces caracteres, une fois connus, m'aiderent à fixer la valeur des autres. Toutes ces déterminations ſe confirmoient réciproquement, & il me fut aiſé d'appercevoir que le point placé ſur un chifre rendoit ſa valeur négative.

Cependant, les valeurs les mieux conſtatées ſe dementoient à l'égard de certaines lettres, telles que, *p*, *r*, *s*, *t*, *u*, *x* ; & j'avoue que c'eſt ce qui m'a arrêté le plus longtems. Convaincu que les lettres répondoient à leur nombre naturel depuis *a* jusqu'à *o*, il ne me venoit point dans l'eſprit que les autres pûſſent ne pas ſuivre le même ordre. L'évidence néanmoins me força à le reconnoitre. Toutes les valeurs aſſignées à mes caracteres s'accordoient à faire conſtamment, $s = 16$. excepté dans les ſeuls cas où la ſuppoſition que j'avois faite de $s = 18$, avoit ſervi à déterminer la valeur du caractere ; & dans ce cas là, cette valeur donnoit des anomalies partout ailleurs où ce caractere reparoiſſoit ; anomalies qui s'évanouiſſoient en poſant $s = 16$.

Je

Je fus donc obligé de recommencer ma clé, en m'assurant avant toutes choses du nombre attribué à chaque lettre de l'Alphabet; & pour ne pas m'y tromper, je ne fixai que la valeur rélative des caracteres, telle qu'elle résultoit des équations aux lettres; jusqu'à ce que le nombre assigné à chaque lettre me fut assez connu pour déterminer sans erreur la valeur absolue de ces caracteres. Je rapporterai par occasion dans l'Article XVIII. un exemple qui montrera ma méthode de procéder dans cette recherche. Je parvins ainsi à former la Table suivante de la valeur numéraire des lettres.

a	=	1	*i*	=	9	*r*	=	15
b	=	2	*k*	=	10	*s*	=	16
c	=	3	*l*	=	11	*t*	=	17
d	=	4	*m*	=	12	*u*, & *v*	=	18
e	=	5	*n*	=	13	*w*	=	19
f	=	6	*o*	=	14	*x*	=	23
g	=	7	*p*	=	21	*y*	=	...
h	=	8	*q*	=	...	*z*	=	20

XVI. Cette Table m'ayant mis en état de donner à chaque signe, (dont je connoissois la valeur rélative en lettres,) sa juste valeur numéraire, j'entrepris de déchifrer réellement chaque mot des deux échantillons, sur *la loi générale du chifre:* savoir *que la somme des valeurs de deux caracteres qui se suivent immédiatement, donne le nombre de la lettre placée sous le dernier de ces caracteres.* Mais, quoique je ne trouvasse presque aucune anomalie dans l'application de cette loi aux lettres intermédiaires & finales des mots, j'en trouvois presque partout à l'égard des deux lettres initiales de ces mots. Je dis, *presque* partout, puisque de 96 mots que le chifre proposé contient, il n'y en avoit qu'une vingtaine dont les initiales suivissent la loi générale: Cette irrégularité m'obligeant d'examiner de plus près les caracteres initiaux; m'y fit appercevoir une singularité bien remarquable: c'est

que

que depuis le mot *in*, jusqu'au mot *deterrirung*, l'auteur a affecté de suivre dans les neuf initiales inférieures, les neuf chifres de l'Arithmétique selon leur ordre naturel. Le même ordre revient ensuite en caracteres dont la valeur est affirmative, depuis le mot *zahl* jusqu'au mot *in*; & de là recommence encore le même ordre pour les valeurs négatives depuis *buchstaben*, jusqu'à *ihr*; pour ne pas parler ici des 12. premiers mots, dont les six dernieres initiales répetent les six premieres dans un ordre renversé.

Cette observation, jointe à la certitude que j'avois de la valeur précise des caracteres, me fit découvrir trois loix particulieres de ce chifre que je vais rapporter.

1 *Tout caractere initial inférieur dont la valeur est au dessus de 9. conserve sa valeur constante.*

2. *Tout caractere initial inférieur dont la valeur affirmative est au dessous de 10. vaut dans cette place le double de sa valeur ordinaire.*

3. *Tout caractere initial inférieur dont la valeur négative est au dessous de 10. vaut dans cette place le double de sa valeur ordinaire, plus une unité.*

XVII. Je vais continuer de rapporter tout de suite les autres loix particulieres qui sont, ou une suite de la loi générale, ou des observations que j'ai faites en déchifrant.

4. *Le caractere supérieur initial conserve toujours sa valeur ordinaire.*

5. *Le caractere supérieur ne sert qu'a déterminer par sa valeur la lettre immédiatement au dessous, & nullement celle qui suivra à droite, à moins que le caractere inférieur ne soit zéro*, parce qu'en ce dernier cas le caractere supérieur est censé occuper la place inférieure, & par conséquent suivre la loi générale.

6. *Lorsqu'au milieu d'un mot il y a un signe ou caractere supérieur, ne fut-ce qu'un point*, comme on a alors déjà deux valeurs re-

quiſes pour déterminer la lettre, *on ne joint jamais celle du caractere qui précede à gauche.* Cette loi n'a pas lieu 1°. lorsque le ſigne ſupérieur eſt + qui vaut 10. 2°. lorsque le caractere inférieur eſt zéro: 3°. lorsque le ſigne ſupérieur n'a point de valeur, c. à. d. lorsque c'eſt un point qui indique ſimplement la ſouſtraction, parce que dans les deux derniers cas la raiſon de la loi ceſſe, & que dans le premier, la valeur du caractere inférieur ſeroit trop aiſément connue. Par cette même raiſon, la loi n'a pas lieu à l'égard de la finale.

7. *Un point placé ſur un caractere, qui n'eſt pas un chifre arithmétique, augmente toujours ſa valeur d'une unité.*

8. *Un point placé dans la figure d'un tel caractere, le rend ſimplement négatif, ſans rien ajouter ni diminuer à ſa valeur.*

9. *Une valeur négative ou ſouſtractive n'eſt telle que rélativement au caractere qui précede; toute valeur eſt affirmative ou additive par rapport au caractere ſuivant.* De là vient que *l'initiale inférieure eſt toujours affirmative, quoique le caractere ſoit négatif:* parce que le caractere ſupérieur n'eſt au deſſus de lui qu'à cauſe qu'il ne convenoit pas de le placer à côté.

10. Comme les lettres répondent toutes à des nombres affirmatifs, *la différence entre deux caracteres dont l'un eſt négatif, eſt toujours cenſée affirmative,* quoique la valeur du caractere négatif ſoit la plus grande.

11. *Lorsque le caractere à gauche eſt zéro, il faut ajouter la valeur de celui qui précede le zéro.*

XVIII. Après avoir déterré toutes ces Loix, il ſembloit qu'il ne devoit plus reſter la moindre difficulté; cependant je ne ſaurois diſſimuler que je me vis encore arrêté au tout premier mot; & voici pourquoi.

J'avois par le mot: *Wuſſenſchaften*, $a = 1 + 0 = 1$. Je ſavois par le mot *Mathematici*: $c = 4 - 1 = 3$. Or j'avois trou-

trouvé dans le mot *caracteren*, $6 + \underline{\nabla} = a$, d'où j'avois conclu $\underline{\nabla} = -5$. Ce même mot me fournissoit aussi $\underline{\nabla} + \dot{\vee} = c = 3$: de là j'avois tiré $\dot{\vee} = -8$. Enfin, je voyois encore dans ce même mot $\dot{\vee} + 9 = t$, ce qui me donnoit: $t = 17$. Jusques là tout alloit bien; & puisque, par les exemples rapportés (Art. XII.) j'avois par tout $3 + \ominus = t$; je n'avois garde de n'en pas conclure l'équation $\ominus = 14$: & trouvant dans le mot *poteutaten*: $4 + \bar{\wedge} = t$, j'en tirois par le même raisonnement $\bar{\wedge} = 13$. Ces valeurs trouvées se confirmoient encore en ce que dans ce dernier mot, & ailleurs, je trouvois $\bar{\wedge}\ominus' = a = 1$. qui est la différence entre 13. & 14. Cependant ni l'une ni l'autre de ces valeurs n'étoit la vraye; & voilà, pour le dire en passant, comme deux erreurs différentes peuvent se prêter force mutuellement, & nous fermer le chemin de la vérité. J'étois si sûr de mon calcul, que quoique presque partout où l'un de ces deux caracteres revenoit, je trouvasse une anomalie, j'aimois mieux la mettre sur le compte du Copiste, que de supposer une erreur dans des déterminations si bien établies. Enfin le mot: *so*, du second exemple, me dessilla les yeux; j'y vis $\bar{\wedge} - 5 = 16$, & $\bar{\wedge} - 7 = 14$. Il étoit donc impossible de ne pas en tirer l'équation: $\bar{\wedge} = +21$. d'où resultoit nécessairement celle de: $\ominus = -20$. ce qui satisfaisoit également aux deux équations trouvées. $3 + \ominus = t = 17$. & $4 + \bar{\wedge} = t = 17$. L'écart venoit de ce que je n'avois pas imaginé, que $\ominus$, & $\bar{\wedge}$. pussent avoir des valeurs négatives.

XIX. Il est tems de passer à la clé du chifre, & d'en faire l'application aux deux exemples proposés. S'il y reste encore quelques difficultés, elles ne roulent que sur des minuties qui n'interéssent plus, & qui s'evanouiroient si l'on avoit plus d'exemples à comparer; ou peut être aussi, si ceux qu'on a, étoient plus corrects.

Jai représenté la valeur des caracteres dans la Planche IX. N°. 3. & quant aux signes supérieurs, en voici la signification: Planche IX. No. 3.

·· = o

(sur un caractere) = 1

(sur un chifre précédé d'un plus grand nombre) = —

: = — 1

— = 2

∸ = — 2

+ = 10

+ (initial) = 6. par la 4. Loi.

┴ = 11

∔ = — 11

o. indique qu'il faut doubler la valeur du caractere inférieur.

⊙. indique qu'il faut doubler la valeur du caractere inférieur, & y ajouter l'unité. Si le caractere inférieur est un chifre arithmétique, précédé d'un plus petit nombre, le simple point tient lieu de ce signe ⊙, qu'on a choisi pour les autres caracteres, apparemment par ce que le simple point sur ces caracteres a déjà sa signification, savoir l'unité. Au reste ⊙ sur l'initiale vaut 10. suivant la 4. loi.

Au surplus, s'il étoit possible qu'il restât encore des doutes sur la justesse de cette clé, il n'y auroit quà jetter les yeux sur deux mots faussement indiqués dans l'échantillon, l'un par *translations clavis*, dans le premier exemple, & l'autre par *puncto*, dans le second; ce qui, dans l'un & l'autre cas, ne donne aucun sens; au lieu qu'en les déchifrant selon la clé que j'ai trouvée, le premier mot est: *regulmässigen*, & le second: *wider*, comme le sens du texte l'exige.

XX. Voici maintenant le déchifrement du premier exemple; où, pour mieux faire voir la loi du chifre, je commencerai toujours par la valeur du caractere supérieur.

— 2

Tab. VIII. No. 1.

—2 + 21. 21 — 20. 20 — 7.
w a n

—4 + 20. —2 + 5. 5 + 3. 3 + 11. 11 — 1 + 3.
s c h o n

—11 + 12. 12 — 1. 5 + 5 + 1. 5 — 3 + 3.
a l l e

1 + 11. 11 — 10. 10 + 7 .... 6 + 6 .... 4 + 10 + 3. 4 + 4 + 1. 4 — 1. 1 — 1 + 9.
m a t e m a t i c i

6 + 10. 10 + 4. 4 — 7. 7 + 2. 2 — 7. 8 + 8 + 1. — 4 + 3. 3 — 20. 1 + 4. 4 + 8 + 1.
s o c i e t a t e n

—1 + 5. 5 + 0. 5 + 0 + 10.
d e r

14 + 5. 9 + 9. 9 + 7. 7 + 9. 9 — 4. 6 + 6 + 1.
w u s s e n

6 + 10. 10 — 7. 7 + 1. 1 + 0. 1 + 0 + 5. 5 + 12. 12 — 7. 7 + 5 + 1.
s c h a f t e n

8 + 10. 10 + 3. 3 — 6 + 7
u n d

5 + 11. 11 - 6. 6 - 3. 3 + 10 + 2. 2 + 3. 3 - 20. 5 - 4. 4 + 5. 5 + 10. 1 + 4. 4 + 3 + 10
s e c r e t a i r e s

—3 + 12. ... + 3. 3 — 20. 1 + 4. 4 + 11. 11 + 10. 10 + 5. 5 + 0.
i n t e r p r e

5 + 0 + 10 + 2. 2 — 7. 7 + 2 + 7.
t e s

—21 + 20. 20 — 9. 9 + 2. — 3 + 8. 8 + 7.
a l l e r

 of

0+21. 11+3. 3-20. -4+9. 9+4. 4-21. 21-20. 20-3. 3-8. 8+1+4.
p o t e n t a t e n

7+2. 2+11.
i n

3+4. 4-3. 3+10. 10+7. 7+12+1.
g a n t z

-1+6. 6+12. 12+3. 3+11. 11+10. 10-9+0.
e u r o p a

7-8. 8+3. 3+8.
a l l

-1+10. 10-2. 1+7+7. 7-2. 2+2+9.
i h r e n

-5+12. 12-7. 7+9. 9-6. 6+2. 2+7. 7+3. 3+8. 8+1. 1+7.
g e s c h i k l i h

7+3. 3+2. 2+7. 7+10. 10+1+5.
k e i t s

-4+14. 14+1. -6+5. 5+1. 1+8+8. 8-3. 3+9+1.
k r a f t e n

4+16. 16-2+4.
z u

-14+18. 1+4. 4-21. 14+9. 9+6. 6+8. 3+10+8. 2-20. 20-7. 7-3+3.
d e t e r i r u n g

-1+5. 5+4. 4+12. 12-7. 7+
d i s e r

14+6. .... 6+2. 2+8+1.
z a h l

10 + 8. 8 + 5. 5 — 2 + 1:
u n d

−7+10. 10−9. 9+6. 6−5. 5−8. 8+9. 9−4. 1+7+7. 7−2. 2+8+3.
c a r a c t e r e n

4+12. 12−9. 9−1. 1+10+4. 4+5. 5+1. 1+7+9
s c h r i f t

1+14. 14−9. 9−2. 2−20. 20−9. 9+3. 3−4. 4+10+2.
r e g u l m a s

8+8. 8+1. 1+6. 6−1. 1+3+9.
s i g e n

1+16. 16−1. 1+0. 6+6+1. 6+10. 10+1. 9−8.
t r a n s l a-

8+9. 9+0. 9+0+5. 5+8. 8−2+10.
t i o n s

—9+18. 18—5.
i n

−5+7. 7+11. 11−8. 8+0. 8+0+8. 8+9. 9−8. 8−6. 6−1. 1+9+3
b u c h s t a b e n

−8+9. 9+9. . . 9−7. 7+2. 2−7. 7+10. 10−5. 5−1+9
a u f b i e t e n

5 + 11. −6 + 9 + 11.
s o

−9+13. 13+1. −20+5. 5+1. 8+8+1. 8−7+4
d o r f t e

−11+15. 15−10. 10+3. 6+6+1. 6+8. 8−5. 5−2+5
d e n n e c h

−16

— 16 + 17. 17 — 6. 6 + 1 + 4
a l l

— 10 + 19. 3 + 5. 5 + 1 + 9
i h r

— 6 + 10. 10 — 9. 9 + 6. 6 — 5. 5 + 2 + 6
d a r a n

10 + 9. 9 — 4. 4 + 9. 9 — 5. 5 + 0. 5 + 0 + 8. 8 — 4. 4 — 3 + 4
w e n d e n d e

— 20 + 8. 8 + 10. 10 — 2. 2 — 3 + 6
m u h e

11 + 7. 7 — 2. — 5 + 20. — 1 + 8. 8 + 3 . . . — 4 + 9. 9 — 1 + 5
v e r g e b e n

13 + 5. 5 + 8. 8 — 4
u n d

— 2 + 20. 20 — 8. 8 + 8. 8 + 6. 6 + 7. 7 + 9. 9 + 3 + 5
u m s o n s t

4 + 12. 12 — 7 . . . . 7 — 3 + 9.
s e i n

— 4 + 11. 11 — 6. 6 + 10. 10 + 7. 7 — 2. 2 — 10. 1 + 4. 4 + 8 + 1
g e s t e h e n

— 8 + 20. 20 — 2. 2 + 10 + 4. 4 + 12. — 9 + 4. 4 — 1 + 10.
m u s s e n

— 3 + 7. 7 — 6. 6 + 10. 10 + 2 + 4.
d a s s

— 7 + 11. 11 — 6. 6 + 10. 10 + 6. 6 — 1. 1 + 3 + 9.
d e s s e n

1 — 6 +

6 + 15. 15 + 0. 15 + 0 − 1. 1 − 5. 5 + 4. 4 + 3. 4 + 4 + 1.
p r o d i g i

4 + 10. 10 + 6. 6 − 5 + 4.
o s e

− 20 + 16. 1 + 4. 4 + 10 + 9. − 21 + 4. 4 − 9. 9 + 6. 6 + 3.
d e x t e r i

3 + 10 + 4. 4 − 5. 5 + 12.
t a t

− 2 + 11. 11 − 3. 3 + 3 + 9
i h r

− 4 + 5. 5 + 6. 6 + 5. 5 + 0. 5 + 0 + 1 + 9
a l l e r

− 10 + 8. 8 − 3. 3 − 10. 10 + 5. 5 + 4. 4 − 6 + 8.
b e g r i f

9 + 9. 9 − 7. 1 + 4. 7 + 7 + 1. 7 + 9. 9 + 8. 8 − 3. − 1 + 10. 10 − 3. 3 − 3 + 5.
u b e r s t e i g e

SECOND EXEMPLE.

Tab. IX. No. 2.

2 + 2. 2 + 7. 7 − 7 + 5.
d i e

8 + 6. 6 + 9. 9 + 0. 9 + 0 − 4. 4 + 9. 9 + 8. 8 − 7.
o r i e n t a

7 + 4. 4 + 5. 5 + 10 + 1. 1 − 4. 4 − 2 + 3.
l i s c e

12 + 7. 7 + 11. 11 + 5. 5 + 11 + 0. 11 + 0 − 6. 6 + 7.
w u s s e n

7 + 9. 9 − 6. − 2 + 10. 10 − 9. 9 − 3. 3 + 5 + 9.
e c h a f t

− 4

—4+5. 5+8. 8+8. —20+3. 3—4. 8+8+1. 8—1+10.
a n s t a t t

0+4. 4—9. 9+1+5.
d e r

—6+8. 8+10. 10—7. 7+9. 9+8. —3+4. 4—2. 2—7. 7+1+5.
b u c s t a b e n

3+9. 9+0. 9+0—1+9.
m i t

10+10. 10—9. 9—1. 1+3+7.
z a h l

12+6. 6+7. 7—6+3
u n d

—7+10. 10—9. 9+6. 6—7. 7—4. 4—21. 1+4
c a r a c t e

4+11. 11—6. 6—1+8
r e n

9+11. 11+7.
z u

5+11. 11—8. 8+0. 8+0+7. 7—2. 4+4+1. 4—2. 2—7. 7—3+9
s c h r e i b e n

10+8. 8+5. 5—8+7.
u n d

—8+12. 12—3. 3+10+3. 3—3+5,
d i s e

—4+13. 13+0.
i n

7+

7 + 12. 12 — 3. 3 — 7. 7 — 2. 2 + 4 + 9
w i d e r

— 1 + 10. 10 — 1 + 4.
i n

— 12 + 14. 14 + 4. 4 — 1. 1 + 7. 7 + 9. — 20 + 3. 3 — 4.
b u c h s t a

4 — 6. 6 — 1. 1 + 3 + 9.
b e n

5 + 15. 15 — . . + 5
z u

— 5 + 20. — 4 + 9. 9 — 6. 6 + 3. 3 + 10 + 8. 8 + 7. — 20 + 6.
r e c i p r o

6 — 3. 4 + 4 + 1. 4 + 11. 11 — 6. 6 — 2 + 9
c i r e n

— 1 + 2. 2 + 9. 9 + 7.
a l s

2 + 2. 2 — 7. 7 + 8. 8 — 3. 3 + 9 + 1.
d e r e n

0 + 4. 4 + 5. 5 + 11. 11 — 6
d i s e

14 + 2. 2 — 5. 5 + 3. 7 + 7 + 1. 7 + 2. 2 + 4. 4 + 3 + 10.
s c h r i f t

3 + 2. 2 — 11. 11 + 2
e i n

10 + 2. 2 — 20. 20 — 4. 8 + 8 + 1. 8 — 3. 3 + 3 + 9
m u s t e r

— 3 + 12. 12 + 4. 4 — 21. . . — 0 + . . .
i s t i

2 + 16. 16 — 2. 2 + 2 + 9.
v o n

— 12 + 17. — 17 + 8. 8 + 5. 5 + 0. 5 + 0 — 1 + 9.
e i n e r

— 5 + 21. 21 — 7.
s o

7 + 14. 14 + 1. 11 + 3. 3 — 7. 7 + 2. 2 + 5. 5 + 4. 4 + 10
p r o d i g i e

10 + 6. 6 — 11. 11 — 1 + 3.
s e n

— 12 + 16. 1 + 4. 4 + 10 + 9. 9 + 8. 8 — 3. 3 + 12. 12 — 3.
d e x t e r i

3 — 20. — 3 + 2. 2 + 5 + 10.
t a t

1 + 18. 9 — 4. 4 + 7. 7 — 4. — 2 + 10. 10 — 5.
w e l c h e

0 + 19. 19 — 5. 5 + 3. 3 + 3 + 5.
w o h l

2 + 7. 7 + 3 + 3.
i n

— 2 + 9. 9 — 8. 8 + 5. 5 + 12. 12 + 8
g a n t z

0 + 5. 5 + 10 + 3. — 20 + 5. 5 + 9. 9 + 10 + 2. 9 — 8.
e u r o p a

4 + 12. 12 — 9. — 2 + 10. 10 + 9. 9 — 4. 4 + 11.
s c h w e r

11 + 0. 11 + 0 — 2. 2 — 5. 5 — 3 + . . .
l i c h

3+15. 15—1. 1+3+9
v o n

5+4. 4—9. 9+3. 3—4. 4+9. 9—5. 5+3+9
i e m a n d t

9+11. 11+7.
z u

—6+10. 10—5. 8+8+1. 8—3. 3+10+2. 7+7+1. 7+2.
d e t e r r i

2+13+0. 13+0—8. 8—3+8.
r e n

XXI. J'ai laiſſé, comme on voit, une lacune aux endroits défectueux, qui ſont en très petit nombre. Si le peu d'exactitude qu'on remarque dans le texte de ce chifre permet de ſuppoſer quelques fautes dans le chifre même, il ſera très aiſé de concilier, à l'aide d'un leger changement, ces anomalies avec les loix rapportées ci-deſſus.

Pour dire en deux mots mon ſentiment ſur ce chifre; il me paroit aſſez ingénieux, & je ne doute point qu'il ne fut commode s'il n'étoit ſurchargé de loix particulieres. Il y a une bizarrerie dans l'aſſignation de la valeur des lettres alphabétiques, qui choque; & la multiplicité des loix, jointe aux divers uſages d'un même ſigne donneroit infailliblement lieu, lorſqu'on voudroit s'en ſervir, à bien des fautes d'inadvertance. L'Auteur a eu tort d'ailleurs d'annoncer cette invention d'un ton ſi haut; il eſt peu de chifres qu'on ne puiſſe déterrer dès que l'on en connoit la langue, & que les mots ſont diſtingués; à plus forte raiſon feront-ils déchifrables, lorſqu'on a ſi peu de ſoin d'éviter le retour des mêmes ſignes pour exprimer la même lettre, & qu'on y ajoute encore la ſignification. Enfin, puiſque ce chifre rouloit ſur des valeurs numéraires, il ne devoit y entrer aucun chifre arabe, ou du moins ceux-ci devoient ne pas y conſerver leur valeur connue. Un chifre impénétrable aux yeux de toute l'Europe, devoit être mieux déguiſé.



SUR
LE SENS MORAL.
PAR M. MERIAN.

Quel eſt, dans l'eſprit de l'homme, le principe qui le porte à approuver ou à blâmer certaines actions, & qui par là rend ces actions ou moralement bonnes, ou moralement mauvaiſes?

Les Philoſophes qui ont traité cette matiere avec le plus de ſuccès, peuvent être partagés en deux claſſes. Les uns attribuent la connoiſſance du bien & du mal moral aux lumieres de l'entendement, ou de la raiſon; les autres à une ſenſation immédiate, à une eſpece de goût naturel, qu'ils ont appellé LE SENS MORAL.

Ce dernier principe, quoiqu'on en puiſſe trouver quelques veſtiges dans l'Antiquité philoſophique, n'a été mis dans tout ſon jour que dans le ſiecle où nous vivons, & par des Philoſophes Anglois. Le Lord *Shaftsbury*, ce brillant génie, cet incomparable Ecrivain, eſt le premier docteur du Sens Moral; mais il ne l'enſeigne point avec la ſécheresse méthodique d'un docteur: non-content de l'embellir des charmes de ſa divine éloquence, & de la ſublime poëſie de ſon ſtyle, il paroit lui-même ſi fortement affecté de ce ſens, qu'il eſt à craindre que l'on ne ſoit plûtot entrainé par ſon enthouſiaſme que convaincu par ſes raiſons. M. *Hutcheſon* aſſujettir cette doctrine à une méthode plus ſévere & plus exacte. Enfin M. *Hume* y a porté le flambeau de l'expérience, & a tâché de l'établir ſur des preuves de fait.

Je me borne ici à des queſtions, ſur leſquelles ces illuſtres Philoſophes me ſemblent avoir laiſſé quelque choſe à dire; & je réduis mon

mon Mémoire à trois articles. Dans le premier, j'examine si le Sens Moral peut passer pour un Principe philosophique. Dans le second, je le compare avec l'Amour propre; & dans le troisieme, avec les principes de Morale fondés sur le raisonnement. (*).

PREMIERE PARTIE.

Qu'est-ce qu'un Principe philosophique? C'est une proposition générale, qui explique d'une maniere claire et intelligible les phénomenes qui y sont subordonnés. Expliquer un phénomene, c'est assigner une cause que l'on conçoit pouvoir le produire, & dont on peut se former une idée nette & précise.

Je découvre que la différence entre le bien & le mal moral ne dépend pas du raisonnement; j'aurai détruit un principe faux, quoique philosophique. Je découvre de plus que cette différence dépend du sentiment; c'est une vérité nouvelle. Prouver cette vérité par induction, faire voir qu'elle satisfait à tous les cas, c'est l'ériger en Principe. Mais, quand je me tromperois, ou quand tous les Moralistes se tromperoient sur les fondemens de la Morale, cela ne fait rien à notre question; car, encore une fois, il ne s'agit pas ici de ce qui est vrai ou faux, mais de ce qui est philosophique & de ce qui ne l'est pas.

La Morale est, comme la Physique, fondée sur l'Expérience & sur l'Analogie; ses principes sont des phénomenes généralisés. A' la considérer sous cet aspect, le Sens Moral me paroit un principe pour le moins aussi philosophique qu'aucun de ceux qui ont été employés pour rendre raison des changemens qui arrivent dans le monde matériel. Je ne sais même si à cet égard il n'a pas quelque avantage. Le Physicien est souvent obligé de recourir à des causes qui ne se manifestent point aux sens; & quelque plausibles que soient les analogies

(*) *Je donne ici ces Mémoires, tels que je les ai écrits en 1758, & en 1759. Depuis ce tems il a paru, en Angleterre, de nouveaux ouvrages sur le Sens Moral, mais dont on voit bien que je n'ai rien pu emprunter.*

logies qu'il forme, elles ne ſauroient être vérifiées par des expériences immédiates. Auſſi voit-on que ces ſortes de principes ſont ſouvent ruinés par de nouvelles découvertes, qui amenent de nouveaux principes. Ici cette difficulté s'évanouit: la queſtion peut ſe réduire à un fait dont chacun eſt en état de connoitre. Il n'y a qu'à ſonder nos coeurs, & à voir ce qui s'y paſſe lorſque nous approuvons ou blâmons les actions, les moeurs, & les caracteres.

Mais, dit-on, ce Sens Moral ne peut être analyſé par le raiſonnement; c'eſt un point où il faut s'arrêter: ce n'eſt donc pas un principe philoſophique, mais un de ces azyles de l'ignorance que la ſaine Philoſophie proſcrit, une faculté occulte, une idée innée, un inſtinct, un être de l'Ecole. Voyons ſi cette objection eſt fondée.

Lorſqu'on ſoutient que le bien & le mal moral nous ſont connus par des ſenſations immédiates, on nie qu'ils nous ſoient originairement connus par un acte de la raiſon; & ſuppoſé qu'on le nie à juſte titre, le principe que l'on établit, pour être vrai, en ſera-t-il moins philoſophique? Quand je dis que ce ſont les ſens qui me font diſtinguer le chaud du froid, le doux de l'amer, &c. m'objectera-t-on que je ne parle pas en Philoſophe, parce qu'il n'entre point de raiſonnement dans cette diſtinction? Mais c'eſt préciſément ce que je veux; le raiſonnement n'y entre point, par ce qu'il n'y doit point entrer.

Et où eſt le ſyſteme qui ſoit à l'abri de la même objection? Tous les raiſonnemens, & tous les axiomes, ſe réſolvent dans des idées ou dans des perceptions ſimples. On pourroit donc également nier de tous les ſyſtemes qu'ils ſoient bâtis ſur des principes philoſophiques, puiſqu'ils s'arrêtent tôt ou tard à des idées, ou à des perceptions, qui ne ſouffrent plus d'analyſe. Dans toutes nos recherches il eſt un terme où la raiſon elle-même exige que nous ceſſions de raiſonner, parce qu'une diſcuſſion ultérieure ne peut nous conduire qu'à la confuſion & à l'erreur. Celui, par exemple, qui entreprendroit de prouver que nous

diſcer-

discernons les qualités sensibles par le raisonnement, plus il entasseroit de syllogismes, plus il s'éloigneroit de la vérité.

Mais ce sentiment moral est une faculté occulte. . . . Le sentiment moral est la faculté qui nous découvre immédiatement le bien & le mal renfermés dans les actions humaines. Qu'y a-t-il ici d'occulte? Qu'y a-t-il de plus occulte que dans le sentiment physique? Je sens avec délices le doux parfum de la rose: je suis agréablement affecté d'une action généreuse, noble, héroïque. Je ne vois pas qu'il y ait rien de plus mystérieux dans l'un de ces cas que dans l'autre. Si l'on vouloit user de rétorsion, ne pourroit-on pas dire que ces prétendus raisonnemens sont des raisonnemens occultes; puisque tous les jours nous discernons le bien du mal, sans les avoir présens à l'esprit, & sans même les connoitre?

Mais envisageons de plus près ces qualités, ou ces vertus occultes que la Philosophie moderne réprouve.

Lorsqu'on demandoit aux Philosophes de l'Ecole pourquoi l'aimant attire le fer; ils répondoient que cela se faisoit par une vertu attractive, ou par une vertu sympathique: ou c'étoit ne rien dire, ou c'étoit avouer leur ignorance: & s'ils l'eussent entendu ainsi, la réponse eût été très raisonnable; car en effet, ce phénomene étoit produit par une cause occulte rélativement à eux. De quoi donc peut-on les reprendre? C'est d'avoir donné pour une explication ce qui n'en étoit pas une; c'est comme si un homme à qui je ferois une question, répondoit en Arabe, *je n'en sais rien*, & puis prétendoit avoir résolu la question.

Le cas que nous traitons est tout autre. Je ne m'intéresse au bien & au mal moral qu'en vertu de la connoissance que j'en ai, & autant que je puis les distinguer. Or l'on demande de quelle source me vient cette connoissance. Ici j'ai à opter entre le sentiment & la raison; c'est à dire, entre deux facultés connues de mon ame; & laquelle des deux que je choisisse, je puis assigner une fausse origine, mais je n'af-

n'aſſigne pas une origine occulte. La queſtion eſt analogue à celle-ci; d'où ſavez-vous que l'aimant attire le fer? Si je répons que les ſens me l'apprennent, eſt-ce parler un langage obſcur & inintelligible? Et que je diſe des qualités phyſiques, ou des qualités morales, qu'elles ſont ſenties; ne me fais-je pas également comprendre?

Le Sens Moral une fois admis, ou ſuppoſé, toutes les autres queſtions tombent d'elles-mêmes. Si l'on n'y peut point faire de réponſe, c'eſt qu'elles n'ont point de ſens, & ſont tout'à fait hors du ſujet. Que demanderez-vous par exemple? Sera-ce, pourquoi nous approuvons le bien, & désapprouvons le mal? Mais ces noms de bien & de mal n'ont été donnés qu'après coup aux actions qui nous ont inſpiré des ſentimens d'approbation & de blâme. Ce ſeroit donc demander pourquoi nous trouvons le miel doux & l'abſinthe amere. Sera-ce pourquoi nous n'approuvons pas le mal, & désapprouvons le bien? C'eſt demander pourquoi le blanc n'eſt pas noir, ou, comme dans la Comédie, pourquoi la nuit il ne fait pas jour? Pour répondre à de pareilles queſtions, on n'a pas beſoin de cauſes occultes. Le plus court eſt de n'y pas répondre.

Lorſque Descartes éleva une nouvelle Philoſophie ſur les ruines de l'Ecole, pour rendre raiſon de la formation du monde, & des phénomenes qui frappent nos ſens, il imagina des élémens, des matieres ſubtiles, des tourbillons. Perſonne ne le ſoupçonna alors d'avoir ramené dans ſa Phyſique les qualités occultes qu'il venoit de proſcrire. Ceux-même qui ont combattu ſon ſyſteme, n'ont pû nier que l'idée n'en fut très philoſophique. Et les Phyſiciens de nos jours, qui dans l'explication des phénomenes de l'aimant, de la lumiere, de l'électricité, ſuppoſent une matiere éthérée, qui ne tombe pas immédiatement ſous les ſens, ne furent jamais accuſés de parler le jargon ſcolaſtique. Auſſi ces accuſations ſeroient-elles extrémement déplacées; & pourquoi? Parce que ces hypotheſes ſont analogues au cours de la Nature, & ſe lient aux loix déjà connues. Je vois, dans le ſpectacle Lyrique, le char du Soleil qui traverſe les airs. Ce n'eſt aſſurément pas une

hypo-

hypothese obscure que de supposer qu'il est soutenu, poussé, ou tiré par des contrepoids, par des ressorts, par des machines cachées sous le théatre. C'est l'analogie qui me fait juger ainsi.

Transportons ceci dans le monde moral. Quand j'attribue la différence qui est entre le bien & le mal, à la sensation, je puis avoir tort; mais au moins je ne crée aucun nouveau principe; je ne fais qu'appliquer un principe suffisamment connu, & dont l'action n'est pas même cachée.

Mais, insiste-t-on, ce sont donc là des sensations innées. . . .

Je répons que le Sens Moral n'est pas plus inné que ne le sont les sens physiques: il est, comme eux, une faculté qui se déploye à la présence de certains objets: & quand on supposeroit que l'Ame n'est d'abord qu'une table rase, il faut toujours qu'elle puisse recevoir l'impression des objets, comme la table reçoit les figures ou les caracteres. Qu'on rejette, tant qu'on voudra, les idées innées, on ne peut nier au moins que l'ame ne sorte des mains du Créateur avec la faculté de sentir, puisqu'autrement elle n'auroit jamais de sensation.

Enfin, l'on pense avoir détruit le Sens Moral en lui donnant le nom d'*Instinct*, nom décrié parmi les Philosophes. Mais l'est-il à juste titre? Et ce que l'on y substitue est-il beaucoup plus lumineux? On le change contre celui de *Force*, & l'on croit avoir fait merveille. Mais où seroit le grand mal de l'appeller *Sens*, mot plus intelligible encore que celui de force, & plus analogue à ce que nous connoissons de l'économie de l'esprit humain?

Quand on voit exécuter aux animaux, & à l'homme même, certaines opérations régulieres, dont on ne peut placer l'origine dans la raison, quel inconvénient y auroit-il de se servir du terme d'*Instinct*; pourvu que ce terme ne désigne alors que le phénomene, à peu près comme celui d'Attraction dans la Physique Newtonienne? Cependant rien ne nous oblige ici de recourir à ce terme. Nous fondons la

Morale sur des sensations immédiates; & personne n'ignore ce que c'est que sentir.

La vérité est qu'en Morale, tout comme en Physique, il faut s'arrêter à certaines limites, que l'esprit humain ne sauroit franchir. Après avoir observé les faits particuliers, & les caracteres qui leur sont communs, on les rassemble sous des notions générales, que l'on érige en principes. Telle est, par exemple, la pesanteur, ou la Gravitation universelle; & quand on refuse cette force à la matiere, on se trouve arrêté à la force d'impulsion: & quand on veut aller plus loin, on se trouve arrêté à quelque autre force. Le Philosophe a fait son devoir, lorsqu'il est parvenu à subordonner les phénomenes particuliers à un phénomene général, analogue au cours de la nature, & applicable dans les détails; trop heureux encore, s'il y peut réussir! Je dirois même qu'il y a plus de Philosophie à savoir se borner aux notions claires, que l'expérience confirme, qu'à se perdre dans des subtilités placées trop loin de nous. On se fait, il est vrai, des principes plus étendus; mais, passé un certain point, plus un principe s'étend, plus il devient vague & obscur. Quand l'esprit systématique nous a emporté au delà d'une certaine région, il nous laisse dans les ténébres. Le Sage s'arrête au terme qui sépare les ténebres de la lumiere.

SECONDE PARTIE.

La Nature a attaché le plaisir & la peine à certaines perceptions de mon ame. Parmi ces perceptions, les unes se rapportent à mon corps, & m'avertissent de ce qui tend à le conserver ou à le détruire. D'autres me peignent les beautés de la Nature & de l'Art. D'autres enfin me font distinguer le bien & le mal qui est dans les actions, dans les moeurs, & dans les caracteres des hommes. Ces dernieres sont l'objet du Sens Moral.

Le Sens Moral ne produit donc, ni une seche approbation, ni une simple idée d'approbation ou de blâme, comme M. Hutcheson semble quelquefois s'exprimer. C'est le plaisir & la peine qui me font approuver

prouver & condamner. Juger une action bonne ou mauvaiſe, c'eſt en être, agréablement, ou déſagréablement, affecté. Voilà en quoi conſiſte le jugement moral, & le langage du coeur. Si, à la vue d'une action, mon ame demeure immobile & ſans s'ébranler, cette action me paroit indifférente. Si elle me cauſe un ſentiment agréable, elle me paroit bonne; & mauvaiſe, ſi elle me cauſe un ſentiment contraire; l'un & l'autre à proportion de l'intenſité du ſentiment.

Nous n'approuvons & nous n'aimons la vertu que parce que ſa contemplation nous donne du plaiſir; & faut-il s'en étonner? Ce plaiſir, & l'approbation ou l'amour, ſont exactement la même choſe. Si l'on appelle ceci amour propre, ou amour intéreſſé, il eſt ſûr que le parfait déſintéreſſement eſt impoſſible; & ſi impoſſible qu'on ne peut pas même s'en former l'idée. Ce ſeroit prétendre que l'on aimât & que l'on n'aimât pas, ou que tout à la fois l'on aimât & haït le même objet.

Mais ne ſeroit-il pas ridicule de dire que je trouve le miel doux, parce qu'il eſt de mon intérêt de le trouver ainſi? Il n'eſt pas moins ridicule de ſoutenir que nous trouvons la vertu aimable, parce que notre intérêt exige qu'elle le ſoit. Outre que cela eſt bien éloigné d'être généralement vrai; ſuis-je donc le maitre de déterminer les impreſſions que les objets doivent faire ſur mon eſprit? Aſſurément, ſi cela dépendoit de moi, je trouverois la coloquinte auſſi douce que le miel, & le vinaigre auſſi bon que le vin de Champagne. Je ſerois agréablement affecté de tous les objets; & ma vie entiere ſeroit un tiſſu de ſenſations délicieuſes.

Il eſt donc abſurde d'attribuer à des vues intéreſſées ce goût naturel qui me fait approuver la vertu & blâmer le vice. C'eſt un goût primitif, qui précede toute ſorte de vues & de réflexions. Le plaiſir & la peine qui conſtituent ſon eſſence, ne naiſſent point après avoir réfléchi ſur ce qui nous eſt utile ou nuiſible. Ils nous préviennent, ils s'élevent en nous, indépendamment de toute conſidération perſonelle, de tout retour ſur nous-mêmes.

Pour ſe convaincre que le bien & le mal moral nous frappent auſſi immédiatement que le bien & le mal phyſique, il n'y a qu'à conſidérer les cas où ces deux ſortes de biens & de maux ſont en conflit. Nous aimons la vertu malheureuſe, quoique nous n'aimions pas le malheur. Nous déteſtons le crime fortuné, quoique nous n'ayons aucune averſion pour les biens dont il eſt accompagné. Il y a plus: il ſemble que le crime en devienne plus noir à nos yeux, à meſure que la Fortune y répand ſes faveurs; & au contraire, la Vertu inébranlable au milieu des revers eſt le plus beau de tous les ſpectacles, un ſpectacle digne, comme l'a dit Séneque, d'attirer les regards complaiſans de la Divinité. Cela fait clairement voir qu'il eſt un plaiſir immédiat, attaché à la contemplation du bien moral; je dis un plaiſir indépendant de tout motif, de toute circonſtance étrangere; & que la Vertu n'eſt pas un vain nom.

Voici de nouveaux exemples de ce conflit, qui prouvent la même choſe. Qu'eſt ce que ces remords qui viennent allarmer le fortuné coupable dans l'yvreſſe même du plaiſir, & cette ſérénité de conſcience qui raſſure l'honnête homme dans le ſein de l'adverſité? C'eſt encore le Sentiment Moral, qui contredit, pour ainſi parler, le ſentiment phyſique, & redreſſe, en quelque façon, la diſtribution inégale des biens & des maux de la vie, & le déſordre apparent des événemens de ce monde. Preuve manifeſte que le Sens Moral exiſte, & agit par lui-même, & que ce principe n'eſt ſubordonné ni à l'amour propre, ni à aucun autre principe.

Je conviens que tout homme qui raiſonne juſte, & qui ſait calculer les ſuites de ſes actions, préférera la vertu au vice: il verra que ſur le tout l'homme de bien eſt plus heureux que le méchant. Cependant le Sens Moral n'a rien de commun avec ce calcul. Il exiſte avant qu'on ait calculé; il influe ſur ceux qui ne calculent point, ſur ceux-même qui croiroient ce calcul faux, & à qui leur Arithmétique donneroit un réſultat différent ou contraire.

Sup-

Suppoſons un homme entierement dépourvû de ce goût naturel que nous appellons le Sens Moral; mais qui, après avoir fait une juſte eſtimation des biens & des maux qui réſultent de la différente conduite des hommes, ſe détermineroit pour une conduite honnête, comme étant le parti le plus ſage qu'il puiſſe prendre. Cet homme, ſans doute, agit par des vues intéréſſees; il ne recherche que les récompenſes attachées à la vertu; il pourroit haïr la vertu, & la ſuivre, comme nous avalons une médecine déſagréable pour le bien de notre ſanté. Cet homme eſt-il vertueux? Il s'en faut bien. Cet homme aime-t-il la vertu? Non; l'Amour intéreſſé ne porte qu'abuſivement le nom d'amour. Cet homme n'aime-t-il rien du tout? Eſt-il incapable d'aimer? Il en eſt très capable, & il aime en effet les avantages phyſiques, & les agrémens qui découlent de l'obſervation des regles qu'il s'eſt preſcrites, & il les aime d'un amour très pur & très déſintéreſſé; il les aime pour eux-mêmes; il ſe les propoſe pour derniere fin, pour la fin où la conduite qu'il tient doit le faire parvenir.

C'eſt une grande erreur que de penſer qu'il n'y a que la vertu que l'on puiſſe aimer pour elle-même. Ou plutôt toute cette diſpute ſur l'amour pur & ſur l'amour intéreſſé, eſt remplie d'équivoques & de malentendus. Nous aimons pour eux-mêmes tous les objets dont la contemplation ou la jouiſſance excite en nous un plaiſir immédiat; car c'eſt dans ce plaiſir même que l'amour conſiſte. C'eſt ainſi que nous aimons les objets qui flattent nos ſens; c'eſt ainſi encore que nous approuvons & que nous aimons la vertu. Et c'eſt ce que vouloient dire les Anciens en diſant qu'elle eſt ſa propre récompenſe. Si elle a déjà tant de charmes lorsque nous la contemplons hors de nous; de quelles délices ne doit-elle pas inonder nos coeurs, lorsque nous pouvons la contempler en nous-mêmes? Avouons cependant que quelques uns de ces Philoſophes, les Stoïciens ſurtout, outroient cette maxime. Selon eux, la ſatisfaction interne dont le Sage jouit, le rend inſenſible à tous les maux: les tourmens les plus horribles ne ſauroient troubler ſa félicité; il ne ceſſe pas d'être heureux dans le taureau même de Phalaris. Des opinions auſſi extrava-

gantes

gantes ne valent pas la peine d'être réfutées. J'aimerois autant dire à un homme en proye aux douleurs aigues de la goutte ou de la gravelle; promenez vos yeux sur ce paysage riant, voyez ce beau tableau, & vous serez guéri. Le sentiment de la beauté morale, comme celui de la beauté physique, ne donne qu'un degré de plaisir, qui peut être balancé, effacé même, & réduit à une quantité négative, par des peines prépondérantes.

J'ai nommé indifféremment approbation & amour ces sentimens qui nous font connoitre le bien moral; parce que toute approbation sentie est en effet un degré d'amour, ou si l'on veut, un élément de l'amour. Quoique cette approbation & cet amour ne soient pas la vertu même, ce sont pourtant des affections louables, des tendances vers la vertu.

Ici se présente une conséquence qui paroit d'abord assez singuliere, mais qui n'en est pas moins juste. C'est que cet amour pur de la vertu, qui passe pour une chose si difficile, pour le dernier degré de la perfection mystique, & chez bien des gens pour une pure chimere; que cet amour, dis-je, est la chose du monde la plus ordinaire, & la plus naturelle. Chaque sensation morale est une acte d'amour pur, où, sans y chercher aucun profit, sans aucune vue mercenaire, notre ame découvre son affection pour le bien à cause du bien, où elle chérit la vertu à cause d'elle-même.

Direz-vous qu'elle ne la chérit qu'à cause du plaisir qu'il y a à la chérir? Mais nous avons vû que ce plaisir & cet amour ne sont pas deux choses différentes. Elle ne se dit point: je m'en vais aimer la vertu pour avoir du plaisir; car il ne tient pas à elle d'aimer ou de n'aimer pas. Voir le bien, & sentir ce plaisir approbateur, c'est un seul & même acte. Or je défie le Mystique le plus absorbé dans la vie intérieure, de concevoir un amour plus pur. Que dis-je? C'est ici le seul amour possible. Les hommes, les Anges, Dieu-même, ne sauroient aimer autrement.

Je

Je vais plus loin, & je demande, s'il se peut un amour plus pur que celui qui se termine dans l'objet aimé, sans se proposer aucun avantage à acquérir par le moyen de cet objet? Combien donc n'est pas désintéressée l'affection de la plûpart des hommes pour la vertu? Ils l'aiment sans la pratiquer. Les plus vicieux ne sauroient refuser leur approbation, leur estime, leur admiration même, à des traits d'humanité, de générosité, de grandeur d'ame, dont ils ne se sentent pas capables. On ne peut leur soupçonner aucun des motifs que l'on pourroit soupçonner à un homme de bien. Ainsi les plus grands scélérats seroient ceux qui approuvent, & qui aiment la vertu avec le plus de désintéressement.

Mais, en effet ce désintéressement est égal chez tous les hommes; & il n'y a aucun mérite à cela: il n'y a pas plus de mérite, dis-je, à approuver la vertu, & à blâmer le vice, qu'à préférer le doux à l'amer, à avoir faim & soif, & à sentir les autres mouvemens de la nature. Les sensations ne sont point soumises à l'empire de la volonté: nous les éprouvons nécessairement à la présence des objets propres à les faire naitre.

Rien donc de plus frivole que ces disputes embrouillées sur l'amour pur, & sur l'amour intéressé. Plusieurs Moralistes ont regardé le désintéressement comme le caractere distinctif des affections honnêtes. Mais, de quelque maniere qu'ils définissent l'intérest & le désintéressement, on trouve également le premier dans les affections les plus honnêtes, & le second dans les affections les plus deshonnêtes. On peut faire voir que la bienveillance & la haine sont également intéressées ou désintéressées, dans tous les sens que l'on voudra attacher à ces expressions. Les passions les plus brutales & les plus vicieuses ne sont pas plus réfléchies, que les affections les plus douces & les plus louables. On ne se passionne pas dans la vue d'augmenter son bonheur, en assouvissant sa passion. Tout au contraire, le plaisir que l'on y trouve, n'en est un qu'autant que la passion préexiste; c'est elle seule qui le détermine à être plaisir. Qui est-ce qui d'un esprit calme désireroit de

voir couler le ſang humain? Et ſi on pouvoit ſe donner cet affreux déſir, où eſt l'homme qui ſe le donneroit, ou qui crût y gagner en ſe le donnant?

Enfin l'amour propre, ſi l'on entend par là ce ſentiment naturel qui veillant à notre conſervation nous fait rechercher le bien & fuir le mal phyſique, n'eſt ni un principe vicieux, ni oppoſé au Sens Moral. La ſeule différence entre ces deux principes, c'eſt que le premier ſemble tendre plus directement au bien de l'individu, & l'autre au bien de l'eſpece. Mais qu'eſt ce que le bien de l'eſpece? La ſomme du bien dont jouiſſent les individus qui la compoſent. Le bonheur de l'eſpece réſulte du bonheur des individus, & reflue ſur eux. Que chaque individu cherche ſon véritable bien; l'eſpece ſera heureuſe. Que l'eſpece ſoit heureuſe, les individus le ſeront auſſi. Ici donc l'amour propre, & le Sens Moral, loin de ſe combattre, ſont deux principes qui concourent au même but. L'amour propre ne dégénere en vice, & ne contrarie le Sens Moral, que lorſque corrompu par des paſſions qui préſentent de fauſſes idées de bonheur, il cherche le bien particulier aux dépens du bien général. Et ceci au fond n'eſt qu'un faux amour propre, ou un amour propre mal-entendu.

TROISIEME PARTIE.

Il me reſte à comparer la Morale du Sentiment avec la Morale raiſonnée.

Ce que je vois d'abord, c'eſt qu'il n'y a, entre ces deux Morales, aucune oppoſition, quant aux préceptes, ou à la doctrine. Elles preſcrivent les mêmes devoirs, elles établiſſent les mêmes regles de conduite. Soyez juſte, humain, bienfaiſant: c'eſt une voix qui ſort du tribunal de la raiſon, auſſi-bien que du fond de mon coeur.

Le même probleme admet pluſieurs ſolutions. Il ne répugne point qu'une vérité ſentie ſoit encore connue par le raiſonnement. Nos ſens ne découvrent-ils pas des phénomenes que le Phyſicien qui

a médité la nature & les propriétés des corps, apperçoit dans leurs causes, & que souvent il prévoit avant de les voir?

Le Sens Moral approuve immédiatement une certaine action. Vous me démontrez que cette action est conforme à la convenance des choses, à la raison éternelle, à la perfection de l'Univers, à la volonté du supreme Législateur, à l'amour propre bien entendu. Ce n'est que la même vérité, présentée sous différentes faces: & il est très agréable de se convaincre que notre goût primordial s'accorde si bien avec la raison, avec la perfection, avec la volonté divine, & avec notre véritable intérêt.

Il n'est point de systeme de Morale avec lequel, par rapport aux conséquences pratiques, notre principe ne puisse s'accommoder; l'on diroit presque qu'il est l'abrégé, ou une espece de concentration de ces systemes. Je ne compte point ici ces doctrines absurdes, fondées sur la supposition que tous les hommes se haïssent naturellement, que l'état de Nature est une guerre de tous contre tous, qu'il n'y a entre la vertu & le vice qu'une différence arbitraire, & que la Morale est la fille de la Politique. Ces maximes révoltent la raison, aussi-bien que le sentiment; ce sont des blasphemes contre l'humanité.

Mais quelle est, dans notre esprit, la premiere source de la Moralité? D'où nous vient à tous la connoissance originaire du bien & du mal moral? Comment la Nature nous instruit-elle de nos devoirs? Ici les Philosophes que j'ai en vue, soutiennent que cette connoissance ne peut s'acquérir que par l'usage de la raison, ou par une opération de l'Entendement. Les uns vous diront qu'il faut envisager les différentes rélations des objets; les autres qu'il faut réflêchir sur ce qui contribue à notre perfection. Un Ecrivain fort ingénieux (*) a réduit toute la différence morale au mensonge & à la vérité. Quelques uns l'ont cherchée dans une volonté arbitraire de Dieu, ce qui est une erreur grossiere; d'autres dans la volonté de Dieu réglée sur son entendement, ce qui retombe dans les principes dont nous venons de parler.

(*) *Wollaston.*

ler. Ceux qui ont remonté le moins haut, ont pris pour base le bonheur & le malheur, c'est à dire, ce bonheur & ce malheur positif qui reste après la compensation des maux par les biens & des biens par les maux.

Ce sont ces sortes de principes que j'appelle raisonnés, ou intellectuels. Ils tiennent tous d'assez près les uns aux autres; & leur différence ne consiste peut-être que dans le plus ou le moins d'abstraction. Mais notre tâche, c'est de les comparer avec le Sens Moral, auquel ils sont tous également opposés entant que principes.

Je ne saurois, je l'avoue, me persuader que ce soit aucun de ces principes qui détermine nos jugemens moraux. Il me semble que nous approuvons & désapprouvons immédiatement les actions, les moeurs, & les caracteres, aussi-tôt qu'ils paroissent devant nous, ou qu'ils nous sont représentés. Seroit-il possible que le jugement moral ne se trouvât qu'au bout d'une chaine de raisonnemens dépendante d'un principe abstrait? Le peuple ignore absolument, & ces principes, & l'art d'en tirer des conséquences. Le Philosophe, qui les invente, ou qui les étudie, ne les applique jamais dans l'occasion; il est aussi immédiatement frappé du bien & du mal moral que le reste des hommes: & quand il se proposeroit de faire usage de ces notions abstraites, il n'en a pas le tems; avant qu'il les ait arrangées, le sentiment a déjà décidé.

Croira-t-on en effet, que la Nature, qui nous avertit, par des sensations immédiates, des biens & des maux physiques, ait placé si loin de nous la connoissance du bien & du mal moral; qu'elle prenne tant de détours pour nous en instruire; qu'elle en ait attaché la découverte à de pénibles méditations, aux subtilités de la Philosophie, à une Dialectique litigieuse? Je n'aurois point de peine à le croire, si c'étoient là des questions de simple curiosité, ou du moins d'une utilité fort éloignée. Il est assez dans l'ordre qu'elle nous fasse acheter ces sortes de Sciences par la recherche & le travail. Mais la Science la plus importante, la plus indispensablement nécessaire à tous les hommes, sans laquelle il n'y a point de vrais biens dans la vie, ne seroit-

elle

elle qu'à la portée de quelques ſpéculateurs? Cela eſt ſi peu naturel, ſi contraire à l'expérience, que je ne crois pas que perſonne puiſſe ſérieuſement le ſoutenir.

Si tous les hommes, ſans en excepter les plus dépravés & les plus barbares, donnent des indices d'une connoiſſance du bien & du mal; ſi l'on en trouve des traces jusques dans les enfans & dans les animaux, je ne vois pas de quel droit on peut attribuer ces connoiſſances au raiſonnement. D'ailleurs, les principes raiſonnés dont nous avons fait l'énumeration different entr'eux; & quoique peut-être on parvienne à les concilier jusqu'à un certain point, ils ne ſont pourtant pas les mêmes. Comment donc ſe pourroit-il que des principes qui ne ſont pas même communs à tous les Philoſophes, fuſſent communs à tous les hommes?

Ceux qui ont ſenti les inconvéniens qu'il y a à placer la ſource de la doctrine des Moeurs dans un raiſonnement en forme, appuyé d'un principe abſtrait, n'ont pourtant pas crû devoir la chercher hors de l'entendement. Ils ſe ſont reſtraints à la vue immédiate. Notre entendement, ont-ils dit, voit la convenance, ou la diſconvenance des actions, auſſi évidemment & auſſi promptement qu'il voit qu'une ligne a deux bouts, ou qu'un triangle a trois angles.

Cette opinion eſt plus plauſible, elle a quelques difficultés de moins que la précédente. Cependant il en reſte encore aſſez contre l'une & l'autre.

Eſt-il vrai que la connoiſſance du bien & du mal moral ſe borne à un acte intellectuel, & ne conſiſte que dans un ſec raiſonnement, ou dans une ſtérile intuition? En conſidérant une figure, en liſant un axiome, ou en ſuivant le développement d'une propoſition de Géométrie; ſuis-je affecté de la même façon que lorsque je vois exercer une acte de bienfaiſance & d'humanité, ou même, lorsque j'en entens le ſimple récit? Si dans ces deux rencontres votre eſprit ſe trouve dans la même aſſiette, je conviens que nous n'avez point de ſenſation morale; mais je doute fort que vous ayez des moeurs.

Je demande, en un mot, si la vue intellectuelle qui discerne le bien du mal, est accompagnée ou suivie d'un sentiment. Le nier, ce n'est pas seulement contredire l'expérience uniforme du genre humain, & démentir l'histoire de tous les tems, & de tous les peuples; c'est détruire la Morale de fond en comble, en la réduisant à une froide spéculation. Les vérités purement intellectuelles ne sont pas obligatoires. Quand je concevrois toutes les propriétés du cercle, je ne suis pas obligé pour cela de faire des cercles: quand je sais que la ligne droite est la plus courte entre deux points; cela ne m'empêchera point de décrire des courbes. Je vois un homme qui va se noyer, sans rien sentir à cette vue; je le laisserai périr sans remords. Qu'est-ce en effet qui m'engagera à le secourir? Sera-ce l'aptitude physique de ma main à le tirer de l'eau? Mais ma main a la même aptitude à demeurer immobile; elle en a une autre pour le plonger? Sera-ce quelque convenance abstraite ou métaphysique? Je ne le conçois gueres, mais je veux que cela soit: qu'en arrivera-t-il? J'aurai une vérité éternelle dans l'esprit: mais cette vérité ne sera pas un motif. Il en sera comme si je me disois; deux & deux font quatre.

Deux exemples, empruntés d'un Philosophe célebre, mettront ceci dans un plus grand jour.

Un jeune rejetton, dit ce Philosophe, qui en dérobant la seve à l'arbre dont il est sorti, le fait dessécher, est précisément dans le cas de Néron, lorsqu'il fit mourir Agrippine. Et cela est très vrai, en supposant que la Morale ne consiste que dans des rapports abstraits, qui sont ici les mêmes.

Je sauve la vie à un homme; cet homme me plonge le poignard dans le sein. Quel rapport y a-t-il entre ces deux actions? Celui de contrariété; ce sont deux actions contraires. Mais supposons que je rende un service signalé à celui qui m'a fait une injure atroce. Il y a ici le même rapport de contrariété. Cependant la premiere de ces actions est détestable; & la seconde un effort sublime de vertu. Ce

 n'est

n'eſt donc pas le rapport métaphyſique, mais le ſentiment moral, qui en fait la différence.

Si ce ſentiment nous manquoit, toutes les vérités de pratique ne ſeroient plus que des vérités ſpéculatives, & l'inaction ſeroit le moindre mal qu'il y auroit à en appréhender. Une vérité abſtraite eſt une foible digue contre les attraits du plaiſir ſenſuel, & contre le torrent des paſſions. Vous venez de lire douze volumes de Morale, où toutes les vertus & tous les vices ſont traités par chapitres, & ſyſtématiquement démontrés. Vous en ſentez-vous plus de diſpoſition à la vertu? C'eſt beaucoup ſi cette lecture ne vous en a point dégoûté. L'amour de la vertu ne s'enſeigne pas; pour ſe faire aimer, elle n'a qu'à paroitre: le germe du bien eſt dans tous les cœurs; mais la ſpéculation ne va point jusques-là: il faut quelque choſe de plus pour le faire éclorre. Qu'un Orateur diſſerte froidement ſur les mœurs; qu'il analyſe & prouve tous nos devoirs. Peut-être conviendrons-nous en baaillant qu'il a raiſon; mais ſon diſcours ne fera pas la moindre impreſſion ſur nous. C'eſt bien autre choſe, lorsqu'on nous peint, de ſes vraies couleurs, la beauté céleſte de la vertu, lorsque dans de grands exemples on nous la montre comme perſonnifiée, lorsqu'on nous préſente de ces modeles divins où elle brille dans tout ſon éclat. Quel effet ne fait point ſur la ſcene la vertu miſe en action!

Voyez à nos ſpectacles,
Quand on peint quelque trait de candeur, de bonté,
Où brille, en tout ſon jour, la tendre humanité:
Tous les cœurs ſont remplis d'une volupté pure,
Et c'eſt là qu'on entend le cri de la Nature.

C'eſt le langage d'un excellent Poëte, qui par dévotion vient de renoncer au Théatre, & que ces vers devroient y rappeller.

Mais cette approbation unanime, ces larmes délicieuſes, ce cri de la Nature, ne partent-ils pas du ſentiment? Ne prouvent-ils pas que

que c'est le sentiment qui juge du bien & du mal moral, que le goût pour la vertu est dans tous les esprits, qu'il dépend, comme tous les autres goûts, du degré de sensibilité, & s'enflamme à la vue des grands modeles.

Ne cherchons donc la source de la doctrine des Mœurs, ni dans une Raison qui argumente, ni dans une Intuition dénuée de sentiment.

Mais ne pourroit-on pas conserver l'intuition, en la combinant avec la sensation; en sorte qu'il en résultât des opérations mixtes, composées d'un côté de vues intellectuelles, & de l'autre de sentimens agréables ou désagréables?

Il est hors de doute que cela rapprocheroit de bien près les deux sortes de principes que nous comparons. On ne sauroit nier que les phénomenes du Sens Moral ne résultent de la constitution des objets extérieurs, & de cette rélation, tant entr'eux qu'avec nous, qui les rend propres à nous affecter d'une certaine façon. Il ne resteroit donc qu'à décider, si nous appercevons cette constitution des objets, & ces rapports, dans le tems que nous éprouvons le sentiment moral? Or je laisse cette décision à l'expérience d'un chacun.

Il est des Philosophes qui pensent que les notions abstraites, à force de les répéter, & de nous familiariser avec elles, peuvent se changer en sensations. Voilà pourquoi ils nous recommandent la méditation assidue des principes abstraits de la Morale: l'habitude que nous aurons contractée de concevoir promptement ces principes, & de parcourir, d'un clin d'œil, toute la chaine des conséquences, formera en nous ce tact spirituel qui fait presque immédiatement distinguer le bien du mal.

Cette idée est très belle. Elle paroit expliquer l'origine ou la formation du sens moral, en même tems qu'elle le fait rentrer dans la classe des facultés intellectuelles. Il me semble que, dans cette hypothese, on pourroit encore rendre raison du plaisir ou de la peine qui accom-

accompagnent nos ſenſations morales. Ces plaiſirs & ces peines étoient peut-être attachés ſéparément à chacune des vues abſtraites qui entrent dans le jugement moral. Or, comme ces vues y ſuccedent l'une à l'autre avec beaucoup de rapidité, ces ſentimens épars ſe raſſemblent, & ſe pelotonnent, pour ainſi dire, dans le ſentiment total: & c'eſt probablement ce qui en fait la vivacité.

Cette Théorie ne détruit point le Sens Moral; elle ne fait que le réſoudre dans un principe ſupérieur: & comme elle réſout dans le même principe le ſentiment du Beau, & jusques aux ſens phyſiques, elle laiſſe aux ſenſations morales la même place dans notre eſprit qu'elle accorde à toute autre ſenſation. Car on ſait que, dans ce ſyſteme, toute perception où les principes, les rapports, les idées abſtraites, ſont envelopés d'une maniere confuſe ou obſcure, revient également à ce que nous appellons ſentir.

Cependant il ſe préſente ici quelques doutes. Et d'abord, il paroit que ce n'eſt que par l'uſage & par l'exercice que nous pourrions acquérir le Sens Moral, & apprendre à y convertir nos notions abſtraites: ce qui s'écarteroit de l'analogie des autres ſens, & de la marche ordinaire de l'eſprit humain, qui des ſenſations s'éleve aux idées intellectuelles; au lieu qu'on le fait ici deſcendre des idées intellectuelles aux ſenſations. Cela ſuppoſeroit donc des principes, des axiomes généraux, que nous n'aurions point obtenus par la généraliſation; des idées abſtraites qui ne ſeroient abſtraites de rien, qui exiſteroient en nous indépendamment de l'impreſſion, tant des ſens extérieurs que du ſens interne, & même avant cette impreſſion: ou, s'il faut tout dire, cela ſuppoſeroit des idées innées.

D'un autre côté, il ſemble qu'il faudroit beaucoup rabattre de l'univerſalité de notre principe. Il ne ſeroit gueres acceſſible qu'aux ſpéculateurs; il n'y auroit que les Philoſophes qui, à force de méditer ſur les abſtractions, apprendroient à ſentir. Au moins faudroit-il leur attribuer un degré fort ſupérieur de ſenſibilité morale; & je crains que ce ne ſoit le contraire. A' meſure qu'on ſubtiliſe la Morale, &

 qu'on

qu'on la délaye dans les abſtractions, le ſentiment s'émouſſe: on s'accoûtume peu à peu à ne regarder la Vertu que comme un objet de ſpéculation. De là naiſſent le relâchement & l'indifférence; ou du moins n'eſt-ce plus le même zele, ni la même ardeur pour la pratique de nos devoirs. Ce n'eſt gueres dans l'école des Métaphyſiciens que ſe ſont formés ces héros de morale, ces eſprits embraſés de l'amour de la Vertu au point de lui ſacrifier tout autre intérêt, & de prodiguer pour elle leurs biens, leur ſang, & leur vie. Mais c'eſt de quoi je me propoſe de traiter plus amplement dans un Diſcours ſur l'Enthouſiasme Moral.

Enfin, les docteurs du Sens Moral ne reconnoitront jamais cette converſion d'idées intellectuelles en ſentiment. Ils prétendent, au contraire, que les principes de la Morale raiſonnée ne ſont que des abſtractions de la Morale ſentie; qu'ils ne ſont que le Sens Moral réduit en Métaphyſique. Ils ſe ſervent d'une fiction. Suppoſons, diſent-ils, que tout fût à rebours, que le ſentiment interne approuvât ce qu'il condamne, & blâmât ce qu'il approuve: il y a toute apparence que la faculté abſtractive ſe feroit une Morale diamétralement oppoſée à celle que nous avons. On ſe trompe en attribuant originairement à la Raiſon, ou à l'Intellect, des opérations qu'ils ne font, pour ainſi dire, que quinteſſencier. Telles ſont peut-être les notions du beau & du difforme, du parfait & de l'imparfait, du bien & du mal; qui d'abord ne ſont en nous que le plaiſir & la peine attachés à la vue de certains objets, ou de certaines actions, & dont enſuite on fait des idées en les généraliſant. On peut ſans doute rechercher après coup, pourquoi ces choſes nous plaiſent ou déplaiſent, & y découvrir certaines circonſtances communes, que nous appellerons convenance, beauté, perfection &c. Mais, ce qui eſt plus vrai encore, c'eſt que le ſentiment nous conduit à ces généralités, & non ces généralités au ſentiment.

L'Objection la plus forte que je connoiſſe contre le Sens Moral, & que je ne diſſimulerai point, c'eſt celle-ci.

Si

Si la Morale n'eſt qu'une affaire de ſentiment, ou de goût, elle pourroit fort bien n'être appropriée qu'à notre eſpece; & qui ſait même ſi elle eſt commune à l'eſpece entiere? Alors que devient l'éternité des Loix de la Nature?

Tâchons de traiter, avec une ſobriété philoſophique, des matieres auſſi délicates, & j'oſe le dire, des matieres auſſi reſpectables.

Lorsque, dans la chaleur de la diſpute, on a conduit une queſtion jusqu'aux abîmes du Scepticiſme, il arrive pour l'ordinaire que les deux partis s'y trouvent également arrêtés: & alors ce qu'ils peuvent faire de plus ſage, c'eſt de retourner tout doucement ſur leurs pas, & d'apprendre à devenir plus modeſtes.

Y ſonge-t-on bien lorsqu'on jette ſur le Sens Moral le ſoupçon de n'être affecté qu'à l'eſpece humaine? Et ne voit-on pas que le même ſoupçon peut retomber ſur la Raiſon, & ſur l'Entendement? Eſt-il plus certain que tous les entendemens ſoient formés ſur le même modele, & que notre ſcience ſoit la ſcience univerſelle des eſprits? D'ailleurs la Raiſon ne tire-t-elle pas des ſens les matériaux qu'elle employe? Et où en ſerions-nous, ſi comme un Philoſophe moderne le prétend, elle n'étoit elle-même qu'une maniere de ſentir?

'A ne conſidérer que notre eſpece, je ne ſais en vérité ſi le Sens Moral ne s'y manifeſte pas plus univerſellement que la Raiſon? Combien peu d'hommes ſont en état, je ne dis pas, de former & d'inventer d'eux-mêmes les principes abſtraits de la Morale, mais de les ſaiſir lorsqu'ils leur ſont préſentés? Cependant ces mêmes hommes diſtinguent le bien du mal auſſi ſûrement que le peut faire le Philoſophe le plus profond. Mais enfin, quand il y auroit des monſtres en fait de ſenſation, n'y en a-t-il point en fait de raiſonnement? Les eſprits faux ſont-ils plus rares que les cœurs corrompus? Suppoſons qu'il y ait des individus à figure humaine, nés ſans le moindre goût pour la vertu, & ſans la moindre étincelle de ce goût: ces individus auront encore moins ces principes raiſonnés, ou

intellectuels, sur quoi vous fondez la Morale; & vous perdrez vos peines à vouloir les leur donner.

J'ai dit que le Scepticisme, poussé à un certain point, se détruit lui-même. Nous nous méfions de nos facultés; mais nous sommes, à tout moment, obligés de nous en servir: nous avons beau leur contester leurs droits; elles ne laissent pas de les exercer, & de remplir leur destination. Nous ne pouvons employer que les matériaux & les instrumens qui sont en notre disposition. Nous ne pouvons concevoir dans les êtres supérieurs que des propriétés rélatives à celles que nous remarquons en nous, ou autour de nous. Si, dans les animaux, nos concitoyens sur ce globe, nous observons déjà quelque chose de semblable au Sens Moral, je ne vois pas ce qui nous empêcheroit de l'attribuer encore aux classes qui sont au dessus de nous. Le bonheur des Intelligences pures, & la béatitude divine, consistent sans doute dans un plaisir moral, analogue à celui que le sentiment de la vertu nous fait goûter ici-bas.

Sans nous étendre sur l'éternité des Loix Naturelles, voyons en peu de mots si le Sens Moral y peut porter atteinte.

Les vérités morales ne sont éternelles qu'entant qu'on les envisage comme des propositions générales, & purement spéculatives. Mais la Morale du sentiment peut être généralisée, & réduite à de pareilles propositions; elle peut donc jouir du même privilege. Les vérités les plus éternelles, s'il est permis de parler ainsi, sont-elles autre chose qu'une combinaison d'idées abstraites qui ont leur source dans des perceptions sensibles?

Nous avons vu que les conséquences de tous les différens principes de Morale sont les mêmes. Que l'on suppose donc le principe de Convenance, celui de Perfection, ou tel autre qu'on voudra: nos sensations internes peuvent s'accorder avec ces principes, quand même ils nous seroient entierement inconnus. Il est tout naturel de croire que les actions & les moeurs que le Sens Moral approuve,

sont

ſont les mêmes qui obtiennent l'approbation de la ſupreme Intelligence, comme étant les plus dignes de la nature raiſonnable, les plus propres à perfectionner l'homme, les plus conformes à l'ordre univerſel. Et je ne vois pas que les loix naturelles, ou les préceptes moraux, aient beſoin d'une autre éternité.

On diſtingue communément entre vérités néceſſaires ou abſolues, & vérités contingentes ou conditionelles. Les premieres, dit-on, ne ſuppoſent que la ſimple poſſibilité, les ſecondes l'exiſtence actuelle. Je ne ſais ſi cette diſtinction eſt juſte à tous égards. Il ſuffit, je l'avoue, que le triangle ſoit poſſible pour pouvoir regarder comme vrayes toutes les propoſitions d'Euclide qui le concernent. Mais ne ſuffit-il pas auſſi qu'un certain arrangement, un certain ſyſteme ſoit poſſible, pour pouvoir en affirmer tout ce qui y eſt compris? Si l'on dit que le triangle eſt néceſſairement & éternellement poſſible, le ſyſteme dont je parle l'eſt auſſi, parce que je ſuppoſe qu'il n'implique point contradiction. Et ne puis-je pas me repréſenter une combinaiſon dont les parties tiennent enſemble, ſous la notion d'un triangle? Si l'on veut chercher la différence en ce que ce dernier ne ſuppoſe rien à faire, rien à exécuter; j'en conviens par rapport aux vérités idéales qui réſultent d'un triangle idéal; mais n'en eſt il pas de même d'une combinaiſon, ou d'un ſyſteme idéal? Si de l'idée on paſſe à la réalité, les deux cas ſont encore paralleles: au premier il y a un triangle à faire, au ſecond un ſyſteme à exécuter.

Si l'on croit contingentes les vérités fondées ſur le Sens Moral, parce qu'elles ſuppoſent la condition de l'exiſtence d'êtres doués de ce Sens; la Morale raiſonnée ne ſuppoſe-t-elle pas également l'exiſtence d'êtres doués de raiſon? A' le prendre ainſi, toutes les vérités ſeroient contingentes; & puis de quoi diſputons-nous?



ANALYSE DE LA RAISON.

PAR M. SULZER.

Après avoir lû l'année passée un Essai sur le Génie, dans lequel j'avois entrepris d'analyser cette qualité de l'esprit, il m'a paru ensuite qu'on pourroit faire la même chose par rapport à la Raison. Cette recherche pourroit même être plus importante que l'autre. C'est principalement par la raison que l'homme se distingue des bêtes: & si nous pénétrons jusqu'à l'origine de ce don précieux de la Nature, si nous découvrons les causes qui le produisent & les circonstances qui le soutiennent; nous verrons par quel moyen la Nature a su nous élever à un dégré plus haut que les autres animaux, & cette connoissance nous conduira à la découverte des moyens de perfectionner cette prérogative de notre nature: but auquel tendent l'éducation & une partie de la Législation.

Je pense qu'il n'y a plus personne qui soit sérieusement du sentiment de *Des-Cartes*, que les animaux ne sont que des machines destituées du sentiment intérieur. C'est une des erreurs les plus grossieres, qui se soyent glissées dans la Philosophie. La ressemblance entre l'homme & les autres animaux est trop frappante, pour qu'il soit possible de nier qu'ils soyent doués de la plûpart des facultés que nous attribuons à notre ame. Il n'y a que la raison, le goût, & le sens moral, qui leur manquent, pour ressembler en tout à l'espece humaine.

On conviendra donc, qu'il y a des êtres doués du sentiment intérieur, capables d'avoir des idées, ayant de la mémoire, l'imagination, une espece de jugement; & qui, malgré cela, n'ont ni la raison, ni le goût, ni le sens moral: & c'est une question qui mérite notre attention, de savoir, d'où dépendent ces prérogatives que la Nature

nous

nous a accordées, en les refusant aux autres animaux, qui d'ailleurs nous ressemblent par tant d'endroits. Je me borne dans ce Mémoire à cette partie de la question qui regarde le Raison.

On prend le mot *Raison* dans un double sens. Il signifie, ou l'enchaînement des vérités universelles, comme *Leibniz* l'a remarqué, ou bien la faculté de raisonner, ou d'appercevoir cet enchainement; sens dans lequel *Wolff* a pris ce mot. Dans le premier sens, la Raison est, dans chaque être raisonnable, le recueil ou la masse des connoissances philosophiques qu'il possede; & dans l'autre, la faculté de les acquérir. Nous avons donc deux choses à examiner; la faculté même, & ce qu'elle produit. Je commence par le premier point.

Je pourrois supposer ici ce que le célebre *Wolff* a remarqué dans sa Psychologie, sur la Raison, le raisonnement, & les différentes facultés de l'ame qui y concourent. Mais, sachant que les Ecrits de ce Philosophe ne sont pas lûs autant qu'ils le méritent pour le fond des choses qu'ils renferment, & qu'ils sont presque inconnus hors de l'Allemagne, je crois devoir exposer en peu de mots, ce que je suppose ici comme démontré par ce Philosophe.

La Raison, selon lui, est la faculté de connoitre plus ou moins la liaison entre les vérités universelles. Car raisonner n'est autre chose que connoitre, ou sentir, que telles propositions suivent nécessairement de telles autres. Le raisonnement suppose donc nécessairement des notions générales, par conséquent des idées particulieres desquelles les notions résultent ensuite; il suppose de plus le jugement, parce que c'est par cet acte de l'esprit qu'on forme les propositions fondamentales du raisonnement. Or le jugement suppose nécessairement l'attention & la réflexion, qui dépendent en partie de l'imagination, de la mémoire, & de l'esprit. De là il s'ensuit que la Raison se forme par le concours de toutes les facultés de l'esprit; qu'elle suppose la force représentative de l'ame, la faculté d'avoir des idées, l'imagination, la mémoire, l'esprit, l'attention, la réflexion, & le jugement.

Voilà

Voilà en abrégé l'analyse que *Wolff* a faite. Pour la pousser plus loin, je me propose de rechercher ici les élémens de ces élémens.

La premiere propriété de tout être doué du sentiment intérieur, celle qui, en même tems, paroit être la source de toutes les autres, est la *force représentative*, comme *Leibnis* & *Wolff* l'ont appellée, ou ce principe d'activité qui nous porte, & nous force en quelque façon, à nous prêter aux impressions excitées en nous par les sens. C'est cette force qui donne aux êtres intelligens l'activité, la vivacité, & la sensibilité; c'est elle qui paroit produire tout les changemens qui arrivent dans l'intérieur des substances. Nous n'avons aucune mesure de cette force: nous ignorons même si elle est plus grande dans un sujet que dans l'autre; si elle agit avec plus de force dans l'homme que dans la bête; ou si, semblable à la gravité des corps terrestres, elle est la même dans les différens sujets. Cependant nous savons qu'elle est gênée dans son action par l'état actuel des organes du corps, en sorte qu'elle ne se dévelope que proportionellement à cet état. Nous voyons le même homme, tantôt plus, tantôt moins actif; la succession de ses idées paroit, tantôt plus, tantôt moins rapide. Nous savons enfin que, quand les organes du corps sont entierement assoupis, comme dans le sommeil profond, cette force ne produit aucun changement sensible, & qu'elle ressemble alors aux forces mortes des corps, qui ne sont que des efforts, sans action. Par là il est évident qu'un être peut être doué de la force représentative, telle qu'elle est dans l'homme, sans parvenir à la raison: puisque le corps peut être tellement organisé, que cette force ne produise aucun effet sensible.

La question, comment la constitution du corps peut altérer l'action de l'ame, est une des plus embarassantes. Tout le monde sait ce qu'en pensent les différentes Ecoles de Philosophie. Sa solution paroit surpasser nos connoissances. Cela nous oblige de supposer ici que l'être est déjà doué du sentiment intérieur; de sorte que la question dont la solution doit résulter de nos recherches présentes, est celle-ci: *Le sentiment intérieur* (produit d'une façon inexplicable pour nous,

nous, par le concours de la force active de l'ame, & d'une certaine organisation du corps,) *supposé, comment se forme la faculté de raisonner?*

On voit d'abord, que le raisonnement suppose les idées & les notions des choses. C'est donc par la faculté d'avoir des idées & des notions, que nous commencerons notre analyse. Pour que nous puissions raisonner, il faut que l'esprit ait des idées & des notions, & qu'elles ayent un certain degré de clarté. Le sentiment intérieur, soutenu par la force active de l'ame, produit immédiatement la faculté d'avoir des idées. Avoir une idée présente à l'esprit, n'est autre chose que, sentir que dans l'instant présent on est affecté d'une certaine façon déterminée. Si la façon d'être affecté change d'un instant à l'autre, & si nous nous appercevons de ces changemens, en distinguant l'un de l'autre, nos idées se succedent. Or, pour distinguer ces changemens, il faut nécessairement l'exercice libre de la force active. C'est elle qui nous engage à nous prêter aux impressions, à nous y arrêter un moment pour les distinguer de celles qui ont précedé. Nous pouvons donc dire de tout animal, dont l'organisation est telle que, jointe à sa force active, elle produit le sentiment intérieur, que cet animal a nécessairement des idées.

Nous pouvons distinguer dans les idées leur qualité matérielle de leur forme. L'une & l'autre doivent être d'une certaine façon pour que les idées puissent servir au raisonnement. Car il y a quantité d'idées, sur lesquelles il est impossible de raisonner. C'est tantôt leur qualité matérielle, tantôt leur forme, qui les rend inutiles au raisonnement. J'expliquerai cela plus clairement dans la suite.

La qualité materielle des idées est l'espece de perception, eu égard à la cause qui la produit; & leur forme est l'espece de perception, eu égard à la façon de la saisir. Ainsi toutes les couleurs ont la même qualité matérielle, comme tous les sons, toutes les figures. Mais une couleur differe de l'autre, un son de l'autre, une figure de l'autre, par la forme, c'est à dire, par plus ou moins de clarté, de force, par le plus ou le moins de la précision avec laquelle nous la saisissons.

Maintenant je dis que la qualité matérielle des idées dépend uniquement de l'espece d'organisation des différens sens que la Nature a accordé à l'animal.

Je veux dire par là que toutes les idées que nous avons du monde matériel, celles de l'étendue, du mouvement, des formes, des couleurs, &c. seroient très différentes de ce qu'elles sont actuellement, si nos sens étoient autrement organisés. Il est important pour mon but que je m'étende sur cette remarque.

On voit d'abord que les sens ne nous donnent pas les idées des corps mêmes qui affectent nos organes, mais de quelques unes de leurs qualités rélatives aux sens. La vue, par exemple, ne nous fournit que les idées de l'étendue, des formes, des couleurs, & du mouvement; & si nous n'avions que ce seul sens, nous n'aurions aucune idée de la force d'un corps, de la solidité, de la dureté, du chaud, & du froid, &c. D'où il est évident que, si les corps ont des qualités qui ne se rapportent à aucun de nos sens, nous n'en avons aucune idée sensible. Arrêtons-nous ici, pour répandre plus de jour sur cette remarque.

Nous savons, qu'il y a des animaux qui sont privés de quelques uns des sens que la Nature nous a accordés, & d'autres qui paroissent en avoir quelques uns qui nous manquent. Cette derniere observation semble prouver que les corps ont des qualités qui ne se rapportent à aucun de nos sens, dont par conséquent nous n'avons pas le moindre soupçon. En général, nous voyons par là, que comme nous avons quelques idées sensibles qui manquent à d'autres animaux, il y a des especes de ceux-ci qui apperçoivent dans les corps des qualités dont nous n'avons aucune idée. Ceci se rapporte au nombre & à la variété des idées sensibles.

Quant à leur nature, il est évident que la constitution des organes nous entraine à nous former de chaque qualité sensible des corps un certain être, ou phantome, qui seroit très différent, si la même qualité frappoit un sens autrement organisé. La vue, par exemple,

jointe

jointe au toucher, insinue dans l'esprit l'idée de l'étendue, comme d'un être dont on peut concevoir l'existence & la possibilité indépendamment des corps. Mais, si la vue nous manquoit, l'idée de l'étendue produite par le tact, seroit indubitablement très différente de ce qu'elle est actuellement. En suivant avec attention les réflexions qui naissent de ces remarques, nous sentirons en général, que toutes les idées sensibles, sans nous manquer absolument, pourroient être très différentes de ce qu'elles sont actuellement, & répondre ce nonobstant, aux mêmes qualités & aux mêmes propriétés des corps.

Ramenons maintenant ces remarques à leur but. Nous savons que la confusion qui regne dans quelques unes de nos idées sensibles nous permet fort peu de raisonnemens sur la nature des corps, de sorte qu'en Physique presque tout ce que nous savons n'est qu'expérience. Cependant, il nous est permis de conjecturer, qu'une organisation différente auroit pu nous faciliter le raisonnement. Voici de plus près le fondement de cette conjecture. Rien n'est plus éloigné de la véritable nature des choses, que nos idées sur la lumiere & les couleurs: cependant nous concevons fort bien, que le sens de la vue auroit pu être tellement organisé, que nous eussions senti que les couleurs résultent de la vibration que les corps illuminés produisissent dans un fluide extrémement subtil, & que nous eussions distingué les couleurs par les vibrations propres à chacune. Or une telle vue auroit considérablement facilité nos raisonnemens sur la lumiere & les couleurs. Tous les autres sens étant dans le même cas, nous pouvons assurer, que la raison, entant qu'elle est rélative au monde matériel, dépend entierement de l'espece d'organisation propre à chaque sens. Le sens de la vue est tel, que nous avons pu former une science très parfaite rélative aux figures; telle autre organisation du corps nous auroit permis des sciences aussi parfaites, rélativement aux autres qualités des corps, telles que les couleurs, les sons, le chaud & le froid, etc.

Les qualités formelles des idées semblent dépendre de la perfection de chaque organe dans son espece. Il est au moins évident

que ceux qui ont la vue bonne, reçoivent des objets viſibles des impreſſions plus claires & plus nettes que ceux dont la vue a quelque défaut: & comme il en eſt de même des autres ſens, il ſemble qu'on peut aſſurer en général que, les autres circonſtances égales, ceux qui ont les ſens les plus parfaits, ont les idées les plus claires & les plus nettes. Or les premieres idées que nous acquérons, ſont les idées des choſes ſenſibles. Si elles ſont bien parfaites, nous diſtinguons mieux les objets les uns des autres; nous obſervons plus exactement leurs différences, nous en voyons de plus petites, nos perceptions ſont en plus grand nombre; & nous nous accoutumons à voir plus clairement, & à diſtinguer plus exactement. Cela nous conduit naturellement, comme nous le verrons bientôt, à la réflexion, & forme inſenſiblement la précision & la ſolidité dans les choſes même qui ne tombent pas ſous les ſens. C'eſt ainſi que des organes parfaits nous conduiſent naturellement ſur la route de la Raiſon; pendant que des ſens émouſſés y mettent des obſtacles par des effets contraires.

Cependant, quoique la perfection des ſens ſoit néceſſaire pour parvenir à la Raiſon, & quoiqu'elle paroiſſe l'amener naturellement; l'expérience nous apprend, que cela ſeul ne ſuffit pas encore pour nous rendre raiſonnables. Tous les animaux quadrupedes ont les mêmes ſens que la Nature a accordé à l'eſpece humaine, & ils les ont ordinairement plus parfaits & plus fins que nous. Il faut donc quelque choſe de plus pour parvenir à la Raiſon, que des ſens exquis.

En effet, nous ſavons par ce que nous éprouvons en nous-mêmes, que nos ſens peuvent être frappés par des objets placés fort avantageuſement pour produire des ſenſations aſſez fortes & aſſez exactement déterminées, ſans quelles produiſent des perceptions bien claires. Dans les diſtractions, nous ſentons à peine ce qui frappe nos ſens; & ce qui ſe paſſe ſous nos yeux, ne produit que des perceptions très foibles. Dans un pareil état, les ſens les plus parfaits ne nous ſeroient pas d'un grand avantage. Or il eſt viſible que ce n'eſt que l'attention qui nous manque alors. Cet acte de l'eſprit eſt donc très neceſſaire pour que nos perceptions ſoyent bien frappantes.

L'atten-

L'attention paroit un acte si simple qu'il est peut être impossible de le définir autrement que par ses effets. Or les effets les plus sensibles de l'attention sont : qu'elle nous fait distinguer une idée, ou perception, de toute autre alors présente à l'esprit ; qu'elle nous la rend en quelque façon plus voisine que les autres, plus forte & plus intéressante ; qu'elle excite l'activité de l'esprit ; & que cette activité est alors rélative à la seule perception sur laquelle nous portons l'attention. Il y a deux causes qui la produisent ; l'une est la force supérieure avec laquelle les idées nous frappent, & l'autre leur *clarté*. (*) La premiere cause produit une attention forcée & stupide, mêlée d'étonnement ; & l'autre une attention libre & réfléchie. Nous éprouvons l'attention forcée, lorsque quelque objet nous frappe si fortement que l'ame en est émue ; comme dans la douleur, & dans la sensation d'un besoin fort pressant. Un telle sensation attire toute notre attention, & la fixe tellement à l'état présent de l'ame, que son action paroit arrêtée, & changée en simple effort. Les perceptions ne peuvent se succéder, parce que, dans une telle sensation, nous ne distinguons rien ; ce qui nous affecte n'est qu'une seule masse indivisible. Et ces perceptions fortes étant toujours accompagnées de plaisir ou de peine, l'ame se livre toute entiere à ces sentimens.

L'attention causée par la clarté des perceptions est fort différente de l'autre. Elle fixe l'action de l'ame sur un objet nettement rendu, dont nous distinguons les différentes parties. Cela nous engage à les considérer l'une après l'autre, à remarquer leurs liaisons, leurs proportions, leurs dépendances mutuelles. Nous ne sommes, ni étonnés, ni émus ; & l'esprit conserve la liberté de contempler l'objet.

Il est bien clair que l'attention produite par la premiere cause, loin d'être favorable au raisonnement, le détruit plutôt. Car comment pourrions nous réfléchir sur un objet qui, après nous avoir

 émû

(*) Ce mot de *clarté* ne répond pas exactement à ce que je veux dire. Je l'employe, parce que je ne connois aucun terme françois qui réponde à mon idée, que le mot allemand *Deutliebkeit* exprime parfaitement. Un objet a de la clarté dans le sens où je prends ici ce mot, lorsque nous distinguons exactement ses parties. Une figure bien prononcée a de la clarté ; & un son dans lequel nous ne distinguons rien, n'a point de clarté.

ému, ne nous présente rien que nous puissions décomposer? Un son frappe fortement l'oreille. L'ame étonnée de cette sensation forte & subite, y porte son attention; mais qu'y distingue-t-elle? Comment peut-elle travailler sur cette masse sans forme, & même sans parties? Tout ce qu'elle peut faire, lorsqu'elle est revenue du premier étonnement, c'est de se prêter à l'impression de plaisir, ou de gêne, que cette sensation a produite; mais cela ne lui donne aucune perception nouvelle. L'attention libre au contraire produit naturellement la réflexion. Car, après avoir saisi l'objet en gros, nous pouvons l'analyser, parce que nous voyons ses parties. Nous nous prêtons successivement aux perceptions partiales dont la perception de l'objet entier est composée; nous les comparons les unes aux autres, pour découvrir leurs rapports & leurs différences. Et comme nous sommes sans émotion, nous reconnoissons la marche de l'esprit dans l'analyse que nous faisons de la perception totale; nous sentons à chaque moment ce que nous faisons, ce que nous avons fait le moment d'auparavant, & ce que nous allons faire le moment d'après. En un mot, nous manions cet objet de la même façon qu'on tourne & retourne un corps pour le considérer de tous côtés. Si l'imagination & la mémoire se joignent à cette attention, nous comparons les idées présentes à d'autres qui y ont quelque rapport; & c'est par là que nous approfondissons les choses. Arrêtons-nous ici, & tâchons de découvrir plus particuliérement l'origine & la nature de l'attention libre. C'est ici l'endroit essentiel de notre recherche, vû que cette attention est le vrai fondement de la Raison.

On voit d'abord qu'elle suppose cette liberté d'esprit, qui nous permet d'agir volontairement, & de nous porter sur une de nos perceptions présentes plutôt que sur toute autre, de nous y arrêter, & de là quitter, comme nous le trouvons à propos. Or cette liberté de l'esprit suppose deux conditions, sans lesquelles elle ne peut avoir lieu. L'une est cet état de l'ame que *Wolff* nomme *état de perceptions claires*, & que je serois tenté d'appeller *état du réveil parfait*, parce qu'il me paroit directement opposé à l'état du profond sommeil. L'autre con-

condition eſt un degré ſuffiſant de tranquillité dans l'ame, l'abſence de ce qui nous émeut & de tout ce qui force notre attention malgré nous. Il eſt néceſſaire que je m'étende un peu ſur l'une & l'autre de ces conditions.

Quant à la premiere, il eſt évident que, lorſque l'eſprit eſt dans un état ténébreux, comme quand nous nous ſentons aſſoupis, ou accablés de fatigue, nous ne donnons aucune attention à ce qui ſe paſſe, ſoit en nous-mêmes, ſoit autour de nous. L'eſprit ne paroit alors avoir aucune force; & quand même quelque objet nous frappe, nous abandonnons le cours de nos perceptions au hazard; ce ſont les phantaiſies les plus legeres qui le conduiſent. Tel eſt l'état de l'eſprit dans les rêves; il y a la legèreté d'un duvet, que le moindre ſouffle emporte ſans aucune réſiſtance. Et quoique dans cet état nous ayons quelquefois des perceptions aſſez claires, nous les ſaiſiſſons avec ſi peu de force que les plus petites & les plus legeres circonſtances nous les font quitter. Dans l'état du réveil parfait, la ſuite des idées tient à des liens forts & ſolides; le paſſage d'une idée à l'autre ſe fait moyennant une conformité réelle entre les deux idées voiſines, parce que l'eſprit rejette les liens imaginaires. Au contraire, dans le rêve, les liens les plus chimériques ouvrent le paſſage d'une idée à l'autre; & l'on n'y fait point de différence entre l'apparent & le réel: les ailes d'un moulin à vent, qui ont une reſſemblance fort éloignée à deux énormes bras, levés pour frapper, ſont pris pour des bras réels, & par une autre conſéquence également legere, le moulin même eſt un géant. On voit par là que, dans cet état, la ſuite des idées n'eſt pas ſans liaiſon, mais que les liens ſont frivoles, parce que c'eſt le hazard qui les forme, & qui nous entraine à les ſuivre.

Cet état a toujours lieu, lorſque la ſenſation de nous-mêmes eſt fort foible, ou lorſque nous ne ſentons que confuſément & foiblement ce que nous ſommes, & ce que nous faiſons. Car alors nous ne ſentons pas nos propres forces, & par conſéquent nous ne les dirigeons pas; nous n'avons, ni vues, ni deſſeins. Cela nous arrive dans la premiere enfance, dans les momens où nous commençons à dor-

dormir, dans le sommeil même, & dans quelques fortes distractions. Dans tous ces cas, les organes les mieux disposés n'agissent que foiblement, vû que les nerfs sont comme émoussés. Il arrive de là que, de l'action réunie de tous les sens, il résulte une sensation générale de notre état, qui n'a que fort peu de clarté. Dans toute la masse de nos perceptions, il n'y a qu'un seul point lumineux; & c'est précisément ce qui nous empêche de comparer l'idée qui nous est la plus présente à d'autres qui sont presque imperceptibles.

Pour donner à ces observations la plus grande clarté possible, nous remarquerons qu'à chaque instant nous avons un très grand nombre de perceptions à la fois. Nous recevons continuellement des impressions de tous les sens; tout ce que nous avons senti & pensé avant le moment présent, reste en nous, quoique d'une maniere inexplicable. De cette multitude des idées, se forme à chaque instant une masse composée de perceptions présentes à la fois. Plus il y a de clarté répandue sur la masse entiere, plus il est aisé de comparer les perceptions partiales entr'elles, & de voir à combien d'autres tient celle qui nous occupe principalement dans l'instant présent. Or nous savons que, dans le réveil, il y a plus de clarté dans cette masse des perceptions, que dans le sommeil. Dans les distractions, il y a beaucoup de clarté dans l'ame; mais elle est toute concentrée sur un très petit nombre de perceptions. Cela nous fait comprendre comment, dans l'état du réveil parfait, l'esprit jouit d'une plus grande liberté pour agir, que dans les autres états dont nous venons de parler.

Maintenant l'expérience nous apprend qu'il y a deux causes principales qui nous réveillent du sommeil, & qui nous tirent des distractions. Des sensations fortes qui, en causant un ébranlement dans les nerfs, le communiquent au systeme entier, & des idées frappantes qui excitent un nombre d'idées à la fois. La premiere de ces causes est trop connue pour nous arrêter. Nous nous contenterons de remarquer, que le réveil est d'autant plus prompt & plus parfait, que cet ébranlement est général. Une sensation seule ne suffit souvent pas pour nous réveiller parfaitement. Il arrive quelquefois qu'au réveil

réveil nous entendons distinctement quelque bruit, qui attire notre attention, sans que cela suffise pour nous tirer tout à fait du sommeil. Mais, dès qu'un autre sens, comme la vue, ou le toucher, aide à l'ouie, alors le réveil est prompt & parfait. Quant à l'autre de ces causes, nous en éprouvons l'effet dans ces rêves, qui nous conduisent à des idées si frappantes qu'elles excitent quelque passion; comme la frayeur, la joye, ou l'étonnement: alors nous sommes réveillés en sursaut, parce que le sentiment se communique en quelque façon à l'ame entiere, par le grand nombre de perceptions excitées à la fois.

Voilà donc deux causes qui produisent, ou qui soutiennent, l'état du réveil parfait: des organes sensibles, soutenus par une communication libre avec le systeme entier des nerfs, & des idées frappantes qui tiennent à un grand nombre de perceptions qu'elles excitent en même tems. Cela nous fournit quelque conséquences importantes pour le but de ce Mémoire. La premiere est; qu'une organisation trop simple, qui n'admet que des sensations fort peu variées, & en fort petit nombre, tient l'animal dans une stupidité continuelle, qui ressemble assez au sommeil. Ceci est immédiatement confirmé par l'expérience. Ces animaux que la sagacité de M. *Trembley* a rendu célebres, occupent la derniere place dans l'ordre des êtres sensibles, & semblent toucher au regne végétal. Aussi leur organisation est-elle des plus simples. L'animal entier n'est qu'un seul boyau, terminé par une bouche & quelques bras. Cela fait soupçonner que les sensations de cet animal se réduisent à avoir faim, & à sentir qu'il tient sa proye. Or ces sensations seules ne suffisent pas pour répandre beaucoup de clarté dans l'ame de cet animal. Voilà la cause de sa stupidité. Il paroit en général, que les animaux dont l'organisation approche le plus de celle de l'homme, sont les plus intelligens; & que cette ombre de raison qui se fait voir dans les animaux qui ont les cinq sens que la Nature a accordé à l'espece humaine, diminue à mesure que l'organisation s'éloigne de celle de l'homme, qui paroit la plus parfaite.

La seconde conséquence qui résulte des observations précédentes, est que; bien que l'organisation de l'animal soit parfaite, s'il n'y a dans l'ame qu'un très petit nombre d'idées acquises, elle reste dans la stupidité. Car, si le nombre des idées est en général fort petit, ces idées frappantes dont nous avons parlé, ne peuvent pas avoir lieu. Cette conséquence est encore confirmée par ce qu'on observe de l'accroissement successif de la raison, dans l'enfance de l'homme.

Troisieme conséquence. Tout dérangement dans le systeme des nerfs, qui empêche la communication libre entre ses différentes parties, est cause que l'état des perceptions claires est moins fréquent, & qu'on y parvient plus difficilement. Car, quelque forte que soit une sensation dans un pareil dérangement, elle ne produira qu'une seule perception, qui, comme nous l'avons vû, ne suffit pas pour ramener le réveil parfait.

La quatrieme conséquance enfin est; que l'état des perceptions claires ne peut avoir lieu, à moins qu'il n'y ait un degré suffisant de vigueur & de sensibilité dans le systeme des nerfs, afin que les sensations soyent assez fortes pour causer des impressions vives. Si le systeme des nerfs est émoussé, comme cela arrive ordinairement dans une grande vieillesse, l'ame retombe plus ou moins dans un état de stupidité. Voilà ce que j'ai pû découvrir sur les causes qui produisent dans l'ame cet état sans lequel l'attention réfléchie ne peut avoir lieu.

Nous avons remarqué plus haut, que cette liberté de l'esprit, nécessaire à l'attention réfléchie, suppose un degré suffisant de tranquillité d'ame, ou l'absence de tout ce qui tend à nous émouvoir. Je puis me dispenser de prouver que les émotions & les passions fortes sont contraires à la réflexion; chacun en étant suffisament convaincu par sa propre expérience. Mais on ne sait pas également, qu'un objet qui intéresse le coeur, peut avoir le même effet sur l'esprit, sans que nous le sachions. Il est nécessaire que je m'explique sur cette observation, qui est assez importante.

J'ob-

J'obſerve donc qu'outre ces momens dans lesquels nous nous ſentons émus ou paſſionnés, il y en a d'autres dans lesquels nous ſommes diſtraits, & incapables d'aucune application, ſans que nous connoiſſions la cauſe de cette indiſpoſition; & je dis qu'elle vient d'une paſſion que nous ne ſentons qu'obſcurément. Ceux qui ſont dans l'habitude de s'obſerver eux-mêmes ſauront, qu'on peut être de bonne ou de mauvaiſe humeur ſans qu'on en puiſſe ſoupçonner les cauſes. Cependant il arrive quelquefois qu'après les avoir longtems cherchées, on parvient tout d'un coup à les découvrir, & à ſentir même qu'elles ont longtems influé ſur notre humeur, ſans que nous nous en fuſſions apperçu. Cela prouve que des perceptions obſcures peuvent produire des effets fort ſenſibles, & que l'ame peut s'occuper de quelque intérêt notable ſans en avoir une connoiſſance bien claire. Ce ſont ces intérêts cachés au fond de l'ame, qui nous font quelquefois agir ou parler brusquement, hors de liaiſon & mal à propos, qui nous font dire, ſans y penſer, des choſes que nous voulions abſolument cacher. C'eſt par la même cauſe que les foux qu'on croyoit revenus de leurs folies, y retombent ſubitement. On peut même par là concevoir l'origine de la folie. Elle vient ordinairement d'une grande paſſion qui s'empare de l'ame, lui laiſſant au commencement aſſez de préſence d'eſprit pour ſe connoitre, pour s'appercevoir clairement du ſujet qui l'accable, & pour n'en parler que volontairement. Peu à peu l'ame prend l'habitude de ne plus penſer qu'à cela; elle perd l'attention ſur elle-même & ſur ce qui l'environne au dehors: uniquement occupée de ſa paſſion, elle y rapporte tout. Inſenſiblement elle oublie l'occaſion qui a fait naitre le trouble qui l'agite; elle ne s'apperçoit plus qu'elle eſt dans un état violent, parce qu'il lui eſt devenu ordinaire; & c'eſt par là qu'elle perd la réflexion ſur cet état, & qu'elle ne prend plus les précautions néceſſaires pour ſe reconnoitre. Il arrive quelque choſe de fort analogue à cela dans les douleurs qui durent longtems. Tout le monde ſait qu'on s'y accoutume tellement, qu'on peut les oublier; mais cela n'empêche pas qu'on ne porte ſans y penſer la main ſur la partie ſouffrante, qu'on ne

fasse des démarches qui résultent de la sensation obscure de la douleur. C'est ainsi qu'un aveugle marche avec certaines précautions, même dans ces momens où il semble avoir entierement oublié que la vue lui manque.

Ce que nous venons de remarquer sur l'effet des émotions & des passions cachées, nous conduit à découvrir deux nouvelles causes qui s'opposent à la Raison. La premiere est une disposition qui rend les passions trop fréquentes; & l'autre est un sentiment perpétuel de quelque besoin pressant, ou de quelque passion qui agit sourdement. L'une & l'autre méritent une considération particuliere.

La premiere de ces deux causes a lieu, quand l'animal a les nerfs trop sensibles. Il y a des hommes qui n'ont presque jamais des sensations médiocres: tout ce qui les frappe, les frappe fortement; ils se sentent transportés par des choses qui n'affectent que médiocrement les autres. Cela les rend prompts, étourdis, emportés, & incapables de donner une attention réfléchie aux sujets qui les frappent. Les saillies prennent chez eux la place des idées solides, & l'enthousiasme leur tient lieu de raison. Si cela va jusqu'à un certain excès, on les met dans la classe des foux. En effet ils ne différent de ces malheureux qu'on exclut de la société, qu'en ce que leurs folies sont courtes & variées; au lieu que celles des autres sont continuelles, & toujours les mêmes. En général, tout homme est fou, pendant qu'il est agité par une forte passion; il voit & il fait le contraire de ce qu'il devroit faire. Or cette promptitude à être ému dépend uniquement de la constitution du systeme des nerfs.

Le sentiment continuel de quelque besoin est le cas où se trouvent ces malheureux qui ont la tête troublée par une forte passion, comme nous l'avons déjà remarqué. La plûpart des animaux paroissent encore dans un état assez analogue à celui-là. On sait que les différentes especes des bêtes ont un génie plus particulierement déterminé que celui de l'espece humaine. Il n'y a qu'un très petit nombre d'objets qui affectent les bêtes, au lieu que l'homme se prête à tout ce qui

qui frappe ses sens. Or les quadrupedes étant doués des mêmes sens que nous, sans être sensibles à un aussi grand nombre d'objets rélatifs à ces sens; il est probable, qu'au lieu de cette espece d'équilibre que nous remarquons entre nos différens sens, chaque espece d'animaux est douée d'un sens dominant, auquel tous les autres & le systeme entier des nerfs sont subordonnés; ce qui doit produire une sensation dominante, qui détermine toute l'activité de l'animal vers une seule espece d'objets. Cela nous fait concevoir pourquoi les bêtes n'ont pas cette attention étendue, qui nous rend sensibles à une grande variété de choses. Ramenons maintenant toutes ces observations à un seul point de vue, pour en tirer cette conclusion générale: Que l'organisation la plus avantageuse rélativement à la Raison est celle par laquelle le systeme des nerfs est tellement varié, que l'animal reçoit la plus grande variété d'impressions; qui donne à chaque partie de ce systeme un juste degré de sensibilité, mais tellement proportionné qu'aucune partie ne prédomine sur les autres; qui, enfin, permette une communication libre d'une partie du systeme avec toutes les autres.

Je suis entré dans ce grand détail sur les causes & les obstacles de la liberté de l'esprit, parce que ces matieres m'ont paru importantes & trop peu approfondies. Au reste, je me flatte que ceux qui voudront bien réfléchir sur ce que je viens de dire, sentiront pourquoi les bêtes, qui ont les mêmes sens que nous, ne parviennent pas à l'attention réfléchie. Continuons maintenant notre analyse. Si l'attention réfléchie ne peut avoir lieu sans la liberté de l'esprit, elle n'avance pas beaucoup la Raison sans le secours des idées acquises, de l'imagination, & de la mémoire. Un exemple sensible servira de preuve & d'éclaircissement à cette observation. Je suppose que plusieurs personnes jettent la vue sur un excellent tableau d'Histoire. Ceux qui n'ont aucune connoissance ni de la Peinture, ni de l'Histoire, peuvent être frappés par l'éclat & la variété des couleurs, & par les différens objets qui entrent dans la composition du tableau, sans que cela jette beaucoup de lumiere dans leur esprit. Ne sachant rien, ni du

fujet, ni de l'art, ils se lassent bientôt de contempler ce tableau. D'autres qui savent l'Histoire, reconnoissent d'abord le sujet. Cela les engage naturellement à fixer leur attention sur le tableau, pour découvrir le vrai moment de l'action qu'il répresente, pour comparer la composition avec ce qu'ils en savent, pour voir si les caracteres & les attitudes conviennent à la vérité, &c. D'autres enfin, qui outre l'Histoire ont une connoissance de l'art, des obstacles à surmonter, des difficultés à vaincre, prennent garde à tout cela; leur attention est fixée par un plus grand nombre de liens, & dirigée par un plus grand nombre d'idées. La même chose doit toujours arriver, quel que soit le sujet de notre attention: plus il nous est inconnu, plus il est séparé de nos idées acquises; moins il nous occupe. D'où il est clair que l'attention réfléchie suppose des idées acquises.

On voit en même tems par là ce que l'imagination & la mémoire contribuent à la soutenir, parce que c'est par le moyen de ces deux facultés que les idées acquises nous reviennent dans l'esprit, & que nous les reconnoissons. Il arrive par là qu'elles nous font sentir la liaison entre l'objet présent & les idées auxquelles il tient, qu'une idée présente peut devenir intéressante, qu'elle peut exciter notre curiosité, & nous engager d'y fixer notre attention. De tout ceci il est évident, que l'imagination & la mémoire sont des qualités très essentielles à l'être qui doit parvenir à la Raison. Aussi voyons-nous que les personnes qui en ont fort peu, sont ordinairement assez stupides.

Si nous voulions donc pousser l'analyse de la Raison jusqu'aux premiers élémens, il faudroit que nous découvrions aussi l'origine de ces deux facultés. Mais ici, comme dans la Physique, on ne parvient jamais jusqu'aux premieres élémens des choses. Tout ce que nous pouvons dire ici sur cette matiere, se réduit à cette seule remarque; que des organes exquis, dans lesquels les objets extérieurs s'impriment facilement, & avec une grande précision, sont favorables tant à la mémoire qu'à l'imagination.

Je

Je viens à la fin au dernier support de l'attention réfléchie, qui est la *parole*. Ce sujet important mérite d'être traité à part dans toute son étendue: cependant je ne ferai qu'indiquer ce qu'il y a de plus essentiel. Chaque mot est, comme tout le monde le sait, le signe d'une idée; de sorte que, dès qu'on entend, ou qu'on se rappelle, un mot d'une signification connue, on se rappelle en même tems l'idée à laquelle il répond. La parole est donc en général un des moyens de se rappeller des idées qu'on a eues.

Parmi le nombre des nos idées, il y en a une partie qui sont sensibles, c'est à dire, qui répondent à des sensations que nous avons éprouvées: d'autres sont purement intellectuelles; il n'y répond aucune chose sensible, & on ne les saisit qu'en comparant plusieurs objets entr'eux, & en observant ce qu'ils ont de commun. Il est très facile de se rappeller les idées sensibles, sans qu'on les fixe par des signes. Nous nous rappellons sans difficulté tous les objets visibles qui nous sont familierement connus. Les idées abstraites, au contraire, semblent n'exister dans l'esprit que moyennant leurs signes. Si nous n'avions aucun signe pour marquer, par exemple, le nombre *dix*, la notion de ce nombre ne nous viendroit jamais dans l'esprit que quand nous nous représenterions dix choses semblables, & qu'en même tems nous fixerions notre attention sur leur multitude, & que nous réfléchirions sur la diminution successive qui résulteroit, si l'on ôtoit de la masse l'une de ces choses après l'autre. On voit par là que les idées abstraites existeroient aussi peu dans l'esprit qu'elles existent hors de nous, si nous n'avions pas des signes pour les fixer. Ces signes étant des objets sensibles, des figures ou des sons, qui frappent nos organes, nous nous les rappellons avec facilité; & c'est par là que nous donnons une espece d'existence aux notions abstraites.

Cette remarque nous fait comprendre que, sans l'usage de la parole, ou des signes en général, l'esprit seroit bien vuide, vû qu'il n'y auroit que les images des choses dont nous avons éprouvé quelque sensation. Mais, par le moyen des langues, surtout si elles sont riches,

riches, nous nous mettons en possession d'un nombre infini de notions. Si nous ajoutons à cela ce que nous avons dit plus haut sur la nécessité des idées acquises, nous sommes portés à croire que de tous les moyens de répandre la lumiere dans l'ame, de soutenir l'attention réfléchie, & de nous avancer vers la Raison, la parole est le plus essentiel. Cette remarque est confirmée par quantité de faits si généralement connus, que je puis me dispenser de les alléguer ici.

Il me semble donc que le plus grand obstacle qui empêche les bêtes de parvenir à la raison, est le manque de la parole. Nous ne connoissons pas assez la structure du corps animal pour comprendre exactement comment la parole se forme dans la bouche de l'homme, & ce qui empêche les autres animaux de jouir du même avantage. Cependant nous pouvons assurer, que ce n'est pas manque de génie ou de force d'esprit, que les animaux sont privés de cet avantage précieux, qui pourroit les rendre raisonnables. Il y a assez de faits très connus, qui prouvent que les bêtes, au moins les quadrupedes & les oiseaux, sont capables d'attacher quelques notions à des signes arbitraires; ce qui fait l'essentiel des langues. Les organes de l'ouie des quadrupedes étant fort semblables à ceux de l'homme, il est probable que le principal obstacle vienne de l'incapacité des instrumens de la parole, la langue, les levres, les muscles du gosier & du visage. Quoiqu'il en soit, on comprendra que le défaut de la parole, ajoûté aux causes qui empêchent l'attention réfléchie, explique assez clairement pourquoi les bêtes ne parviennent pas à l'usage de la raison, quels que soient d'ailleurs leur génie & leur sagacité.

Jusqu'ici je n'ai examiné que quatre des facultés dont le concours forme la Raison; & je me suis trouvé dans la nécessité d'entrer dans des détails ennuyeux: ce qui me reste à faire, est moins difficile. La cinquieme faculté que nous allons considérer, est le jugement, ou cet acte de l'esprit par lequel nous nous assurons que telle notion abstraite convient ou peut convenir, ou bien, qu'elle ne convient pas ou ne peut convenir, à tel sujet ou à un tel ordre de sujets. Il suppose donc

donc des idées abſtraites & des notions générales. Quant aux idées abſtraites, nous les formons, lorsque dans une ſenſation, ou perception compoſée, nous diſtinguons tellement une ſeule partie, qu'oubliant qu'elle appartient à une ſenſation comme partie, ou à un ſujet comme propriété ou accident, nous la conſidérons à part. En voyant, par exemple, un corps ſphérique, cette ſenſation eſt compoſée; elle renferme la figure, la grandeur, la couleur &c. du corps. Si je fixe tellement mon attention ſur la figure, que les autres parties de la ſenſation me deviennent imperceptibles, j'acquiers l'idée abſtraite de la ſphéricité, que je puis manier, & ſur laquelle je puis raiſonner, ſans avoir le moindre égard au corps qui me l'a fournie. Cet acte par lequel nous formons des idées abſtraites, nait de l'habitude de diſtinguer ce qu'il y a de différent dans une ſenſation, ou perception quelconque. Pour mieux comprendre d'où elle tire ſon origine, nous conſidérerons un cas particulier. Je tiens une pierre dans la main. Cela excite dans moi une ſenſation aſſez compoſée, dans laquelle entre l'effet de ſa peſanteur, du froid ou du chaud, de la dureté de la ſurface polie ou raboteuſe, &c. Il eſt queſtion de ſavoir ce qui m'engage à décompoſer les différentes parties de cette ſenſation, afin de former des idées abſtraites de la peſanteur, de la dureté, du froid, ou de regarder ces qualités comme des êtres différens de la pierre même. Je crois qu'on peut hardiment aſſurer, que la premiere fois que nous éprouvons ces différentes ſenſations mêlées enſemble, nous ne nous aviſerons pas de les décompoſer. Nous regarderons certainement cette ſenſation ſi compoſée, comme tout d'une piece, ſi je puis m'exprimer ainſi. Cela eſt confirmé par quantité d'exemples qui prouvent, que nous ne jugeons jamais des choſes qui nous ſont abſolument nouvelles. Il arrive bien ſouvent que des perſonnes d'un eſprit très cultivé reſtent tout court ſans rien juger, quand elles voyent de pareils objets. Il faut leur laiſſer le tems de les manier, pour diſtinguer ce qu'il y a de différent. Un homme qui ne s'eſt jamais aviſé de réflêchir ſur la beauté d'un bâtiment, verra longtems un chef-d'oeuvre dans ce genre, avant que de s'appercevoir quels ſont les différens ſujets qu'il

qu'il faut envisager, pour porter un jugement sur leur beauté & leur perfection. Le plus habile raisonneur, qui n'auroit jamais exercé son jugement sur le goût en fait de dessein & de sculpture, regardera les chefs-d'oeuvre d'un *Phidias*, sans s'appercevoir en quoi ils différent des ouvrages les plus ordinaires; il sera même surpris que les connoisseurs y trouvent tant de sujets d'admiration.

Il paroit que ce n'est qu'après avoir éprouvé souvent de pareilles sensations, avec des circonstances variées, que nous apprenons à démêler ce qu'il y a de différent. La variété des sens que le même objet peut affecter, nous engage naturellement à cette opération. Si nous voyons la pierre dont il s'agit dans notre exemple, nous n'y découvrons que l'étendue, la figure, & la couleur: si nous la touchons, nous la trouvons solide, polie ou raboteuse; si nous la prenons dans la main, nous la trouvons pesante. Voilà comment nous apprenons à distinguer ce qu'il y a de différent dans cette pierre.

Il est évident par ce que je viens de remarquer, que ce n'est qu'après beaucoup d'expériences qu'on parvient à acquérir des idées abstraites; & encore n'est-ce que moyennant une attention toute particuliere. Car plus on peut fixer son attention sur une partie de la perception, mieux on perd les autres de vue, pour séparer ou détacher celle-ci. Il m'arrive souvent, (& je crois que d'autres l'auront éprouvé de même,) qu'en fixant l'attention sur le son d'un mot, je perds absolument l'idée de sa signification, quoique d'ailleurs très connue. Cependant ce n'est pas justement par cette voye lente que nous acquérons les idées abstraites. Leurs signes se trouvant déjà dans les langues, nous profitons des abstractions que d'autres ont faites, en apprenant les mots par lesquels ils les ont désignées. Quand on nous dit: *Voilà une grande pierre & bien pesante*, on nous indique déjà les idées abstraites de la grandeur & de pesanteur. C'est par là que des personnes, qui peut-être d'elles-mêmes ne seroient jamais parvenues à former des idées abstraites, les reçoivent, au moins confusément, par l'usage de la parole.

Les

Les notions générales des eſpeces, des genres, & des claſſes, ne peuvent s'acquérir qu'après une aſſez longue expérience. Pour les former, il faut avoir vû nombre d'objets qui ſe reſſemblent en partie, & qui ſe diſtinguent tellement les uns des autres, qu'on ne peut pas les confondre. En fixant l'attention ſur ce que ces objets ont de commun, on oublie leurs différences; & c'eſt par là qu'on acquiert la notion d'un genre. Cela ſe fait donc par le concours des mêmes facultés que nous avons trouvé néceſſaires pour la formation des idées abſtraites en général. Mais les notions génériques ſont ordinairement les plus difficiles à acquérir, vu qu'il faut ſe repréſenter quelquefois un grand nombre d'objets à la fois, pour en ſéparer tout ce qu'ils ont de commun: il faut par conſéquent poſſéder dans un degré éminent les facultés qui y concourent.

Il ſemble qu'on peut conclure de ce que nous venons de dire ſur les idées abſtraites & ſur les notions générales, que les bêtes ne ſont pas capables de les acquérir, & que c'eſt ici l'endroit où l'eſpece humaine ſe ſépare du reſte des animaux, & où la Raiſon commence.

En effet, dès qu'on a des idées abſtraites, on ne peut plus s'empêcher de juger. Le jugement affirmatif n'eſt autre choſe que l'opération par laquelle nous rejoignons à un ſujet la notion qu'on en avoit détachée par le moyen de l'abſtraction; le jugement négatif eſt le ſentiment, ou la déclaration, que telle notion ne peut pas être jointe à tel ſujet. L'un & l'autre ſe fait par une opération contraire à celle qui produit les idées abſtraites. Dès qu'on eſt parvenu à l'habitude de former des idées abſtraites, on ne pourra plus s'empêcher de juger.

Remarquons ici qu'il eſt poſſible de ſentir ce qu'une perception renferme de différent, ſans que l'on profite de cette perception pour former des idées abſtraites. De là peut naitre dans les bêtes une eſpece de jugement, que *Leibniz* nomme *attente des cas ſemblables*, laquelle a très ſouvent lieu dans l'homme. Quand nous avons vû un objet un grand nombre de fois avec les mêmes circonſtances, elles ſe joignent ou s'uniſſent tellement à la perception de cet objet, que, toutes les

fois que celui-ci reparoit, nous nous attendons à revoir en même tems les mêmes circonstances. Ceci est une espece de jugement, auquel on est d'autant plus sujet, que l'on possede moins l'habitude des abstractions.

Après avoir expliqué l'origine du jugement, il nous reste encore deux questions à résoudre sur cette matiere. 1°. Que faut-il pour que le jugement soit vrai? Et 2°. D'où nait la conviction? Quant à la premiere de ces deux questions, je parlerai premierement des jugemens sur des matieres de fait & d'expérience. Il me semble qu'il y a trois causes d'erreur dans ces sortes de jugemens. La premiere est quelque défaut dans les organes des sens, qui produit une sensation fausse: comme quand on voit les objets doubles. Une constitution parfaite des sens peut nous garantir des erreurs de cette espece. La seconde cause d'erreur est la précipitation, qui confond l'effet avec la cause. Deux objets différens peuvent produire la même sensation. Un cercle vu d'une certaine façon produit sur la rétine de l'oeil la même image qu'une ellipse. Or, en transportant notre jugement de la sensation même sur l'objet qui la produit, il sera souvent faux. Nous nous garantissons de cette erreur, si nous changeons le point de vue, ou si nous employons le secours de quelqu'autre sens, pour juger du même objet; comme quand nous touchons un objet qui, quoique peint, nous avoit paru en relief. En général, plus le nombre des sens par les quels nous pouvons prendre connoissance d'un objet, est grand, & plus il nous présente de côtés par lesquels nous pouvons l'envisager; plus nos jugemens deviennent sûrs. La troisieme cause d'erreur dans les jugemens sur les choses sensibles, est une imagination trop vive, qui confond les fantaisies avec des sensations réelles; ou des sensations trop foibles qui ne se distinguent pas assez des fantaisies. L'un & l'autre nous séduit à prendre des imaginations pour des réalités. Ce qui nous garantit de ces erreurs, est d'un côté, un esprit tranquille, l'équilibre dans l'ame; & de l'autre, une vigueur convenable dans les organes pour produire des sensations assez fortes.

Ce

Ce que nous venons de dire ſur la vérieté & la fauſſeté des jugemens en matiere de ſenſation, peut-être appliqué aux jugemens ſur les objets purement intellectuels. Car il y a ici trois ſources d'erreurs, analogues à celles dont nous venons parler. Des notions fauſſes, la précipitation dans le jugement, & les illuſions. Les diſpoſitions qui nous rendent ſuſceptibles de notions diſtinctes, capables d'une attention réfléchie, & celles qui produiſent un état bien lumineux dans l'ame, tendent toutes à nous garantir de ces différentes erreurs. Et comme nous avons déjà ſuffiſamment analyſé toutes ces diſpoſitions, nous pouvons nous diſpenſer ici d'entrer dans un plus grand détail. Paſſons donc à la ſeconde queſtion.

La conviction eſt un ſentiment clair & poſitif, qu'il nous eſt impoſſible de concevoir les choſes autrement que nous les concevons. Elle ſuppoſe donc que nous diſtinguions exactement les deux notions qui entrent dans le jugement, que nous ſentions en même tems très intimement ce que nous faiſons, que nous faſſions quelque effort pour concevoir le contraire, & que nous éprouvions très diſtinctement l'impoſſibilité de réuſſir. Il faut donc pour cela, outre les notions diſtinctes, la plus grande clarté poſſible dans l'ame, & la plus parfaite liberté de l'eſprit dans la direction de ſes forces.

Cette analyſe du jugement fait voir que la faculté de juger réſulte néceſſairement des diſpotions dont nous avons parlé plus haut; & cela nous aſſure que jusqu'à préſent notre analyſe eſt complette. Il nous reſte encore à conſidérer l'acte de raiſonner. Cela ne nous arrêtera pas longtems, parce qu'il y a beaucoup d'analogie entre l'acte du jugement & celui du raiſonnement. Dans le jugement, on compare deux idées en s'aſſurant qu'elles ſe conviennent pour entrer dans un même ſujet, ou qu'elles ſe répugnent & ſont incompatibles. Dans le raiſonnement, on compare deux propoſitions, & on s'aſſure qu'il y a une telle liaiſon entr'elles, qu'il en réſulte néceſſairement une troiſieme, qui tient aux deux autres; ou bien qu'il eſt impoſſible de les lier pour en faire une troiſieme. Je puis donc me diſpenſer d'entrer dans

 un

un plus grand détail ſur la faculté de raiſonner. Pour peu qu'on y réfléchiſſe, on verra que le raiſonnement réſulte des mêmes diſpoſitions qui concourent dans le jugement; mais que ce dernier acte les ſuppoſe toutes dans un degré plus éminent, parce qu'il eſt plus compoſé. Ce que j'ai remarqué jusqu'ici, peut donc ſuffire pour nous faire comprendre quelles ſont les diſpoſitions qui nous rendent capables de raiſonner.

Après avoir ainſi analyſé la faculté de raiſonner, nous avons encore à examiner la Raiſon dans le ſens *de Leibniz.* (*) Comme on peut avoir toutes les diſpoſitions néceſſaires pour être grand Muſicien, ſans qu'on le ſoit en effet, on peut de même poſſéder la faculté de raiſonner, ſans avoir un grand fond de raiſon. Remarquons donc, qu'un être a plus ou moins de raiſon, quand il voit plus ou moins l'enchaînement des vérités univerſelles. L'être qui voit toutes ces vérités dans leur enchaînement, poſſede ſeul la Raiſon dans toute ſon étendue; celui qui n'en voit qu'une partie, la poſſede plus ou moins, ſelon l'étendue de ſes connoiſſances. Il nous reſte donc encore à examiner ce qui regarde l'étendue de la Raiſon.

Il y a des hommes qui poſſedent la faculté de raiſonner dans un degré éminént, quoique bornés à une très petite étendue; ils déraiſonnent dèsqu'il s'agit des choſes les plus ordinaires placées hors de leur ſphère. Le fait mérite d'être approfondi; & il y a dans ce que j'ai dit plus haut ſur l'origine du jugement, dequoi l'éclaircir. Le but de ce Mémoire m'oblige à me borner uniquement à l'examen de cette queſtion générale: *La faculté de raiſonner étant ſuppoſée, d'où dépend la plus grande étendue de la Raiſon?*

Il eſt d'abord clair que l'étendue de la Raiſon dépend de celle du goût. Un homme qui n'a du goût que pour une ſeule branche des connoiſſances, peut en poſſéder de très étendues dans ſon genre, & fort bornées dans d'autres. Pour n'être pas trop long ici, je renvoye à

(*) Voyez ce que j'ai remarqué au commencement de ce Mémoire ſur le double ſens du mot *Raiſon.*

à une autre fois la question sur l'étendue du goût, me contentant pour le présent d'examiner d'où dépend l'étendue de la raison dans un genre donné. Et pour détacher encore de la question tout ce qui l'embarrasseroit sans nécessité, nous supposerons deux hommes également habiles dans l'art de raisonner, ayant la même expérience, & s'étant exercé également longtems; & nous tâcherons de découvrir les avantages que l'un peut avoir sur l'autre, dans la possession de la science.

Pour rendre bien sensible l'état de la question, je me servirai d'une comparaison qui fera sentir ce que je ne pourrois exprimer que fort imparfaitement. La Raison ressemble aux biens rélatifs aux besoins de la vie. On peut posséder ces biens de deux façons; on peut les tenir rassemblés autour de soi, en sorte qu'à mesure qu'on a besoin d'une chose, on la trouve sous la main, toute prête à être employée; ou bien, on les possede sans les arranger, laissant chaque chose comme on la trouve, se contentant de savoir qu'en cas de besoin on est sûr de la trouver en la cherchant; ou, sans les posséder actuellement, on a les facultés de se les procurer en cas de besoin. Dans le premier cas, on est parfaitement à son aise, vû qu'à chaque moment on est sûr d'avoir tout ce qu'il faut, sans que les affaires souffrent le moindre délai. Dans l'autre, au contraire, il faut à chaque moment arrêter les affaires pour chercher ce qu'il faut pour continuer: l'occasion de faire quelque chose peut passer, avant qu'on ait rassemblé les moyens; tout va plus lentement, avec plus d'embarras, & souvent on n'est pas en état de faire ce que l'on veut, parce que l'occasion passe avant que l'on soit prêt. Le premier de ces deux cas est celui d'un homme qui, après avoir découvert un nombre de vérités, les fait arranger, retenir, & se les rappeller à point nommé pour en faire usage. On le trouve toujours raisonnable dans ce qu'il dit & ce qu'il fait; jamais embarrassé à tirer parti de ses connoissances, toujours prêt à les faire valoir. Il les possede tellement qu'un coup d'oeil jetté sur la masse totale de ce qu'il s'est approprié, le met en état d'y découvrir ce qu'il lui faut. L'autre cas est celui d'un homme qui auroit trouvé les

mêmes

mêmes vérités, sans avoir pû les ranger. On le trouvera souvent embarassé à se décider, s'il est pressé; il jugera souvent mal, parce que dans la confusion de ses connoissances, il ne trouve pas d'abord ce qu'il lui faut pour bien juger.

On peut donc dire qu'une homme possede parfaitement la portion de la Raison que ses facultés & son expérience lui ont fait acquérir, s'il remplit ces deux conditions: 1°. de se rappeller avec facilité les vérités qu'il a une fois reconnues; & 2°. de les arranger dans un ordre convenable à leur dépendance & à leur subordination.

La facilité de se rappeller les vérités qu'on a une fois découvertes, ou connues par les découvertes des autres, dépend dans le fond de l'imagination & de la mémoire. Mais, ces deux facultés étant supposées les mêmes dans deux hommes, il est encore fort possible que l'un se rappelle plus facilement que l'autre les vérités qui lui sont connues. Comme on ne se rappelle jamais distinctement aucune idée abstraite, à moins qu'on ne l'ait, pour ainsi dire, fixée par quelque signe sensible; on ne se rappelle pas non plus les propositions sans les phrases qui les expriment sensiblement. Or nous savons que les expressions énergiques facilitent beaucoup la mémoire; par conséquent, plus on peut donner d'énergie aux propositions, plus on facilite leur souvenir. Des expressions concentrées, lumineuses, bien prononcées, & sur tout celles qu'on renferme dans des images, ne s'oublient presque plus. Qui est-ce qui, âpres avoir lû attentivement l'Esprit des Loix du célebre *Montesquieu*, pourra oublier la grande vérité renfermée dans cette image: *que le Monarque despotique coupe l'arbre pour en cueillir les fruits?* Si l'on pouvoit donc réduire toutes les propositions à des images sensibles & frappantes, on se rappelleroit avec beaucoup de facilité toutes celles qui nous ont passé par l'esprit. C'est par une semblable méthode que les Géometres possedent leur science dans la plus grande perfection, moyennant les figures & les formules algébriques, qui sont autant de signes, qui renferment des proportions souvent fort compliquées.

Main-

Maintenant il eſt évident que, pour convertir une propoſition dans une image qui la repréſente, il faut beaucoup d'eſprit & une imagination heureuſe. Nous pouvons donc dire, que, toutes les autres circonſtances égales, l'homme qui a le plus d'eſprit, & qui penſe dans une langue fort riche en images, aura plus de facilité qu'un autre de poſſéder parfaitement ſes connoiſſances. Il eſt d'une grande importance pour l'avancement de la Raiſon, que les langues ſoyent bien cultivées, & que les gens qui ont le plus d'eſprit, s'appliquent aux ſciences, pour répandre les vérités ſous les formes les plus frappantes. Si d'un autre côté l'art caractériſtique étoit perfectionné au point que ce qui ſe refuſe aux images, pût être réduit à des formules ſemblables aux formules algébriques; la poſſeſſion des vérités en ſeroit extrêmement facilitée. Remarquons enfin en général, que, quand on eſt parvenu à découvrir, ou à connoitre une verité, il faut s'y arrêter, & tâcher de la réduire à la plus parfaite expreſſion, ſi l'on veut être ſûr de la retenir.

Il ne nous reſte plus qu'un ſeul point à conſidérer. C'eſt l'arrangement général des vérités que l'on poſſede, produit par le vrai eſprit de ſyſteme, qui decouvre leurs liaiſons & leurs dépendances. Le ſyſteme parfait eſt un *Tout* dont les parties ſont arrangées de façon qu'il en réſulte une forme parfaite & agréable. Les corps organiſés formés par la Nature, ſurtout la forme toute divine de l'eſpece humaine, en fourniſſent les exemples. Celui qui poſſede l'eſprit de ſyſteme, ſait arranger les vérités en un ſeul corps d'une forme parfaite. Mais quels ſont les talens, & quelles ſont les facultés de l'ame, qui nous rendent capable de cet eſprit de ſyſteme? Ces queſtions méritent d'être traitées dans toute leur étendue. Mais, ayant déjà été trop long dans ce diſcours, je me contente d'indiquer les choſes. Comme on forme des notions générales en obſervant ce que pluſieurs objets ont de commun, il faut, pour former un ſyſteme, raſſembler toutes les propoſitions particulieres qui y entrent, concevoir ce qu'elles ont de commun, & ce que chaque claſſe a de particulier. C'eſt par là qu'on découvre les principes généraux, & qu'on détermine l'ordre dans lequel les vérités doivent être arrangées.

 Cela

Cela demande l'attention la plus étenduë, l'état de l'ame le plus lumineux, & la plus grande ſagacité. Et comme les matieres qu'on doit arranger, ſont en trop grand nombre pour les concevoir à la fois, il faut être capable de former des notions directrices, & des idées fécondes, moyennant lesquelles on découvre avec facilité l'ordre & la ſuite de celles qui en dépendent. Il faut ſe former des images très compoſées & arrangées avec goût. On voit par là que, pour avoir l'eſprit de ſyſteme, il eſt néceſſaire qu'on poſſede dans un degré fort éminent toutes les facultés dont nous avons parlé jusqu'à préſent.

Je m'arrête ici, laiſſant à ceux qui trouveront ces matieres intéreſſantes, de pouſſer plus loin ces recherches. Ce que j'en ai dit, peut fournir un grand nombre de conſéquences très importantes, qui ſerviront à découvrir les différens moyens de cultiver la Raiſon. Je n'ajoûterai donc qu'une ſeule remarque ſur l'ame des bêtes. Nous y trouvons tant de conformité avec l'ame raiſonnable de l'eſpece humaine, que je ſuis tenté de croire que toute la différence qu'il y a entre ces deux eſpeces d'ames ne vient que de l'organiſation du corps. Je ne ſuis pas éloigné de hazarder la conjecture que les bêtes paſſeront ſucceſſivement par des états, où elles auront des corps mieux organiſés, & qu'enfin elles parviendront à la Raiſon.



DE

DE
LA NOTION DE L'INFINI:
DISCOURS
MELÉ DE RÉFLEXIONS, AMENÉES PAR LE SUJET MEME, SUR LES CAS OU L'USAGE DES DÉFINITIONS SE TROUVE EN DÉFAUT, ET SUR UN ALPHABET DES PENSÉES HUMAINES SEUL CAPABLE D'Y SUPPLÉER.

PAR M. DE PRÉMONTVAL.

Un des premiers pas, Messieurs, qu'on doive faire en Philosophie, selon moi, c'est de se rendre bien familiere *la Notion de* L'INFINI. D'autres s'imaginent, au contraire, que c'est là le dernier effort, où l'Esprit philosophique, le plus exercé, puisse atteindre: mais il me semble que l'expérience est contre eux, ou que l'on doit convenir qu'il faut renoncer absolument à philosopher. Car, s'il est de fait qu'il n'est pas possible d'entamer la moindre Question, que l'idée de l'Infini ne s'y rencontre à chaque pas, & dès les premiers Axiomes, comme nous le verrons bientôt, quel parti reste-t-il à prendre? Faudra-t-il laisser en arriere une idée, qui, faute d'être éclaircie à tems, ne peut qu'être un sujet perpétuel de mal-entendus & de méprises; d'abord, parce que nous mêlerons sans cesse à nos discours une idée qui ne sera pas nette; ensuite, parce que nous ne nous mettrons à l'éclaircir, que chargés de préjugés & d'erreurs qui l'éclipseront sans retour?

Si donc il est donné, Messieurs, à l'Esprit humain de philosopher; s'il lui est permis de promener ses recherches sur les Objets qui

nous environnent, l'Infini eſt l'un des premiers objets qui exigent ſon attention. Je ne crois pas même qu'il y en ait aucun qui le précede, puisqu'il n'en eſt aucun où la Notion de l'Infini n'entre & n'influe pour quelque choſe. Avouons que c'en ſeroit fait de nos connoiſſances, ſi cette Notion étoit auſſi abſtruſe qu'elle eſt élémentaire en tous ſens, & par l'antériorité néceſſaire que j'y découvre eu égard à l'ordre de la Tractation, & par le degré de facilité qui j'y trouve dans la Tractation même. Comment ſe peut-il faire qu'une Queſtion, dont je vois que s'effrayent ſi fort tant de perſonnes en qui je reconnois plus d'eſprit & de lumieres que je n'en ai, & ſur quoi tant d'autres non moins habiles ont pris manifeſtement à gauche; comment, dis-je, oſerai-je avouer que cette Queſtion m'a toujours paru une des plus ſimples de la Philoſophie? Y auroit-il de ma faute? Seroit-ce préſomption pure, ou illuſion? Ou bien aurois-je eu le bonheur de rencontrer d'abord un point de vûe facile à ſuivre? En ce cas le bonheur ſeroit grand; on ne ſauroit s'imaginer, combien un regard fixe ſur l'Infini donne d'avantages dans la plûpart des Queſtions de Métaphyſique. C'eſt ce que je ſoumets, de bon coeur, au jugement des perſonnes-mêmes dont je me propoſe de combattre les Opinions.

Vous avez vu, Meſſieurs, dans ma *Théologie de l'Etre*, (*) que je penſe ſur l'Actualité & ſur les différens Ordres de l'Infini, préciſément ce que penſe la foule des Mathématiciens; mais je vous déclare que ce n'eſt point en Mathématicien que je le penſe. J'ai toujours cru, & l'ai dit ſouvent, que c'étoit des mains de la Métaphyſique, que les Mathématiques elles-mêmes, malgré l'indépendance qu'elles affectent, devoient recevoir leurs Principes, & toutes leurs Notions fondamentales. Il n'en eſt point, dont cela ſoit plus vrai que de la Notion ſi eſſentielle de l'Infini. Le Mathématicien qui ne ſeroit que Mathématicien, bien loin d'y voir clair, n'eſt capable que de tout confondre. Ses abſtractions perpétuelles, baſes de calculs à perte de vue, le conduiſent à des abſurdités ſi palpables, ou tout au moins à des concluſions ſi étranges, lorſqu'on les veut prendre au pied de la lettre

(*) Mémoires de 1755. & de 1757.

lettre, (à des anéantiſſemens d'Etres, à des réaliſations de Néants, &c.) que je m'étonne qu'elles n'ayent mille fois décrié une Science très eſtimable. Elles n'y euſſent pas manqué, ſi l'on n'eût pris le parti ſingulier, & vraiment inattendu, de conſidérer ces choſes, à-peu-près, ſur le pied qu'on regarde les Myſteres dans la Religion. Le reſpect pour des Vérités importantes, pour des uſages & des pratiques extrèmement utiles, a fait en général baiſſer les yeux devant les incompréhenſibilités qui s'y trouvent jointes. Il n'y a eu qu'un petit nombre de Profanes, dont l'audace oſant franchir ces ſortes de ménagemens, ait frappé des mêmes coups, & les Principes, & les Myſteres. Si je penſe, ſur le ſujet de l'Infini, ce que penſent la plûport des Mathématiciens, on verra ſans peine à mes preuves, que ce ne ſont rien moins que des calculs peu lumineux, & des abſtractions peu ſûres, qui m'y ont amené.

Toute la difficulté conſiſte à établir une definition recevable, tant du *Fini* que de *l'Infini:* car, s'il y a de l'embarras, il eſt exactement le même de part & d'autre; & je ne trouve point, ou que l'Idée du Fini ſoit plus claire, plus aiſée à exprimer, que celle de l'Infini; ou que l'idée de l'Infini ſoit moins maniable, moins traitable, que celle du Fini. Elles ſont toutes deux, ou également traitables, ou également intraitables. Dites-moi, ſans ambiguité, ce que c'eſt que le Fini: je vous dirai ce que c'eſt que l'Infini ſans héſiter; & réciproquement. Mais celui que l'idée de l'Infini étonne, je doute fort que l'idée du Fini-même ſoit bien nette dans ſon eſprit.

„Allons! vite! me crie-t-on déjà; vite! vos Définitions! Qu'en„tendez-vous par *Fini?* Qu'entendez-vous par *Infini?*„ Je ſais, Meſſieurs, que la routine eſt de commencer par là. Ma méthode, à moi, eſt différente: c'eſt par là que je finirai, ſi même j'y viens, & ſi je ne trouve pas plutôt le moyen de m'en paſſer. J'ai mes raiſons. Je n'ai garde d'adopter les Définitions des Philoſophes du parti contraire au mien; elles tranchent en leur faveur. Je n'ai pas le front non plus de préſenter celles qui ſont ajuſtées à mon ſentiment, puiſque je reconnois qu'on les recuſeroit avec autant de droit que je recuſe celles des autres. Il n'y a cependant point de milieu: je n'en ſache aucunes encore, qui

ne ſuppoſent abſolument ce qui eſt en queſtion, & même d'une façon groſſiere. Seroit-ce procéder en bonne Logique, que de fonder toute une Théorie ſur une Diſtinction qui en ſeroit la ruine, ou ſur une Définition conteſtée? Quoique rien ne ſoit plus commun que ce dernier cas, ce n'eſt point un exemple que je veuille ſuivre.

Un Philoſophe envélope avec plus ou moins d'adreſſe, quelquefois d'une façon à faire pitié; (n'importe:) il envelope, vous dis-je, ſon Opinion chérie dans les Définitions qu'il propoſe dès l'entrée; puis il triomphe au bout d'une longue ſuite de Déductions, & vrai Joueur de Gobelets, il parvient enfin, après maints tours de paſſe-paſſe, à trouver au fond du ſac ce qu'il y a mis. La merveille eſt grande: mais il ne faut que lui en oppoſer autant; & comme l'on n'y manque pas, de là vient que rien ne ſe termine, rien au monde, en fait de diſputes philoſophiques. Quelqu'un ſe ſera mis dans la tête qu'un Cheval eſt une eſpece de Chameau: il le prouve; & comment cela? Rien de plus facile. DÉFINITION. *Le Chameau eſt un Animal robuſte qui porte des fardeaux.* Fort bien! je vois d'ici où vous allez. Sauvez-nous de grace le bout de chemin qui reſte à faire. Oui, mon Ami, vous avez raiſon; le Cheval eſt un Chameau. Mais écoutez; il ne l'eſt plus. DÉFINITION. *Le Chameau eſt un Animal qui a ſur le dos une groſſe boſſe.* Dites; où eſt la boſſe de votre Chameau? Ou bien, l'Ame, demandera t-on, eſt-elle ſpirituelle, où matérielle! Nous voilà bien en peine: une Définition en fera l'affaire. Voulez-vous qu'elle ſoit matérielle? Tenez. *L'Ame eſt une Machine qui penſe. Or toute Machine eſt matérielle. Donc...* La voulez-vous ſpirituelle? Tenez encore. *L'Ame eſt un Indiviſible qui penſe. Or un Indiviſible qui penſe eſt un Eſprit, &c.*

Pour décider toute ſorte de Queſtions à ſon avantage, il n'y a pas, Meſſieurs, de plus ſûr moyen. Ainſi donc, qu'eſt ce que *l'Infini?* ... Réponſes catégoriques! *C'eſt ce qui eſt ſi grand qu'il n'y a rien de plus grand;* ou, *c'eſt ce qui ne peut être augmenté, ce à quoi l'on ne peut rien ajouter.* Un Nombre infini actuel, ſeroit un Nombre ou une Multitude d'unités, *à quoi l'on ne pourroit plus ajouter une ſeule unité quelconque.* Ho! il ne faut pas s'évertuer beaucoup, pour conclurre de là *qu'il n'y*

a

a point d'Infinis de différens Ordres ; point d'Infinis plus grands les uns que les autres. Non, il ne faut pas d'efforts bien pénibles. Cependant, comme c'est un très nombreux parti, tant de Mathématiciens que de Philosophes, qu'il s'agit de combattre en regle, on sent qu'il y faut mettre quelques façons de plus. On retarde sa marche; on differe la Conclusion, pour masquer tant soit peu la chose. Enfin, en battant la campagne, on fait si bien qu'il ne paroisse pas qu'on n'ait risiblement avancé que ce qui étoit en question; ou plutôt, parce qu'on est dupe de cette subtile Dialectique, ou s'imagine que les autres le seront aussi. Mais l'Adversaire s'en rit fort haut. Et qu'y a-t-il en effet de plus risible que ce procédé? Une foule de très habiles gens, les *Clarkes*, les *Lockes*, les *Newtons* en tête, soutiennent *qu'il y a des Infinis réels plus grands les uns que les autres.* Ils s'abusent, si vous voulez, & l'on doit les relever de leur erreur. La Logique en personne s'avance exprès pour cela, & pose: Définition. *L'Infini est ce qui n'a pas de plus grand que soi.* Cela vous terrasse en un instant. Ou, moins magistrale, mais fine & rusée que c'est un prodige, elle vous glisse cette adroite Définition; *l'Infini est ce à quoi l'on ne peut rien ajouter.* Puis une tirade de Déductions verbeuses, un fatras syllogistique, d'où vous voyez sortir avec surprise, (aussi qui s'en seroit méfié?) *qu'il n'y a pas d'Infinis plus grands les uns que les autres.* En bonne foi, n'est-ce pas se moquer de ses Adversaires, & ne leur pas supposer l'ombre du sens commun, que de croire les réduire à l'aide de pareilles Définitions? Il faudroit qu'ils eussent perdu l'esprit pour les admettre, dans leurs Principes; & s'ils ne les admettent pas, qu'a-t-on gagné?

De leur côté, les Infinitaires ne procedent pas d'une façon plus légitime. Ils ajustent de même une Définition à leur doctrine. *L'Infini, c'est ce qui est plus grand qu'aucune Quantité finie;* non pas, prenez garde, *que quelque Quantité que ce soit* en général, mais *que quelque Quantité finie*, se laissant par là une porte de derriere, une ressource pour des Infinis d'ordre inférieur; Infinis néanmoins, véritables Infinis en ce qu'ils sont *plus grands qu'aucune Quantité finie.* Reste à dire ce que c'est que *Quantité finie*, & la chose est plus difficile à énoncer qu'on ne croiroit.

Quel-

Quelques-uns s'enferrent dans des Définitions qui ne leur ſont point avantageuſes: d'autres, plus circonſpects, répondent que cela eſt ſi ſimple qu'aucune Définition ne peut l'expliquer; & il ſe pourroit, Meſſieurs, qu'ils n'euſſent pas tort.

Leurs Antagoniſtes ſe moquent de cette réſerve; & les Wolfiens entr'autres, hardis Définiſſeurs de *Rien* & de *Quelque choſe*, trouvent fort étrange que le mot de *Fini* demeure ſans Définition. Ils vous en offrent à choix, dont, ſelon les regles de leur commode Dialectique, il n'y en a pas une qui ne leur donne gain de cauſe dès l'abord, en ſuppoſant ce que l'on conteſte. Ecoutons: cela gît en fait.

Qu'eſt-ce que le *Fini?*

Quelques-uns vous diront, *que c'eſt ce à quoi l'on peut ajouter; ce qui n'eſt pas le plus grand qui ſoit poſſible.* Mais ils ont affaire à gens qui leur montrent, ou qui prétendent leur montrer, des Quantités qui ne ſont pas les plus grandes poſſibles, des Quantités à quoi l'on peut ajouter ſans ceſſe, & qui certainement ne ſont pas finies. Nous en verrons des exemples par la ſuite. Au moins faut-il avouer que le Définiſſeur a ſuppoſé ce qui en queſtion.

D'autres vous diront, *que le Fini eſt ce qui eſt formé par une répétition réitérée de l'Unité:* 1 *plus* 1 *égale* 2; 2 *plus* 1 *égale* 3; 3 *plus* 1 *égale* 4; &c. Mais ils ont affaire à gens qui ſoutiennent qu'il y a *répétition finie* & *répétition infinie;* que le Fini eſt formé par une réitération finie de l'Unité, & l'Infini par une réitération infinie, en ſorte qu'en général la répétiton réitérée ne caractériſe pas plus, ſelon eux, le Fini que l'Infini. La Définition ſuppoſe donc encore miſérablement ce qui eſt en queſtion; elle ne peut être admiſe de part & d'autre. Or ce ſont d'admirables Logiens, que ceux qui n'en continuent pas moins à raiſonner à perte de vue ſur une Définition qu'on n'admet point.

Le Chef enfin, l'illuſtre *Wolff*, avec le plus grand nombre de ſes Diſciples, vous dira *que le Fini eſt ce qui a des limites, des bornes.* Autre ſuppoſition toute pure de la queſtion, puiſqu'ils ont affaire à des gens qui parlent familierement d'Infinis qui ont des bornes & des limites, mais des bornes, mais des limites à des diſtances infinies. Et ce ne ſont

point

point gens obscurs; c'est une multitude de Mathématiciens & de Philosophes du mérite le plus distingué, qui parlent ce langage, le prennent à la rigueur, & croyent l'entendre. Le grand *Newton* l'a parlé toute sa vie sans le moindre scrupule. Notre sublime *Leibniz*, après avoir varié quelque tems, y est revenu dans ses dernieres années. Quelle foule après eux ne puis-je pas nommer? Tant de profonds génies peuvent avoir eu une opinion fausse: mais il valent bien la peine qu'on les réfute autrement que par une Définition arbitraire, arrêt trop despotique en vérité.

Voilà donc différens Sujets de controverse qui se rencontrent dans la Question de l'Infini.

„Comme il y a des termes, des bornes, des limites, à des di-„stances finies, y en auroit-il à des distances infinies; ou y a-t-il des „distances qui puissent être dites infinies?

„Comme il y a des répétitions d'actes en nombre de fois fini, une „fois, deux fois, trois fois, &c. y en auroit-il en nombre de fois infini?

„Comme il y a des Finis plus grands les uns que les autres „doubles, triples, quadruples, &c. y a-t-il des Infinis qui ayent en-„tr'eux ces mêmes rapports, &c.?„

Les Infinitaires assurent que oui, & les Anti-infinitaires soutiennent que non: mais, quoi qu'il en soit, les uns ni les autres ne rameneront personne à leur avis, en ne fesant qu'opposer une simple Définition qui soit le sujet même de la dispute. C'est le Cheval *Chameau* ou *Non-Chameau*, selon qu'il plait de le définir.

Ignore-t-on que, lorsque les Définitions sont elles-mêmes des Propositions controversées, elles cessent d'être d'aucun usage? De là vient, (ce qui est effectivement déplorable,) que la méthode de définir n'est pas à beaucoup près aussi utile qu'on se l'imagine, & que même la méthode de définir tout est très vicieuse. L'utilité des Définitions en Mathématiques, pour le dire en passant, en a causé un étrange abus dans la Métaphysique. Cependant la différence est grande. L'objet des Mathématiques est si visible & si palpable, qu'il ne peut être matiere à controverse. Je vois, je touche une figure qui a trois côtés: on ne dispute pas plus que cela s'appelle un *Triangle*, qu'on ne dispute qu'un long sie-

ge de bois s'appelle un *Banc*. Pourtant faut-il apprendre à ceux qui ne le savent pas, ce que l'on entend par un *Triangle*, ou par un *Banc*; ce qui n'est jamais l'affaire que de quelques mots & d'un coup d'oeil. En Métaphysique il n'en va pas de même; principalement à l'entrée, & lorsqu'on est encore fort près de l'origine des choses, ou du moins de l'origine des connoissances. Tout roule alors sur un nombre de perceptions primitives, très fines & très déliées, dont il n'est pas toujours facile que les hommes se rendent les uns aux autres un compte exact. Il n'est pas étonnant qu'on en dispute, & que la plûpart du tems on ne s'entende point, ou que l'on ne sache pas si l'on s'entend. D'un autre côté, il n'est pas moins nécessaire qu'on fasse effort pour s'entendre. Que dans cette vue, pour s'essayer & se tâter réciproquement, on se demande, si l'on veut, des Définitions: rien de mieux. Mais qu'on les donne soi-même, ces Définitions, & qu'on les donne pour des Principes, dont on puisse contraindre les autres à se servir, afin de les amener ensuite, pieds & poings liés, juste où l'on souhaite; cela choque autant les regles de la bienséance que celles du bon-sens.

Une Vérité, Messieurs, bien importante, mais que je crains fort que nos habiles Dialecticiens ne goûtent jamais, c'est que, comme il est un art, très heureux & très usité, soit dans les conversations, soit dans les écrits les mieux raisonnés en tous genres, de suppléer à l'argumentation de l'Ecole & à la marche syllogistique; il est aussi un art de suppléer à ce qu'on appelle proprement *Définitions logiques*, dans les cas au moins où l'emploi de ces Définitions se trouve en défaut; cas très fréquens, dont je reconnois deux ou trois especes. La premiere est lorsque l'idée d'un mot est si simple qu'elle ne se peut point analyser en de plus simples, & que cependant l'abus du langage a rendu ce mot équivoque, en lui donnant diverses significations, même parmi les Philosophes. Ce mot, dans le sens qui le fixe à l'idée simple, ne pourra pas être défini; mais, entant qu'il a plusieurs significations, il aura besoin de Définition, ou de quelque chose qui y supplée. Le second cas, qui est de beaucoup le plus commun, est lorsqu'on ne peut dire ce qu'on entend par un mot, sans énoncer une Opinion qui soit précisément ce dont

on

on dispute. Dès-lors, définissez tant qu'il vous plaira; vous nous apprenez ce que vous pensez, ce que vous soutenez; mais vous n'en êtes pas plus avancé par rapport au but de la Tractation. Vous vous trompez étrangement, si vous vous imaginez avoir posé une base sur laquelle vous puissiez bâtir; un principe fécond d'où vous puissiez déduire quoi que ce soit. C'est pourtant ce que l'on se propose avec la Méthode de définir; & ce qu'on obtient, quand les Définitions sont de nature à être avouées de ceux à qui l'on parle, ainsi qu'elles le sont toujours en Mathématiques. Quelquefois ces deux cas se combinent, & il s'en forme un troisieme dont je donne pour exemple notre sujet même, le *Fini* & l'*Infini*. Extrême simplicité dans l'idée; équivoque de mot, provenue du langage abusif de quelques Sectes de Philosophes; impossibilité d'une Définition préliminaire qui leve l'équivoque sans supposer ce qui est en question.

L'unique expédient qui reste en pareil cas, c'est cet art de suppléer aux Définitions. Or en quoi consiste-t-il? Je vais, Messieurs, vous en montrer l'usage, & en faire devant vous une heureuse application à l'important sujet qui nous occupe: mais ne m'en demandez point de regles ni de préceptes. Cet art, non plus que ceux qui tiennent le moins du monde au génie, n'est point asservi aux formalités de la routine; comme nous ne voyons point que l'art de converser & de raisonner humainement, & non pédantesquement, y soit en aucune sorte assujetti. Un bon esprit sent & démêle en chaque rencontre, par une espece d'instinct, le tour qu'il doit prendre pour arriver au vrai, & pour y conduire les autres. Il marche: la sûreté de sa marche entraine avec rapidité ceux qui sont faits pour le suivre; & c'est au fond d'eux-mêmes qu'il les conduit. Là, il leur découvre leurs propres pensées qu'ils ne connoissoient point; leurs pensées les plus naturelles & les plus vrayes, que des pensées aquises & moins vrayes tenoient comme étouffées.... Essayons; voyons s'il y auroit moyen de s'ouvrir quelques unes de ces routes, avec un peu de succès.

Convaincu que c'est parmi nos idées primitives que nous devons chercher celles du *Fini* & de l'*Infini*, je remonte à tout ce qu'il y a de plus

simple. *Etre; exister; commencer; continuer; durer; durer encore; durer toujours; ne pas durer toujours; finir; ne point finir; ne finir jamais.* Y a-t-il un seul de ces termes, pris même dans la rigueur du sens, qui puisse s'expliquer par d'autres? Tels seroient sans contredit les premiers Elémens de cet *Alphabet des Pensées humaines*, dont j'ai déja eu l'honneur de vous parler, Messieurs, il y a trois ans, à l'occasion de l'*Aliquid* de M. *Wolff*.* Il n'est pas nécessaire pour notre sujet que le Catalogue soit poussé plus loin; ces Elémens suffisent. Arrêtons-nous y un instant, & demandons-nous quel est l'homme tant soit peu capable de raisonner, (je n'en veux pas tant,) l'homme capable d'entendre une Définition, qui, faute de Définitions, hésite sur la signification d'aucun de ces termes, surtout disposés dans l'ordre où je les présente? *Etre; exister; commencer; continuer; durer; durer encore; durer toujours; ne pas durer toujours; finir; ne point finir; ne finir jamais.* Cette suite nuancée, sans autre explication, ne fixe-t-elle pas le sens à ne pouvoir s'y méprendre?

Mais on chicane: la fureur des Définitions se jette à la traverse: on m'objecte que *finir* c'est *cesser d'être:* voilà donc une Définition; le mot n'est pas si simple qu'on ne puisse l'expliquer par d'autres.... L'expliquer, non; mais l'énoncer, c'est autre chose. *Cesser* n'est pas un mot plus clair, plus lumineux, que *finir;* & même s'il eût été question de ce mot *cesser*, au lieu de celui de *finir*, il est à parier que tel qui s'applaudit de l'Objection, eût cru faire merveille, de soutenir que *cesser* c'est *prendre fin*, c'est *finir*. Routine, encore un coup! misérable routine de Dictionnaires! A' l'article *Jour* ce mot s'explique par celui d'*Heure*. Le Jour *est une durée de vingt-quatre Heures*. A' l'article *Heure* celui-ci s'explique par le mot *Jour*. L'Heure est *la vingt-quatrieme partie du Jour*. L'exemple est très fameux. Plus d'un Philosophe le cite pour faire toucher au doigt le vice qu'on appelle *Cercle* en fait de Définitions; & tous tombent dans ce Cercle, les plus méthodiques comme les autres, à chaque pas. C'est qu'il est impossible de n'y pas tomber, dès qu'on entreprend de tout définir. Voila pourquoi les Dictionnaires sont pleins de ces sortes de Définitions: mais ce n'est point un défaut dans un Dictionnaire, parcequ'on n'y suit point

(*) Mémoires de 1754. Remarque sur cette Définition de M. Wolff: *Aliquid est cui aliqua Notio respondet.*

point l'ordre de la génération des idées, & qu'on ne l'y peut suivre. Comme il ne s'y agit, pour ainsi dire, que de l'écorce des mots, ces Définitions *grammaticales*, & *non logiques*, sont suffisantes. Dans les matieres de Raisonnement cela est insoutenable: rien cependant de plus commun. Si l'on traite un sujet, allons, ne fut-ce que pour la forme, on vous définit le Mot qui l'énonce: mais, si demain l'on en traite un autre, il ne faut pas jurer qu'un des Mots de notre Définition, un de ces Mots qui ne sont aujourd'hui que subalternes, devenu principal, ne soit à son tour expliqué par le Mot qu'il expliquoit la veille; & personne n'en est choqué.

En vérité c'est une honte, Messieurs, qu'il faille tant appuyer là dessus; mais vous savez tous pourquoi. Rendons cependant justice aux Philosophes que j'ai en vue; avouons qu'ils ont parfaitement compris à quel point l'Esprit humain se paye de phrases, & qu'ils l'ont servi selon son goût. Présentez à l'esprit de l'homme l'idée la plus familiere; il croit pour la saisir mieux avoir besoin d'une phrase. S'agit-il du mot *Chose?* Qu'entend-il, s'il n'entend pas ce mot-là? Et en quels mots lui en compterez-vous la monnoye? Il ne laissera pas d'être bien aise que vous lui disiez que Chose, *c'est ce qui est, ce qui est un Etre.* S'agit-il du mot *Etre?* Il sera satisfait si vous lui dites, qu'Etre, *c'est ce qui est quelque Chose.* Tantôt il verra avec plaisir que vous lui expliquiez *quelque Chose* par *Rien.* Quelque Chose, *c'est ce qui n'est pas un pur Rien.* Une autre fois vous pourrez lui expliquer *Rien* par *quelque Chose.* Rien, *c'est ce qui n'est aucune Chose, ce qui n'est pas quelque Chose.* Mais vous l'extasierez si, dans une enfilade de Propositions bien didactiques, en un Paragraphe exprès, accompagné de son titre & de sa scholie, précédé de ses lemmes, & suivi de ses corollaires, le tout étiqueté, numéroté, vous avez l'assurance de lui apprendre que *Quelque Chose est ce à quoi répond une Représentation de quelque Chose;* ce qui un peu plus analysé se réduit à *Quelque Chose qui est quelque Chose à quoi répond quelque Chose qui représente quelque Chose qui est quelque Chose.* * Il est tourné de façon, ce pauvre Esprit humain, qu'il s'imagine toujours qu'une suite de mots, une phrase, lui est plus intelligible qu'un Mot; & de là ce grand crédit des Définitions. Du reste, il n'est pas difficile à contenter: peu curieux de comprendre, il ne veut que voir faire les façons qu'il

* Mémoires de 1754.

juge néceſſaires pour le faire comprendre. En parlant on l'éclaire quelquefois; il ſe croit plus de lumieres quand on a parlé.

Que je ſuis déraiſonnable, pour moi, Meſſieurs, de parler tant & ſi long-tems pour le déſabuſer de ſa chimere! Car ce n'eſt pas là l'uſage qu'il aime de la parole.... Obtiendrai-je, avec tout cela, de nos Philoſophes, qu'ils m'avouent que l'on conçoit très bien ſans Définitions ce que ſignifient ces mots: *Durer; durer toujours; ne pas durer toujours; finir; ne pas finir; ne finir jamais?* Entendre ce que ſignifie un mot, ce n'eſt point dire qu'on ait la perception la plus adéquate de ſon idée. Ce n'eſt point du *comment* de la choſe; c'eſt *du fait & de la réalité*, qu'il s'agit. Il n'eſt pas queſtion, ſi l'on comprend comment quelque choſe *exiſte*, comment quelque choſe *dure* ou *ne dure pas toujours*, comment quelque choſe *finit* ou *ne finit jamais*. Tout conſiſte à comprendre qu'il eſt réel & de fait, que quelque choſe *exiſte;* que quelque choſe *dure;* que quelque choſe *ne dure pas toujours;* que quelque choſe *finit;* & que quelque choſe *ne finit jamais*. JAMAIS & TOUJOURS! Deux mots qui renferment l'un & l'autre le premier germe de la *Notion de l'Infini*, & qui ne laiſſent pas d'être ſi clairs qu'ils précedent dans notre eſprit tous les Axiomes, & toutes les Définitions de l'Ontologie & de la Logique. Il n'y a qui que ce ſoit au monde, qui dès qu'il réfléchit, ne ſente qu'il y a *toujours* quelque Etre exiſtant, ſoit un ſeul, ſoit pluſieurs; & que *jamais* il n'arrive que rien n'exiſte. Point d'enfant doué d'un peu d'intelligence, qui ne conçoive que deux & deux feront *toujours* quatre, & ne feront *jamais* cinq. L'idée de *jamais* & de *toujours*, qui n'eſt autre que celle de l'*Infini en durée*, eſt donc une des plus ſimples & des premieres qui ſoyent en nous.

Ici l'on m'objecte, contre l'Expérience de ſix mille ans & le Sens intime de la conſcience, *qu'il n'eſt pas poſſible de voir clair en plein midi, avant que d'avoir ſoumis chaque rayon de la Lumiere à l'analyſe du grand Newton, dans un Cours d'Optique.* Autant vaut, Meſſieurs. On prétend, qu'avant que d'avoir ſaiſi la Doctrine Wolfienne, ou Leibnitienne, ſur le *Tems*, la *Durée*, la *Succeſſion*, &c. par une étude profonde de l'Ontologie, on ne peut avoir d'idées claires de ce que ſignifient *Jamais* & *Toujours*, ni à plus forte raiſon de ce que ſignifie *ne finir jamais*, *durer toujours*. Voici la preu-

preuve. „Le mot *Tems* est un de ceux, dit-on, dont les hommes, & les „Philosophes-mêmes, ont les idées les plus confuses & les plus fausses: il „n'a pas falu moins que le génie de *Leibnis*, & l'admirable dialectique de „*Wolff*, pour le fixer à un sens vrai, lequel n'est reconnu que par les Adep-„tes. Qui dit *toujours*, dit *en tout tems*; qui dit *jamais*, dit *en aucun tems*. „L'idée de *Tems* se retrouve encore dans *durer* & dans *finir*. Comment „tenir pour claires des Expressions identiques à un terme si obscur?„ Et moi; je demande; comment tenir, pour obscur un terme identique à des expressions si claires? Aussi, indépendamment de toutes les fausses idées que je ne nie pas que les hommes y joignent, je tiens le mot *Tems* pour très clair, & si clair qu'il ne sauroit être défini. Preuve sans réplique. De grace! est ce quelque chose de clair ou d'obscur qu'un Axiome, & que le premier de tous les Axiomes, le grand Axiome; *Une Chose ne peut pas être & n'être pas, en même tems?* Cet Axiome est-il clair par lui même, & parce que tous les termes en sont très clairs, aussi bien que leur connexion? Ou n'est-il clair qu'après la définition de chacun des termes? Mais comment les définir? L'intrépide exactitude de *Wolff* qui le tente, n'y vient qu'après avoir fait mille fois usage de l'Axiome, dans le gros volume de sa Logique, & dans une grande partie de l'Ontologie, qui n'est pas non plus de courte haleine. Enfin, ce n'est que bien avant dans l'Ontologie, & après maint & maint usage de l'Axiome, que notre Philosophe parvient à nous expliquer ce que c'est que *chose*, ce que c'est qu'*être*, ce que c'est que *même*, & ce que c'est que *même tems*. Quoi! faut-il croire, non qu'un Mortel ordinaire, (cela s'en va sans dire,) mais qu'un Adepte de la Philosophie Wolffienne, ne conçoit bien *qu'une Chose ne peut pas être & n'être pas en même tems*, qu'au bout de deux gros Volumes, ou peu s'en faut? Ou, conçoit-on ce grand Principe, sans concevoir clairement, nettement, distinctement, les termes qui l'expriment? Cela seroit assez plaisant.

Pour déterminer tous les termes clairs par eux-mêmes, voici donc une Méthode bien facile.... Au fond la chose n'a pas besoin de Méthode. Un bon esprit, je l'avoue, sent de reste si un terme est clair, ou s'il ne l'est pas. Que la Recette soit pour ceux qui ne sauroient se passer de quelque espece de Méthode.... Prenez ce premier Axiome; *une Chose ne peut pas être &* *n'être*

n'être pas en même tems. Tournez & retournez-le en différentes phrases équivalentes; par exemple, *il n'est pas possible qu'une Chose soit & ne soit pas tout ensemble;* ou *il est impossible qu'une Chose soit & ne soit pas à la fois;* &c. Ajoutez-y ses Conséquences les plus générales & le plus immédiates. *Tout ce qui est, est toujours tandis qu'il est. Rien n'est jamais avant qu'il soit, & n'est encore quand il n'est plus. Quoi que ce soit ne peut être & n'être pas, si ce n'est en divers tems. Avoir été d'une maniere, & n'avoir pas été de cette maniere, sont pour le moins deux instans l'un après l'autre.* &c. Faites ensuite le dépouillement de tous ces termes pour en composer une liste, en y joignant leurs opposés, leurs contraires, leurs annexes, & les synonymes tant des uns que des autres, autant qu'il s'en présente; *être, exister, chose, peut, possible, impossible, tems, même, divers, encore, avant, après, tandis, toujours, jamais, commencer, continuer, durer, finir,* &c. Si cela est bien fait, vous tiendrez le véritable *Alphabet des Pensées humaines;* un Recueil exact des *Termes primitifs,* qu'il est absurde d'entreprendre de définir, & dont le nombre est beaucoup plus grand qu'on ne s'imagine. J'ai cru jadis qu'on les pourroit réduire à une trentaine; mais c'est trop peu. Toute la difficulté seroit après cela de nuancer la liste, & d'y mettre un ordre naturel, de sorte que la disposition des termes n'y fût pas laissée au hazard, comme celle des Lettres d'un Alphabet. Les termes synonymes devroient être disposés sur une même ligne, comme n'étant que différentes formes du même caractere, ou différens caracteres auxquels ne répond qu'une même idée. On pourroit aussi, vis-à-vis de chaque terme, sur d'autres colonnes, mettre son opposé ou son contraire; & tout cela pourroit n'être compté que pour un seul Elément; puisque qui conçoit *durer,* par exemple, conçoit également *finir,* & qui conçoit *toujours,* conçoit *jamais,* &c. De deux ou trois Elémens simples réunis, tels que *exister encore, durer toujours, ne finir jamais,* &c.; se forme ce qu'on peut appeller les *Syllabes de la Pensée,* dont le nombre est très grand. Ces Syllabes intellectuelles ne sont pas plus susceptibles d'Explications ou de Définitions que les Caracteres ou Termes simples; il suffit de les *épeler.* Lorsqu'à une *Syllabe* ou à un *Mot,* ou à une *Phrase* entiere de nos Pensées, l'usage a substitué un Caractere unique, cela répond à ces

Abbré-

Abbréviations dont certaines Ecritures, et la Grecque entr'autres, fourmillent ; par exemple, *poindre* qui se dit proprement d'une Lumiere qui commence à paroître ; *jaillir* qui se dit d'un Liquide qui s'élance par une ouverture étroite ; *homme*, *animal*, *plante*, *ame*, *esprit*, & une infinité d'autres. Ce sont ces Elémens, simples à la vue, mais complexes en soi, qui font le gros des Langues. Or ce n'est que de ces Elémens complexes dont il est possible d'exprimer la valeur par de bonnes Définitions. Souvent la chose n'est pas nécessaire : souvent aussi l'on feroit très mal d'y manquer, & l'on peut s'en dispenser, quand on a le moindre lieu de croire que cette valeur n'est pas bien connue de ceux à qui l'on parle.

Au reste quand je dis, Messieurs, que *tems*, *même*, *divers* ; & *même tems* & *divers tems* ; *durer* & *finir* ; *toujours* & *jamais* ; enfin *durer toujours* & *ne finir jamais*, qui sont ici notre objet, parce qu'ils nous menent immédiatement à la *Durée infinie*, ou à l'*Infini en durée*, & de là à toutes sortes d'*Infinis* : quand je prétens donc, que ce sont des idées élémentaires & primitives, dont on ne sauroit demander raisonnablement de Définitions ; je ne nie pas qu'on ne puisse faire de chacune de ces idées le sujet d'une multitude de Propositions, vrayes ou fausses ; mais je nie qu'aucune de ces Propositions, vrayes ou fausses, soyent ce qu'on doit appeller des Définitions. Toute Proposition qui énonce ce qu'est une Chose, & par conséquent ce que signifie un Mot, (l'un, selon moi, ne va pas sans l'autre,) n'est pas pour cela une Définition. *Le Cercle est un Polygone d'une infinité de côtés*, ou *le Cercle est une Ellipse dont les foyers coïncident* ; ces Propositions disent très véritablement ce qu'est un Cercle, & par conséquent ce que signifie le mot *Cercle*. Oui, le mot *Cercle* signifie *un Polygone d'une infinité de côtés*, parce que le Cercle en effet est cela ; & il signifie aussi *une Ellipse dont les foyers coïncident*, parce que le Cercle est encore cela. Tâchez de me dire une Chose, sans me dire ce que signifie son Nom ; & tâchez de me dire, mais bien, ce que signifie son Nom, sans me dire ce qu'est la chose même. Ainsi la Distinction vulgaire de *Définitions de Choses* & de *Définitions de Noms* ne feroit rien ici. Je la tiens pour très chimérique, cette Distinction ; 1°. au sens le plus vulgaire, parce qu'encore un coup je défie de m'expliquer bien ce que signifie un Mot, sans me donner

une idée nette & déterminée de la chose désignée par ce Mot, & je défie de me donner une idée nette & déterminée d'une Chose (d'une Chose, s'il vous plaît, que vous me nommez,) sans m'expliquer, dès-lors, au mieux ce que signifie son Nom. 2°. Quant à la Distinction imaginée par *Leibniz*, & suivie par *Wolff*, de Définitions qui expliquent, & de Définitions qui n'expliquent pas la Possibilité de la Chose, ce qu'il leur a plû d'appeller *Définitions de Choses* & *Définitions de Noms*; je remarque d'abord, que le cas, où une Proposition unique, & très courte, peut rendre sensible à l'esprit la Possibilité d'une Chose, est en vérité si rare, que cela ne vaut pas la peine d'en faire une espece particuliere. Ensuite, je dis que ce cas & son contraire constituent tout au plus des Définitions plus ou moins parfaites, mais qu'il n'y a pas la moindre raison de qualifier l'une de Définition de *Chose*, & l'autre de Définition de *Nom*, chacune étant *de Chose & de Nom* tout à la fois, chacune expliquant tout à la fois ce que signifie le Nom & ce qu'est la Chose. La Législation de *Wolff*, & celle même de *Leibniz*, n'est pas assez généralement reconnue, pour faire recevoir une Dénomination si arbitraire par pur decret. Enfin, quoi qu'il en soit, ces Définitions dont nos Méthodistes font tant de fracas, & qui sont sans doute si essentielles à la vraye Méthode, quand on sait bien les employer; que sont-elles, Messieurs? Rien autre chose que la premiere & la plus simple réponse qui se puisse faire à la Question; *Qu'entendez-vous par ce terme là?* ou *Quelle est l'idée que vous désignez par ce terme?* Cela est tout un, vous dis-je. Si la Question est légitime, la Réponse pourra l'être; mais il n'y aura que cette premiere Réponse qui soit *Définition*. Toutes les autres Propositions qui seront formées de celle-là, quoiqu'elles expliquent encore le mieux du monde, & ce que signifie le terme, & ce que l'idée même est en soi, ne sont plus des Définitions; ce sont des Assertions, qui de conséquences en conséquences se peuvent multiplier tant qu'on voudra. Mais si la Question n'est pas légitime; si le terme & l'idée sont primitifs, élémentaires, clairs par eux-mêmes; préliminaires à tous les Axiomes; antérieurs à toutes les Définitions; s'il n'est pas possible de suivre le moindre procédé didactique sans les supposer mille fois; quelle réponse y pourriez-vous faire? Cette clarté intrinseque du terme & de son idée fait elle-même la réponse,

&

& tient lieu de Définition. Quelques Propositions ensuite que vous formiez, qui disent ce qui convient à l'idée & ce qui n'y convient pas, ce que signifie le terme ou ce qu'il ne signifie pas ; tout cela sera parallele à ces Assertions tirées de Définitions antécédentes : mais on se gardera bien de donner rien de tout cela pour *Définitions*, si l'on redoute la burlesque tournure de l'*Aliquid*, de ce *Quelque chose* qui est *quelque chose à quoi répond quelque chose qui représente quelque chose qui est quelque chose.* Il faut être, Messieurs, bien incorrigible, si l'on n'est pas corrigé par cet exemple. Ceci posé, je reviens présentement à mon sujet.

C'est donc dans l'idée primitive de *Jamais* & de *Toujours*, que je cherche l'idée de l'*Infini* ; idée primitive elle-même. Le mot, le terme *Infini* peut-être l'est un peu moins, mais certes l'idée l'est bien autant. Dès que j'ai conçu *Jamais* & *Toujours* ; dès qu'un rayon d'intelligence, qui a devancé tous les procédés didactiques, m'a fait comprendre que quelque chose *dure toujours*, que quelque chose *ne finit jamais*, (soit Dieu, soit le Monde ;) qu'a-t-il falu qu'entendre appeller cela *Durée infinie*, pour attacher aux mots de *Fini* & d'*Infini* des idées très claires, antérieures à quelques Définitions que ce puisse être ? Maintenant changez la phrase : dites, si vous voulez, dites que la Durée finie *est la Durée de ce qui finit*, & la Durée infinie *est la Durée de ce qui dure toujours*, & la Durée finie *la Durée de ce qui ne dure pas toujours :* ou, formez à l'aide des mots *être* ou *exister*, *commencer* ou *finir*, *continuer* ou *cesser*, avec *jamais* & *toujours*, telles phrases qu'il vous plaira ; vous présenterez des Synonymes, & non des Définitions. Cette permutation de termes équivalents, ou identiques, n'est cependant pas sans utilité. Elle seroit absurde, si on la donnoit comme Définition ; mais elle ne l'est point, lorsqu'on n'a pour but que de se *tâter*, ainsi que j'ai dit, & de se convaincre les uns & les autres, qu'on attache aux Mots les mêmes idées. Ici nous y trouvons de plus cet avantage : L'*Infini en durée* est visiblement la même chose que le *Toujours* ; & le *Fini en durée* la même chose que le *Non-Toujours*. Nous apprenons donc à n'être point la dupe de la forme négative du mot INFINI, comme s'il répondoit à quelque chose de moins

réel. C'eſt au contraire bien lui qui eſt le *poſitif* réel, & c'eſt le Fini qui eſt le *négatif*. Suivons ce fil.

On s'imagine, Meſſieurs, que nous n'avons qu'une idée négative de l'*Infini*, & l'on ſe fonde ſur la forme négative du Mot. Il ſemble que qui dit l'*Infini*, dit ſeulement *ce qui n'eſt pas le Fini*; ce qui n'eſt aucune des *Quantités finies* que nous voyons & manions, & qui nous ſont ſi familieres. Combien ne trouve-t-on pas paradoxe la penſée des Diſciples du Pere *Malebranche*, qui croyent, avec leur Maitre, que l'Infini en tous genres, en durée, en nombre, &c. nous eſt connu *plus clairement & plus directement* que le Fini, & même *antérieurement* au Fini? Mais, outre le Pere *Malebranche* & ſes Diſciples, *Leibniz*, notre grand *Leibniz*, a eu toute ſa vie cette penſée. Lui qui a tant varié dans les détails & dans l'application de la Doctrine de l'Infini, tantôt croyant le Monde *un Infini actuel* en nombre, en étendue, & peut-être même en durée; tantôt ſoutenant *qu'il n'y a aucune ſorte d'Infini actuel*, compoſé de parties, ſoit de durée, ſoit d'étendue, ni par conſéquent en nombre: *Leibniz*, dis-je, n'a pas laiſſé toute ſa vie de reconnoître une idée *abſolue* de l'Infini; idée, ſelon lui *poſitive & antérieure à celle du Fini qui n'en eſt qu'une limitation.* Il le dit expreſſément, entr'autres dans ſes *Réflexions ſur l'Eſſai de l'Entendement humain de* M. Locke, fort longtems avant ſa mort; & je le trouve encore dans cette penſée l'année de ſa mort. Défendant le P. *Malebranche* ſur pluſieurs points dans une *Lettre à M.* Rémond *au ſujet de la Réfutation du P.* du Tertre, il approuve le ſentiment des Cartéſiens, ou Malebranchiſtes, *qui conſiderent avec raiſon*, dit-il, *l'Infini comme antérieur au Fini qui n'eſt qu'une limitation.*



MÉMOI-

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE BELLES-LETTRES.

* * *



DISSERTATION

SUR

JODUTA,

IDOLE DE LA SAXE ET DE LA MARCHE;

PAR M. KUSTER. (*)

Traduit du Latin.

Le nom de l'Idole à laquelle on a rendu autrefois un culte religieux dans la Saxe & dans la Marche, & dont nous avons dessein de faire l'objet de quelques recherches, s'écrit en différentes manieres. Ceux qui en ont fait mention, l'ont appellée tantôt *Cedutum*, ou Zedutte, tantôt Zeduck, tantôt *Jodutta*, & Gedeute. Les mémes Auteurs alléguent chacun des raisons de ces dénominations & des leurs dérivations: nous rapporterons ici succintement ces diverses opinions, & nous y joindrons la nôtre.

Ceux qui écrivent *Cedutum*, ou *Zedutte*, ont corrompu ce mot, comme cela est arrivé à plusieurs autres noms, qui, ayant été mal entendus, ont souffert une prononciation qui ne s'accorde pas avec leur origine. Au lieu donc de Jodutte, ou *Joduta*, qu'il faloit dire, le peuple a fait de là Zedutte, en tordant véritablement ce nom. Pour faire mieux com-

(*) On est obligé de resserrer ici l'étendue de la Classe de Belles-Lettres; tant parce que quelques Académiciens n'ont pas fourni, sans doute par de bonnes raisons, les Mémoires qui auroient pû & dû entrer dans ce Volume, que parce que le Libraire presse d'en finir l'impression, & qu'on publiera encore dans le cours de cette année un autre Volume où cette Classe occupera un espace d'autant plus grand.

comprendre comment la chose est arrivée, il ne faut pas passer sous silence, que le mot Jodutt, ou *Jodutha*, vient de la Langue Italienne, & signifie la même chose que les mots Latins *me adjuvante*. Il y en a pourtant qui dérivent *Joduth* de l'Hebreu, *Jodeim*, *les Devins*, ceux qui savent l'avenir, prétendant que les Saxons ont fait usage de cette pratique, avant que d'être éclairés du flambeau de la Révélation. Et même, dans les Versions de la Bible en Suédois, en Danois, & en bas Saxon, l'expression de *Jeremie*, que *Luther* a rendue par; sie schreyen Zetter über dir, est censée répondre à l'invocation de *Jodutta*. Je n'examinerai pas ici, si l'on peut rapporter ce terme à l'ancien usage, suivant lequel les Nations barbares, quand il survenoit quelque danger imprévu, ou qu'elles étoient saisies de quelque terreur panique, crioient aux armes avec véhémence & comme tout d'une voix. On sçait que les Germains poussoient des hurlemens dans ces occasions; & *Tacite* nous parle des chants affreux dont ils remplissoient l'air en allant au combat. C'est peut-être d'après cette idée que *Weiss* a donné une nouvelle explication du nom de *Jodutt*, en le rendant par *gout*, qui veut dire, *fors pour prendre les armes & repousser l'ennemi*: mais ce sont là de simples jeux de mots, auxquels je ne daigne pas m'arrêter.

Ceux qui adoptent le mot de Zeduck, veulent le dériver des citations qui sont en usage dans la Jurisprudence; par où l'on insinue assez clairement que la statue, ou l'Idole en question, avoit une espece de Tribunal, devant lequel on citoit ceux qui s'étoient rendus coupables de certains crimes, & l'on instruisoit leur procès.

Quant à l'étymologie qui remonte au mot Zeter, elle n'est pas moins manifeste: & l'on y voit la formule connue & usitée encore aujourdhui dans la sentence de bannissement, qui est accompagnée de la clameur dite *Zeter & Mordio*.

Enfin il est tout aussi aisé de voir sur quoi se fondent ceux qui pensent que *Jodutha* est la même chose que Gedeute, mot qui revient à celui que notre Langue moderne exprime par Bedeute, ou Bedeutniss,

&

ce qui signifie *Monument*. Ils croyent que le mot Gebut a pu être déduit naturellement de là, & employé pour désigner quelque Statue, ou Idole, qu'on avoit érigée comme un mémorial. Les exemples en étoient fréquens dans l'Antiquité; & nos Saintes Ecritures en fournissent plusieurs, parmi lesquels il suffira d'indiquer le célébre Monument, dit *Eben-etzer*.

Je passe à la figure de cette Idole, à l'occasion dans laquelle elle fut érigée, & au culte qu'on lui rendoit. Ceux-même qui ne sont pas d'accord sur l'étymologie de son nom, conviennent que *Jodutha* doit son origine à ce *Lothaire* de Saxe, qui remporta une insigne victoire sur l'Empereur *Henri V*. Pour peu qu'on ait quelque teinture de l'Histoire, on sçait que l'Empereur reçut dans cette journée le coup le plus funeste. La bataille se donna l'an 1115 près de *Gerbstadt*; *Henri* y perdit quarante cinq mille hommes, & en même tems toute l'autorité qu'il avoit en Saxe. Depuis ce tems-là il ne put se relever, le Pape & l'Archevêque de Magdebourg ayant fulminé contre lui une excommunication solemnelle, tandis que de son côté l'Archevêque de Mayence le persécutoit avec un acharnement implacable. Les campagnes de *Mansfeld* furent le théatre de cet évenement, près du bois qu'on nomme en Allemand le *Welphs-holtz*. *Lothaire le Saxon*, nommé aussi quelquefois *Luder*, y triompha; & pour perpétuer la mémoire de son triomphe, fit ériger la statue en question, sous la figure d'un homme en habillement de guerre, tenant un ceste de la main droite, & ayant au bras gouche un bouclier, sur lequel étoient les armes de Saxe, savoir un cheval blanc sur un écu rouge. C'est d'*Albert Krantzius* que nous tenons ce fait. Si l'on peut hazarder ici une conjecture, *Lothaire*, qui savoit parfaitement jusqu'où alloit l'inimitié entre l'Empereur & le Pape, posa ce Monument, afin que la postérité se souvînt, que des Payens, (car on réputoit tels ceux que les foudres de l'excommunication Papale frappoient,) avoient combattu dans cette occasion contre des Chrêtiens, que par un juste jugement de Dieu ils avoient été défaits, & que ce n'étoit uniquement que parce que les Saxons s'étoient appuyés sur le secours d'enhaut,

que cette journée avoit été si heureuse pour eux: d'où vint à la statue le nom de *Joduta*, ou *divine assistance.* Voyons à présent quel culte religieux lui fut rendu.

Les Saxons, aussi-bien que les peuples qui habitoient autrefois notre Marche, mirent *Jodutha* au nombre de leurs Divinités. Les Germains avoient alors un grand nombre de ces Divinités subalternes, dont le docte *Schedius* a donné l'énumération. Je n'ignore pas que *Theodore de Hase*, ce Théologien & Philosophe distingué de *Breme*, dans ses *Paralipomenes* sur la savante Dissertation dans laquelle *Gerhard de Mastricht* a examiné ce qui concerne *Jodutha*, prétend que cette statue doit être effacée du catalogue des Idoles; mais les raisons sur lesquelles il s'appuye, sont plus ingénieuses que solides. Pour opposer autorité à autorité, j'en appelle à *Severin*, qui, dans ses notes sur *Adam de Breme*, a placé cette statue au rang des Idoles, auxquelles nos Ancêtres, encore infectés des superstitions Payennes, ont rendu un culte: à quoi je pourrois joindre bien d'autres témoignages. Quel doute pourroit-il surtout rester à cet égard, si nous prouvons le cas qu'on a fait anciennement de cette Idole, & de la Montagne sur laquelle elle étoit placée; & si nous indiquons des sermens, ou imprécations, dans lesquelles le nom de *Jodutha* étoit employé? Dans la Comté de *Mansfeld*, où nous avons déjà dit que s'étoit donnée cette sanglante bataille, le peuple ignorant & grossier adoroit véritablement cette Statue. Ce fut l'Empereur *Rodolphe* qui abolit cette superstition, & qui fit construire une Chapelle où l'on plaça cette Inscription.

Anno milleno centeno ter quoque quino
Silvam Welponis perfudit gutta cruoris.
Sunt fere necati XL mille quinque,
Ipso nempe die Dionysii martyris almi.

Les Monumens historiques nous apprennent que cette Chapelle fut en grande réputation chez les Catholiques Romains, & qu'on y faisoit de fréquens pélérinages, apparemment en mémoire des Chrêtiens qui avoient été tués dans la bataille, & pour les honorer. Les Messes & les

les Indulgences faisoient dans cet endroit un trafic des plus abondans; & comme on avoit placé le simulacre de *Jodutha* dans cette Chapelle, le pauvre peuple la vénéroit, & on lui avoit persuadé entr'autres choses qu'elle guérissoit du mal de dents, lorsqu'on en détachoit un petit morceau de bois, & qu'on le portoit à sa bouche. Il y a plus. *Reinerus Reineccius*, Savant distingué, prétend qu'il y a eu un Saint *Jodutha*, & qu'on lui rendoit un culte dans certain territoire nommé *Delbruch*; à l'occasion de quoi l'on avoit fait ces deux Vers Allemands;

S. Jodutte war ein heiliger Mann.
Wenn der Feind kam ging er voran.

Il est aussi fait mention en divers endroits d'une Montagne sur le bord du Weser, qui tiroit son nom de *Juditha*. Il y a encore un Proverbe usité en Westphalie: *je te battrai tant que tu invoques* Juditha. Je crois qu'on peut tirer de là un indice du Saint en question, tout comme on en tire un de *Crodon*, Divinité subalterne des Germains, en faisant attention à la formule d'exécration usitée encore aujourdhui, du Croden-tufel. Je puis ajouter qu'on fait mention d'un bois consacré au culte de *Jodutha*; & qu'on sait assez que chez nos Ancêtres les bois surtout, & aussi le bord des fleuves, étoient les lieux où les Divinités recevoient les hommages de leurs adorateurs. Il y a une Ville assez considérable dans la Marche Moyenne sur l'Oder, *Writzen*, dont les habitans ont eu beaucoup de dévotion pour *Jodutha*. Près de cette Ville, est la Montagne de *Luseberg*, dite peut-être ainsi pour *Louiseberg*, de l'autre côté de laquelle, vers *Schultzendorff*, il y avoit un Monument de *Jodutha*, comme je l'ai appris par un fragment des Annales de *Writzen*, dressées par *Paschase Albrecht*, Consul de cette Ville, mort il y a environ quarante ans, qui dit avoir encore vû les débris de la base sur laquelle avoit été érigée la statue de *Jodutha*. Pendant les tems de guerre on avoit porté cette Statue dans un canton marécageux, où sont quelques métairies tout proche de la Ville, (cela s'appelle le *Bruch*,) afin qu'elle y fut plus en sûreté, suivant le rapport du même Annaliste. Il ajoute que, devant la porte de la Ville

le qui touche à l'Hôpital, sur le chemin qui conduit à Berlin, la statue de pierre de *Jodutha* étoit placée sous une arcade, aussi de pierre, à trois cens pas de la porte, & que les passans s'arrêtoient pour l'adorer, & pour implorer son secours, à cause des mauvais chemins dans lesquels ils alloient s'engager. On demandoit surtout au Saint qu'il prit les chevaux sous sa protection, afin que les Charretiers par leur brutalité, ou en voulant trop les presser, ne leur fissent point de mal. Et une preuve que la route étoit en effet bien mauvaise, c'est qu'il se trouvoit toujours là des postillons tout prêts, qui pour une petite rétribution atteloient leurs chevaux devant les voitures trop chargées, au village de *Lüdersdorff*, où la Montagne devient trop difficile. Les habitans du canton marécageux dont nous avons déja parlé, prioient aussi *Jodutha* de protéger leur bêtail, & de favoriser leur pêche. Cette statue a été engloutie dans les eaux, où *Adam Spengler*, Inspecteur de *Writzen* dans le siecle passé, voulut qu'on la jettât, soutenant avec beaucoup de chaleur qu'elle étoit incompatible avec le culte du vrai Dieu. On ne sauroit être bien assuré, si cette idolâtrie est pleinement abolie; mais ce qu'il y a de certain, c'est que des imprécations usitées encore aujourdhui en sont de tristes vestiges. Les gens de ces quartiers-là disent fréquemment; Zeter (ou Zechen) über den Jadut; Zecher über den betrübener; ce qui s'employe, tantôt comme un signe d'admiration, tantôt comme une exécration.

Il s'ensuit de là qu'on ne doit pas regarder comme une fable ce qu'on rapporte d'un simulacre de *Jodutha* détruit à *Marbourg*, par *Frideric*, Evêque de *Halberstadt*; d'autres disent par *Werner*, Evêque de *Mersebourg*, fondateur d'un Monastère de S. Pierre, qui existe encore aujourdhui dans le fauxbourg de cette ville qui porte le nom d'Altembourg.

Je vais terminer ces recherches par trois remarques. 1. Ce que je viens de rapporter de *Writzen*, a lieu aussi dans un territoire marécageux près de Breme, où la même formule d'imprécation etoit usitée vers la fin du siecle passé. J'en ai pour garant l'Auteur

teur d'un Journal Littéraire qui paroissoit il y a quelques années, M. *Pratje*, Théologien de *Stade*, qui rapporte la chose en autant de termes dans son Traité sur le territoire nommé *Vieland*, soit à cause du bétail, ou des marais qui s'y trouvent. 2. *George Rothe*, autrefois Recteur d'abord à *Fürstenwalde*, & ensuite à *Stade*, homme savant & connu par ses Ecrits, dans sa Chronique de *Stade*, met *Jodutha* au nombre des Divinités qui ont été l'objet du culte, non des Payens, mais des Chrêtiens de ces siecles d'ignorance; & il explique aussi ce mot par *sainte assistance*. Il ajoute que c'est d'après la statue de *Jodutha* qu'on a imaginé celle de la Bienheureuse Vierge, tenant entre ses bras le petit Jesus, telle qu'on la voit sur les monnoyes de Hongrie, & qui est aussi la Patrone de ce Royaume. Pour confirmer cette assertion, il en appelle à un Temple que Charlemagne fit construire en Westphalie, près du Mont *Osnegg*, l'an 783. & auquel il donna le nom de *Sant-Hülpe*, comme on prononce en Westphalie, ou *sainte assistance*. *Rothe* allégue encore divers argumens propres à appuyer son opinion, & qui prouvent en même tems qu'on ne consacroit alors jamais de Temple à Dieu, ou au Sauveur, mais que c'étoit toujours à quelque Saint qu'ils étoient dédiés, & surtout à la Vierge. *Lodtmann*, dans son bel Ouvrage sur les Monumens d'*Osnabruck*, s'étend sur le trophée de *Charlemagne* après la bataille donnée près de *Thietmelle* & du village de *Drabber*. Il ajoute que, dans un Temple du Holstein, on trouve un Calice, où le Sauveur est attaché à la Croix ayant à ses deux côtés sa Mère & son Disciple *Jean*, avec cette inscription; *Sainte Holpe, priez pournous*. On voit aussi encore dans le même endroit une Image de bois que les gens du lieu nomment *Sainte Hülpe*, & qui, en l'examinant bien, paroit au jugement du même *Rothe* être une Vierge. Enfin, on raconte que dans la muraille on a creusé un trou, auquel on donne le nom de *Sant-Hulpen Kluns*, c'est à dire, *fente de la sainte assistance*: & cet Auteur croit qu'il y avoit aussi dedans une Image de la Vierge. Il dérive encore de là le nom de la *Confrairie de S. Hülpe*, appellée aussi *Confrairie du secours Divin*. En général, il y a autour de *Detmold*, de *Diepholt*, & de *Göttingue*, quan-

tité de lieux dont les noms dérivent de celui de *sainte assistance.* Il n'a pas été difficile à *Rothe* de découvrir par la même voye l'origine du Cloître situé près d'*Eisleben*, qui est à présent la Prevôté d'*Helfte.* Il estime que ce Cloître consacré à la Vierge, avoit été d'abord nommé *Helpede*, & qu'on a fait de là les noms d'*Helfte*, & *Helste.* 3. Ajouterai-je en deux mots qu'on a voulu faire remonter à la même source le nom de ce *Stulpe*, fils du Roi de Sicile, qui souffrit le martyre sous l'Empereur *Antonin*, comme si c'étoit par contraction pour *S. Hulpe?* Mais cela est trop ridicule pour y faire la moindre attention. (*)

(*) Depuis la composition de ce Mémoire, j'ai lu l'ingénieux Ouvrage que le savant Mr. *Godofroi Schütze* a publie sous le tire d'*Apologie des anciens Germains*, & j'y ai vu qu'il croit devoir ôter entierement *Joducha* du nombre des Divinités. Cela m'a rappellé l'idée de l'Ecrit de *Gisbert Voët*, qui traite *des Dieux, ou des Saints chimériques.*



DIS-

DISCOURS
POUR
L'ANNIVERSAIRE DE LA NAISSANCE DU ROI. (*)

MESSIEURS,

En célébrant, comme les devoirs les plus sacrés nous y engagent, l'heureux jour qui ouvre à notre grand Monarque la carrière d'une nouvelle année de cette glorieuse vie que l'Arbitre suprême des Destinées prolonge pour notre félicité commune; ce sont moins des années que nous célébrons, que des Epoques dont le souvenir durera autant que le Monde.

Transportons-nous d'avance dans quelcun des siecles qui doivent succéder à celui-ci; essayons de parler le langage de la Postérité. Comme il est toujours sincere, cette supposition fera disparoitre de ce Discours le ton de Panégyrique, qui est suspect, dans les occasions mêmes où il est le mieux fondé. Que l'Historien le plus véridique, qu'un émule de l'immortel Président *de Thou*, entreprenne de raconter à nos Neveux les grands événemens qui sont comme entassés dans le Regne de FREDERIC! Voici, ce me semble, en racourci ce qu'il pourra & ce qu'il devra dire.

„L'auguste Maison de Brandebourg, devenue Royale au commencement du XVIII Siecle, avoit augmenté par l'éclat de cette suprême Dignité celui qu'elle tiroit de son illustre origine, & tout récemment des vertus & des exploits de cet Electeur, décoré à si juste titre du surnom de GRAND. Cependant elle étoit encore bien éloignée, non seulement de posséder, mais même de pouvoir présager, le rang qu'Elle tiendroit, avant le milieu du même Siecle, parmi

(*) Prononcé par le Sécretaire perpétuel dans l'Assemblée publique du 26 Janvier, 1758.

„mi les principales Puissances de l'Europe; bien moins encore, la „possibilité de soutenir la Guerre la plus rude contre presque toutes „ces Puissances réunies, & de la soutenir avec les succès les plus écla-„tans. On auroit mis au rang des plus étranges chimères l'idée que „des forces, telles qu'étoient celles d'un Roi de Prusse en 1712, lors „que FREDERIC II. naquit, devinssent celles que ce même „FREDERIC a opposées en 1757 aux deux tiers de l'Europe. Et „ces forces une fois existantes auroient encore été très disproportion-„nées aux effets qu'elles ont produit, si elles n'avoient été dirigées, & „comme animées, par le Chef sous lequel on les a vû se développer & „signaler.

„Le Régne de FREDERIC GUILLAUME prépara celui „de son successeur, & servit à poser les fondemens inébranlables de cet „édifice de la grandeur Prussienne, qui a été si rapidement conduit au „plus haut faîte d'élevation. Les Finances & les Troupes, ces deux „nerfs si puissans de tous les Corps politiques, acquirent une consistan-„ce à laquelle d'autres Etats arrivent à peine pendant des siecles en-„tiers. Et il sembloit que ce sage Monarque eut reçu charge d'en-„haut d'amener les choses précisément au point où il les conduisit, „pour les remettre à point nommé à son Fils, au moment où la scene „des grands événemens devoit s'ouvrir, & l'inviter à y jouer un des „premiers rôles.

„Le Chef de l'Empire d'Allemagne ayant suivi de près le Roi de „Prusse dans la nuit du tombeau, FREDERIC revendiqua de justes „droits sur la Silésie, & les ayant soutenus à main armée, il acquit la „souveraineté de cette importante Province, que la Paix de 1742 lui „assura. Les années 1744 & 1745 virent cette Paix détruite & ré-„tablie. Des victoires continuelles apprirent aux Ennemis de „FREDERIC, qu'il faloit, ou cesser de l'attaquer, ou n'y penser „que lorsqu'on pourroit l'accabler. C'est à prendre ce dernier parti „qu'ils consacrerent dix années d'intrigues secretes, qui produisirent „enfin cette réunion, dont on ne se promettoit pas moins que l'écrase-

„ment

„ment du Thrône Prussien. Celui qui l'occupoit, instruit de ces ap-
„prêts formidables, voulut les dissiper, en prévenant leur premier ef-
„fort. Il entra en Saxe au mois de Septembre 1756. & ayant mis cet
„Electorat hors d'état de lui nuire, il pénétra en Boheme, où ses pre-
„miers pas furent marqués par la Victoire de *Lowositz*.

„L'année suivante le conduisit aux pieds des murs de Prague, où
„les plus puissans obstacles ne firent que rehausser la gloire des Prus-
„siens, à qui rien ne sembla désormais impossible. Mais, bientôt après,
„le torrent de tant de succès non-interrompus parût avoir rencontré
„une digue; les Ennemis du Roi crurent que leur tems étoit venu, &
„qu'ils moissonneroient à leur tour les Lauriers que la Victoire n'a-
„voit encore accordés qu'à ce Prince. Leurs espérances redoublerent
„quand ils virent fondre sur lui de tous les coins de l'Horizon des Armées
„que la Terre pouvoit à peine porter. Ils ne douterent plus que l'an-
„née 1757 ne mit le comble à leurs voeux, en anéantissant jusqu'aux
„moindres vestiges de ce pouvoir tant redouté. Mais leur attente fut
„trompée de la maniere la plus imprévue & la moins croyable.
„L'Armée Françoise fut défaite, ou pour mieux dire, s'évanouït à
„*Rosbach*, le 5 de Novembre; & le même jour du mois suivant, aux
„portes de *Breslau*, l'Armée Autrichienne, malgré une résistance des
„plus opiniâtres, ne put éviter un sort pareil. La Silésie qu'elle avoit
„inondée, rentra sous l'obéissance du Roi avant la fin de l'année; &
„toute l'Europe attentive à ces prodiges put à peine se persuader ce
„que la Renommée lui racontoit des Victoires de FREDERIC."

Ici finit l'Historien. Je voudrois bien, MESSIEURS, à-présent pouvoir joindre à son récit un feuillet du Livre des Destinées. Je voudrois bien avoir les yeux assez perçans pour lire, non dans l'avenir le plus reculé, mais seulement dans le cours de l'année que nous venons de commencer, & vous annoncer ce qu'elle enfantera. Mais non, je me retracte; ce souhait seroit non seulement téméraire, puisqu'il ne s'accorde pas avec les vues de la Providence, mais j'ose ajouter qu'il est inutile, puisque, suivant une expression favorite du grand

Leibniz, qui ne sera pas déplacée en parlant à une Compagnie qui lui doit tant, le passé & le présent sont assez *gros* de l'avenir, pour nous permettre de l'appercevoir aussi distinctement que s'il existoit déjà. Si des Armées nombreuses & florissantes n'ont pu résister à de petits Corps commendés par FREDERIC, que feront ces mêmes Armées détruites & ruinées contre ce Héros à la tête de ses Légions victorieuses? Si, en deux mois de tems, lorsque les apparences étoient le plus contraires, l'allégresse & les acclamations ont succédé aux allarmes & à l'effroi, que ne doit-on pas attendre d'une Campagne qui s'ouvrira sous de si favorables auspices?

Mais s'ouvrira-t-elle? Ah! si nos soupirs, après avoir fléchi le Dieu des Batailles, pouvoient monter jusqu'au Thrône du Dieu de Paix! Ah! si les portes de ce Sanctuaire des Sciences ne se r'ouvroient, que pour annoncer le repos rendu à notre chere Patrie, & la fin de tant de calamités sous le poids desquelles une foule de contrées gémissent! Espérons cette faveur insigne de la bonté celeste, dont nous avons éprouvé tant d'effets; espérons-la des victoires éclatantes, des triomphes accumulés, que nous venons de célébrer; espérons-la de l'héroïsme réel de notre auguste Protecteur, qui ne croira ses succès complets & couronnés, que lorsqu'il nous verra tranquilles & heureux.



DIS-

DISCOURS
SUR
LE VÉRITABLE PRINCIPE DE LA GRANDEUR D'AME. (*)

Les mots de *grand* & de *grandeur* plaisent beaucoup à l'oreille de l'homme; ils réjouissent son imagination: & pour peu qu'il voye jour à s'en faire l'application, rien n'égale la dextérité de l'amour propre, qui sait s'approprier les choses les plus éloignées & les moins susceptibles de semblables applications. L'homme ressemble toute sa vie aux enfans; la puérilité l'accompagnee jusqu'au tombeau. Il s'estime plus beau, plus grand, plus parfait, à mesure que ses *entours*, expression encore nouvelle, mais qui paroît s'accréditer, s'embellissent, s'aggrandissent, se perfectionnent. La Philosophie a tant de fois détruit tous ces prestiges, elle a si pleinement dépouillé les mortels de toutes leurs grandeurs empruntées, de toutes leurs perfections postiches, que je croirois perdre le tems en répétant ici ce qu'elle a dit de plus fort sur ce sujet. Mais ne dissimulons rien: ce tems seroit encore perdu dans un autre sens; c'est que les hommes n'en feront, ni plus, ni moins: ils ne changeront, ni de sentimens, ni de conduite: une grande force, un grand amas de richesses, une grande autorité, leur paroîtront toujours les grandeurs les plus desirables, les plus réelles, & peut-être les seules qui conviennent à l'homme.

Si, ne pouvant méconnoître le principe intérieur qui les fait penser, les facultés dont il est doué, les opérations qu'il peut exécuter, il leur arrive d'y mettre le siége de la grandeur, ils prennent encore le change; & accordant toute leur admiration à ces qualités brillantes,

 mais

(*) Prononcé par le Sécretaire perpétuel dans l'Assemblée publique du 1 de Juin 1758.

mais legères, dont l'assemblage forme ce qu'on appelle l'Esprit, ils assignent les premiers rangs dans l'espece humaine à ces hommes qui, de siècle en siècle, ont surpassé les autres par l'étendue de leurs connoissances, & par la pénétration de leur génie. Ces qualités sont réelles, je l'avoue, & valent infiniment mieux que les dons corporels, & les présens de la Fortune. Il est beau de voir des hommes qui, las de ramper sur cette terre avec leurs semblables, prennent un généreux essor, s'élevent à des régions supérieures, creusent les abimes les plus profonds, & rapportent de leurs expéditions des découvertes qui étonnent & instruisent. Mais, d'un côté, le nombre de ces Génies inventeurs, & presque créateurs, se réduit à fort peu de chose; & de l'autre, la plupart des inventions qui ont fait le plus de bruit, exactement appréciées, n'étendent guères la sphère de nos connoissances réelles. Nous savons bien plus de choses que les Anciens; mais nous ne savons pas mieux celles qu'il nous importeroit véritablement de sçavoir. Après cela, la célébrité n'est pas toujours le partage de ceux qui la méritent; ou ce n'est qu'une justice tardive rendue par la postérité à des gens qui n'ont souffert que mépris & injustice de la part de leur siècle. Et réciproquement, bien des gens à grands talens qui se plaignent qu'on leur refuse la qualité de Grands-Hommes, qu'ils ne cessent de s'arroger, ont tort de se plaindre, lorsqu'ils se montrent plus petits encor par le coeur, par les sentimens, & par la conduite, qu'ils ne paroitroient grands, si l'on se bornoit à les envisager par leurs côtés avantageux.

Laissons donc là l'Esprit, comme une terre inconsistante, un sable mouvant, sur lequel l'édifice d'une grandeur réelle ne sçauroit reposer. Parmi toutes les expressions composées, rélatives à l'homme, dans lesquelles le mot de grandeur entre, il n'y en a de réelle que celle de grandeur d'ame; mais avec tout cela il faut encore la dégager de bien des obscurités, des inexactitudes, qui en accompagnent l'usage. Rien n'est plus beau qu'une grande ame; j'en conviens, & je reconnois en même tems que ce n'est point une idée chimérique, qu'il en existe effectivement de telles, & que c'est à elles, bien plus

qu'aux

qu'aux grands esprits, qu'il appartient de faire la gloire des siècles qui ont le bonheur de les posséder. Mais, pour ne pas tomber de nouveau dans les méprises que nous avons observées jusqu'ici par rapport aux acceptions légitimes d'un terme aussi commun qu'équivoque, remontons à la source, cherchons le principe de la grandeur d'ame.

Si l'on recueilloit les suffrages du genre humain, la grande pluralité des voix iroit, si je ne me trompe, à la placer dans l'intrépidité. De tout tems les hommes, naturellement foibles & pusillanimes, ont été disposés à respecter ceux d'entr'eux qui, montrant une ame égale dans toutes les situations, portant surtout un front serain au milieu des dangers les plus redoutables, ne laissent jamais paroître la moindre émotion machinale, le moindre désordre dans leurs idées, la moindre inquiétude sur l'issue des événemens; mais qui, prenant leur parti, au fort de la tempête comme au sein du calme, ont achevé avec succès les entreprises les plus périlleuses: ou même, quand les obstacles ont été supérieurs à leurs efforts, ont sacrifié généreusement leur vie. De là l'origine des Héros & de l'Héroïsme. L'impression causée par les caracteres intrépides a été si forte qu'on a identifié l'intrépidité avec la grandeur d'ame. J'avoue qu'elles ont une extrême affinité, & qu'on ne sauroit posséder l'essence de l'une sans avoir celle de l'autre. Mais, si l'on y regarde de plus près, l'intrépidité n'est qu'un état passager & accidentel, où la grande ame ne se trouve que dans des cas assez rares: c'est un effet particulier de sa grandeur; c'est une conséquence qu'elle tire de ses principes; mais qui dit intrépide, n'exprime, ni toutes les dispositions qui conviennent à une grande ame, ni surtout ce que nous cherchons principalement, le principe commun & constant de ces dispositions.

Ceux qui connoissent mieux les véritables intérêts de l'humanité, seroient plus tentés de placer la grandeur d'ame dans la bienveillance universelle, c'est à dire, dans cette bienveillance réelle, qui est encore mieux nommée bienfaisance. En effet, cette précieuse qualité, moins éblouissante, moins saillante, pour ainsi dire, que l'intrépidité,

est bien plus réelle. Quand j'accorderois aux enthousiastes de l'Héroïsme qu'il n'y a de grands hommes que les Héros, ils seroient obligés de m'accorder à leur tour que les Héros bienfaisans sont les seuls dignes de ce nom. Mais pourquoi faut-il être à la tête d'un Etat, ou d'une Armée, pour avoir une grande ame, & pour agir avec grandeur d'ame? Il y a de simples Soldats qui sont des Héros par l'intrépidité; il y a des Citoyens obscurs qui sont de grandes ames par la bienfaisance. Je crois néanmoins voir plus de grandeur, & même de cette grandeur qui suppose de la force, du courage, dans le bienfaisant que dans l'intrépide. Celui-ci, on le sçait, est pour l'ordinaire redevable à la constitution vigoureuse de ses organes, des efforts qu'il soutient sans plier; & quand il se trouve au fort d'une mêlée, son état devient encore plus machinal, il est plutôt entrainé que guidé par ce principe martial qui le domine: ou, si l'ame préside aux mouvemens du corps, elle découvre en même tems les dangers, & les craint à proportion de leur importance. Quand les vrais Héros sont véridiques, ils font ces aveux, qui les honorent plus que le relief qu'ils voudroient tirer d'une intrépidité méchanique & aveugle. On sait la réponse triviale en apparence, mais très judicieuse en effet, que Charles-quint fit à un Officier qui se vantoit sottement de n'avoir jamais eu peur. La bienfaisance demande un courage, une supériorité, une grandeur d'ame, qui ont de beaucoup plus fortes épreuves à soutenir. C'est dans le silence, le recueillement, l'obscurité, qu'un homme bienfaisant s'occupe, non comme l'intrépide Guerrier, à détruire ses semblables, mais travaille à adoucir leur sort, à soulager leurs misères, à les éclairer, à les conduire, à les préserver des pièges dans lesquels ils pourroient tomber, ou à les en tirer, lorsqu'ils n'ont pas pu ou sçu les éviter. Quels encouragemens le soutiennent dans cette carriere, qui, remarquez-le bien, n'est pas un simple jour de bataille, une seule campagne, le cours de quelques années de guerre, mais qui dure autant que sa vie? Ces encouragemens, s'il ne les tire pas de son courage réel, de sa grandeur d'ame innée, n'existent point; il n'y a, ni honneurs, ni avancemens, ni acclamations, ni triomphes, pour le bien-

bienfaisant. Il est ignoré, il est méconnu; que dis-je, il est presque toujours payé d'ingratitude par ceux qui ont été les objets de sa bénéficence. Je ne vois point de plus belle ame, de plus grande ame, que celle qui, prenant de nouvelles forces à mesure qu'on lui oppose de nouveaux obstacles dans l'exercice de cette salutaire disposition, va toujours semant à droite & à gauche, quoiqu'avec prudence & discernement, tout ce qu'elle croit propre à rendre ceux avec qui elle vit, meilleurs & plus heureux.

Mais, comme je veux tenir la balance égale, & que malgré la prédilection que j'ai pour la bienfaisance, je n'aimerois pas à la présenter sous un point de vue illusoire, j'avoue qu'il peut y entrer aussi, & qu'il y entre souvent, du machinal. L'intrépide l'est par roideur, & cette roideur tient quelquefois d'assez près à la férocité. Le bienfaisant l'est par douceur, & cette douceur n'est pas éloignée de la foiblesse. Le premier ressemble aux eaux d'un torrent qui brisent & entraînent toutes les digues; le second à celles d'un fleuve qui suit sa pente, & qui, trouvant des campagnes trop basses, les inonde. La Société tire d'insignes avantages de ces deux classes d'hommes, lors même que le principe de leur grandeur d'ame n'est pas bien dévelopé, & qu'il faut l'aller démêler au travers des dispositions du tempérament. Les premiers sont ses boulevards & ses libérateurs; les seconds ses nourriciers & ses conservateurs: elle peut leur décerner des statues & des couronnes: elle doit s'estimer heureuse à proportion du nombre de semblables Citoyens qu'elle possede, & ne rien négliger pour l'augmenter.

Cependant ces idées ne remplissent point encore l'attente que vous a donnée le titre de ce Discours; elles ne mettent point évidemment sous vos yeux le véritable principe, la source réelle, de la grandeur d'ame. Quelques dégrés d'intensité ou de relâchement dans les muscles, dans les fibres, dans les nerfs, d'abondance ou de disette, de rapidité ou de lenteur, dans le cours des esprits animaux, ne sauroient faire de grandes ames. Les ames véritablement distinguées & privilégiées doivent tenir leurs prérogatives de qualités qui appartiennent essen-

essentiellement à l'ame, quoiqu'ensuite leur exercice soit soumis au corps, & qu'il puisse résulter de cette dépendance quelques variétés de détail. L'ame n'a proprement qu'une faculté, c'est celle de voir, ou de se représenter: toutes ses opérations, que l'on désigne ensuite par différens noms, comme si c'étoient autant de facultés différentes, rentrent & se résolvent dans cette faculté primitive. J'en conclus que l'ame n'est grande, qu'elle n'est bonne, qu'elle n'est estimable, qu'autant qu'elle voit bien, avec netteté, avec précision, les objets, sous leurs véritables faces, & suivant les différentes rélations qu'ils ont entr'eux. Les petites ames voyent les choses confusément; les mauvaises ames les voyent de travers, renversées. Une ame basse est éblouie du faste d'un Grand; elle croit qu'il n'y a point d'autre grandeur. Une ame noire voit les biens de la fortune avant la vertu, & les moyens de s'enrichir & de s'aggrandir avant ceux de conserver son honneur & sa conscience. Une ame basse croit qu'il y a de la gloire à intimider, à faire trembler, & même à faire souffrir ceux qui n'ont pas la force de résister; une ame noire profite de cette force pour opprimer, vexer, piller, usurper. La grande ame remet tous ces objets à leur place & dans leur situation naturelle. Le faste d'un Grand, s'il n'est qu'attaché par l'usage à sa condition, lui paroit une chose indifférente; s'il va au delà, une sottise, une fatuité: les voyes injustes d'arriver à la fortune, l'utile de *Hobbes*, les trahisons de *Machiavel*, les exploits des *Alexandres* & des *Césars*, sont à ses yeux autant d'indignités & de scélératesses. Faire du bien & ne rien craindre en le faisant, voilà les seules choses qui lui paroissent estimables, louables, satisfaisantes; voilà les deux arcboutans sur lesquels repose toute sa grandeur. Ne conviendra-t-on pas avec moi, que tout cela est une affaire de vue, d'intuition; que la folie des hommes n'est que pur aveuglement; & que toutes les ames seroient grandes, si elles voyoient en quoi consiste la grandeur, & où il faut la chercher?

Est-ce donc dans cette vue distincte d'une ame éclairée que nous placerons la source de la grandeur d'ame? Je crains que cette source, malgré sa réalité, ne paroisse trop éloignée; que ce principe, quoique juste

juste & menant droit aux conséquences que j'en tire, n'ait quelque chose de trop abstrait. Je crains même qu'on ne m'objecte que bien des gens ont une théorie saine, & une pratique qui n'y répond pas; qu'on peut avoir des idées grandes, sublimes, magnifiques, & n'avoir pas une grande ame; en un mot que, généralement parlant, les hommes sont très peu conséquens. je pourrois répondre que je n'avois promis que d'établir un principe, & que, si l'on ne peut m'en contester la justesse, j'ai dégagé ma promesse; que ceux qui démentent leurs lumieres, rentrent alors dans la classe du vulgaire, & voyent mal, parce que quelque passion vicieuse offusque leur jugement; enfin, que c'est toujours une très grande avance que de pouvoir raisonner juste quand on le voudra, quand on se rappellera des principes dont on a eu occasion d'acquérir la connoissance.

Mais j'avoue que, pour dériver plus sûrement la grandeur d'ame de la distinction de nos idées, il faut que cette distinction ait produit préalablement un effet qui devroit & pourroit en résulter toujours; quoiqu'il n'ait pourtant lieu que dans le plus petit nombre des hommes, & même des hommes éclairés. Cet effet est le désintéressement: & voilà, pour ainsi dire, le mot de l'Enigme. Soyez intrépide, soyez bienfaisant, soyez même éclairé; je ferai de ces qualités un très grand cas, mais je suspendrai mon jugement sur la grandeur de votre ame, & je ne vous accorderai un droit décidé à cette éminente vertu, qu'après avoir eu la conviction de votre désintéressement. Le moindre soupçon d'intérêt personel ternit l'Héroïsme, avilit la bienfaisance, deshonore les lumieres. Dès que je vois qu'un homme que je croyois animé de la plus généreuse ardeur pour la défense de la Patrie, plein de l'affection la plus sincere pour ceux qu'il comble de bienfaits, parfaitement instruit du prix réel de tous les objets; dès que je vois, dis-je, que cet homme rapporte tout secretement à lui-même, qu'il travaille sourdement pour son propre avantage: du faîte de l'élévation où je l'avois placé, il rentre à mes yeux dans la poussiere, dans la fange; je l'avois

crû une Divinité, c'eſt une vile Idole que je briſe, tranſporté de dépit, pour la fouler aux pieds.

Concluons donc: la grande ame a pour attributs l'intrépidité, la bienfaiſance, les lumieres; mais elle a pour baſe le déſintéreſſement. Otez la baſe; tout le reſte croule. Un homme avec les qualités que nous venons d'indiquer, croîtra en raiſon de ſon déſintéreſſement; décroîtra en raiſon de ſon égoïſme.

J'aurois encore un mot à dire; mais ſerai-je entendu? Il me ſemble pourtant que je m'entens bien moi-même, & il y a longtems qu'occupé de l'idée que je me contenterai de faire entrevoir, je travaille à la réaliſer pour mon propre uſage, par rapport à ma façon de penſer & d'agir. Un homme qui voudroit pouſſer la grandeur d'ame auſſi loin qu'elle peut aller, devroit ne ſe conſidérer jamais en lui-même, & iſolé, mais toujours comme faiſant partie de cet Univers, & dans ſes rélations avec ce grand Tout. Il devroit dire; Je vaux tant, parce que je ſuis à une telle place, doué de telles qualités, contribuant par tels & tels endroits à l'avantage de la Société, propre à lui rendre encore à l'avenir tel ou tel ſervice, & ſurtout rempli des intentions les plus droites & les plus pures. Vous voyez que je ménage à l'amour propre tous les droits auxquels il peut raiſonnablement prétendre; car c'eſt une très mauvaiſe maniere de porter les hommes à remplir leurs devoirs, que de leur parler d'un déſintéreſſement abſolu, & de prétendre qu'ils doivent ſe compter pour rien. Non, chacun vaut ſon prix; pourvû qu'il vaille quelque choſe, c'eſt à dire, pourvu qu'il ait l'ame bonne, & l'envie de bien faire. Mais, ſi chacun ne s'eſtimoit que ſon prix, il en réſulteroit le déſintéreſſement que nous cherchons, celui qui fait les grandes ames. Toutes les baſſeſſes, toutes les injuſtices, viennent de prétentions exagérées; & ces prétentions viennent de ce que nous croyons valoir plus que nous ne valons. Or voici le tarif; nous valons ce que la Société retire de nous, ou du moins ce qu'elle en pourroit retirer, ſi elle nous fourniſſoit les moyens de déveloper nos talens, & de ſuivre nos bonnes intentions. Partez de

là,

là, & vous ne ferez jamais rien qui ne ſoit digne d'une grande ame. Etes-vous compris dans quelque accident qui détruit la fortune de pluſieurs particuliers? On ne vous verra pas lâchement attaché aux débris de la vôtre, l'arroſer de vos larmes, tandis qu'à peine vous remarquez les pertes beaucoup plus conſidérables que d'autres ont faites, & ſurtout celles que la Société fait par là. Une cataſtrophe publique, par exemple, qui vous ruine, ruine en même tems un Riche bienfaiſant, qui faiſoit ſubſiſter quantité de familles par ſes libéralités. La Société ſouffre vint fois plus de cette perte que de celle qui vous eſt propre: ſentez-la donc auſſi vint fois plus vivement. Un de vos enfans que vous chériſſiez beaucoup, meurt; & en même tems un Magiſtrat, un Général, un Eccléſiaſtique, qui avoient la plus grande influence ſur le bonheur de la Société. Pleurez ces hommes utiles, & ne pleurez point votre enfant, ou ne le pleurez qu'autant qu'il valoit par rapport à des objets ſi ſupérieurs. Enfin, pour aller au vif, dans le cas de colliſion entre vous-même, & des perſonnes dont vous ne pouvez méconnoitre la prééminence réelle, ne balancez point à montrer un déſintéreſſement fondé ſur l'intérêt que vous prenez au bien du Tout. Ce n'étoit point une action outrée que celle des Lacédémoniens aux Thermopyles, & de ces familles Romaines qui ſe ſont immortaliſées en ſe dévouant pour leur Patrie; c'eſt un des traits les plus touchans de l'Hiſtoire de France que la générosité de ces Citoyens de Calais, prêts à livrer leurs têtes aux fureurs d'un Monarque Anglois, qui ne vouloit épargner leur Ville qu'à ce prix. On a vû ſouvent dans les combats de généreux Soldats, de fideles Officiers, parer de leurs propres corps celui du Prince qu'ils ſervoient, & tomber à ſes pieds, frappés du coup mortel dont ils l'avoient préſervé. Les plus grandes choſes ſe feroient communément & avec la plus grande facilité, ſi chacun s'eſtimant préciſément ce qu'il vaut, ſe conſervoit ou s'expoſoit d'après la connoiſſance qu'il auroit des raiſons de faire l'une ou l'autre de ces choſes. Mais les hommes ordinaires mettroient le feu à l'Univers entier, & le réduiroient en un monceau de cendres, s'ils

n'avoient point d'autre moyen de conserver leur inutile & méprisable individu.

Rien de plus précieux à l'Etat, Messieurs, que son Chef; mais un Chef tel que celui sous qui nous avons le bonheur de vivre depuis dix-huit ans révolus, un Roi, tel que FREDERIC, mis, si je puis ainsi parler dans un des bassins de la balance, & tous ses sujets dans l'autre, ne fait-il pas au moins équilibre, ne vaut-il pas autant que tout l'Etat, ne mérite t-il pas que tout l'Etat soit disposé, s'il le falloit, à s'immoler, à se sacrifier pour lui? Quelle en est la grande raison? C'est qu'il s'expose, c'est qu'il s'immole journellement pour nous, pour notre défense, pour notre repos, pour notre liberté. Ayant porté sur le Thrône les plus grandes lumieres qu'aucun Prince ait jamais possédées, occupé pendant les années de la Paix à signaler sa bienfaisance, soutenant aujourdhui la plus terrible guerre dont l'Histoire ait fourni d'exemple, avec une intrépidité qui opére de continuels prodiges, tout annonce en lui le Héros, Père & Vengeur de ses peuples. Mais ne nous bornons pas à ce titre devenu trop commun: voyons, reconnoissons, admirons en lui la grande ame; & jugeons de cette grandeur par le désintéressement avec lequel il semble ne compter son repos & sa vie pour rien, dès que nous ne pouvons être en sûreté qu'à l'ombre de son Egide: surtout par celui avec lequel on l'a vu & on le verra encore, ah! puisse être bientôt! ne chercher d'autre fruit de ses victoires, que le retour & l'affermissement d'une Paix heureuse & inaltérable.



ELOGE

ELOGE
DE
M. LE GÉNÉRAL DE BRÉDOW.
PAR M. LE COMTE DE REDERN.

L'Eloge de M. le Général de *Brédow* étoit dû plutôt à l'Académie: on a crû devoir attendre; le Roi avoit fait lui-même l'Eloge de la plupart des Généraux, qui étoient de l'Académie. Celui qui les avoit formés, sous les yeux duquel ils avoient agi & combattu, les connoissoit mieux, & étoit plus en état de leur rendre justice que personne.

On croit devoir le donner aujourdhui, quand le Roi occupé des choses les plus grandes, & les plus importantes, n'a pas le loisir d'y penser.

Asmus Ehrentreich de Bredow, Lieutenant-Général, Colonel d'un Régiment d'Infanterie, Chavalier de l'Ordre de l'Aigle Noir, Gouverneur de Colberg, Drost de Hamm, & de Schlusselbourg, Chanoine du Chapitre de Brandebourg, & Seigneur de Worien & d'autres lieux; naquit l'année 1693 d'*Asmus Ehrentreich de Bredow*, Conseilleur Provincial du Cercle du Haveland où sa mémoire est encore chère, & de *Catherine Marie de Briest*, fille de Mr. *de Briest*, avec lequel le Grand Electeur concerta cette belle Campagne, de surprendre les Suédois à Rathenau, & de les chasser ensuite de toute la Marche Electorale. Je ne m'étends pas sur l'ancienneté de sa famille

(*) Lû dans l'Assemblée publique du 5 Juin 1760. C'est à la date de la mort de M. *de Bredow* qu'on a eu égard, en plaçant ici cet Eloge.

mille: elle ne fait pas l'éloge d'un homme après sa mort; c'est un aiguillon pour l'exciter à la Vertu pendant sa vie. Le mérite, les talents, & les vertus de ses Ancêtres, forment un Tribunal sévere, qui lui demande continuellement compte de ses actions, & exige de lui de les surpasser. Nous savons, que notre ancienne Noblesse a été transplantée & établie en partie dans notre Païs; sous les Empereurs *Charle-Magne*, *Henri* l'Oiseleur, *Otton* le Grand, & l'Electeur *Albert* l'Ours; ou Originaire dans le Païs même, qu'elle descend des restes des Francs, Longobardes, Bourguignons, Sueves, Semnones, Redarns, & d'autres Peuples, entre l'Elbe, l'Oder, & la Vistule, qui poussés & suivis par les Vandales, Venedes, Goths, & Sarmates, se portoient comme les flots de la Mer, du Nord au Sud, vers l'Empire Romain, se répandirent dans toute l'Allemagne, firent oublier le nom de plusieurs Peuples qui habitoient ses différentes Provinces, & passerent ensuite le Rhin au cinquieme Siecle pour se répandre dans les Gaules, en Italie, en Espagne, & en Afrique.

Les différentes branches de la même famille, établies dans les différentes parties de l'Allemagne, en sont la preuve, & prouvent en même tems l'ancienneté de leur origine.

Mr. *de Brédow* avoit des exemples de vertus & de talents, des personnes qui avoient mérité de la Patrie dans toutes les différentes places de l'Etat, dans sa famille: il les suivit.

Il fit ses premieres études au College noble de Brandebourg, & les acheva ensuite à l'Université de Halle. Après avoir fini ses humanités par une étude approfondie des langues latine & grecque, & par la lecture des meilleurs Auteurs de l'Antiquité, il s'attacha principalement à l'étude des Sciences qui font l'objet de l'Homme d'Etat; de la Politique, de la Morale, du Droit Public, & Civil, de l'Histoire ancienne & moderne, & principalement de celle de l'Empire, & de sa Patrie. Son but étoit de lui être utile. Il s'apperçut de bonne heure, qu'avec une bonne éducation on peut l'être de plus d'une maniere; que le devoir d'un homme, que sa naissance a placé dans un

un ordre ſupérieur de la ſociété, eſt de ſurpaſſer les autres en connoiſſances & en lumieres pour remplir ſa deſtination; & que le ſiecle dans lequel il vivoit, lui impoſoit une grande tâche. L'eſprit & le caractere des hommes qui ſe vouent au ſervice de leur Patrie, tient à leur ſiecle; & leur vie fait une partie de l'hiſtoire de leur tems, dont il faut emprunter même les principaux traits, pour déveloper leur caractere, & nous le mettre dans tout ſon jour.

L'Europe libre, ignorante, barbare, & toute militaire, ne connoiſſant que le Noble & le Serf, l'un pour commander, & l'autre pour ſervir, avoit changé de face. L'indépendance de Villes riches, & commerçantes, avoit élevé le moyen état; les Sciences, les Arts, une ſaine Philoſophie, s'étoient établis partout; la ſuperſtition & la barbarie de l'Ecole avoient diſparu: & la découverte des autres Parties de notre Globe avoit changé, en l'éclairant & l'enrichiſſant des tréſors de tous les climats, ſa Politique & ſes moeurs.

On avoit non ſeulement compris, que la deſtination de l'homme n'étoit pas de s'entr'égorger, & que le but de la ſociété n'étoit pas l'eſclavage ou l'oppreſſion du grand nombre; mais les peuples, qui auparavant ne ſe connurent presque pas, ou n'eurent peu ou point de communication, avoient formé, principalement depuis la Paix de Weſtphalie, un corps de toute l'Europe, dans lequel on tâcha d'entretenir une harmonie, de ſerrer un lien général, pour prévenir les ſuites funeſtes de l'ambition, de l'injuſtice, & de la violence.

Aux irruptions, brigandages, & transmigrations des Nations entieres, & à la fureur des Croiſades, avoit ſuccédé l'orgueil des Princes, enflés de leurs forces, & des richeſſes que les deux Indes avoient répandues en Europe.

Ils s'en ſervirent, après avoir déſarmé les peuples, armés auparavant pour le maintien de leur liberté, ou contre l'ennemi de dehors, pour l'entretien d'un Soldat perpétuel, dont ils firent l'inſtrument de leurs paſſions. Ils ne virent dans la ſoumiſſion de leurs ſujets que celle de leurs voiſins & de l'Europe entiere.

Char-

Charles-quint & Philippe second, qui se vantoient que le Soleil ne se couchoit pas dans leurs vastes Etats, Ferdinand I. & Louis XIV. ne renoncerent à ces chimeres funestes, qu'après avoir désolé l'Europe, & épuisé leurs trésors & leurs peuples.

Leur ambition n'eut d'autre effet que celui d'avoir armé contr'eux toutes les autres Puissances, & introduit la fureur de faire la guerre avec des Armées innombrables & disproportionnées, qui accabloient, & épuisoient déjà pendant la paix les peuples, incapables de les entretenir, & de les recruter.

La supériorité que donne la force, a de tout tems frappé les hommes; preuve peut-être la plus forte de leur méchanceté. Les Législateurs & les Peuples ont tenté souvent de l'établir pour principe, pour premier ressort du Gouvernement. Toutes les différentes formes en ont paru susceptibles; & Sparte, & Rome, qui ont paru avec un éclat, & une supériorité soutenue, pendant plusieurs Siecles, ont fait illusion aux Modernes. Mais Lycurgue allia à la force la sagesse, & toutes les vertus; il prévint l'abus de la force: tout Lacédémonien étoit soldat, mais il rassembloit toutes les vertus en même tems. Sparte fut l'Idole, & l'Arbitre de la Grece, tant qu'elle fut juste, & vertueuse; elle régna moins par la force, que par ses vertus: elle tomba lorsquelle devint ambitieuse et injuste.

Rome fut de même; elle soumit le monde alors connu, parce qu'elle avoit plus de sagesse, & de vertus, que le reste des hommes. Elle ne parut soumettre les peuples, que pour les associer à ses vertus, pour les rendre heureux, & les delivrer de l'oppression, & de la tyrannie. Elle devint la victime de ses vices, & des peuples barbares, quand elle cessa d'être juste & vertueuse.

Je ne parle pas de ces apparitions passageres, ou plutôt de ces convulsions violentes des peuples, lorsque livrés au délire de l'ambition, ils paroissent vouloir détruire tous les autres peuples. C'est comme des accès violens de fievre, qui donnent une force extraordinaire

naire au malade, & le laissent ensuite dans un accablement total, suivi souvent de la mort. Louis XIV. prit pour devise: *Un contre Tous.* L'épuisement de la Frace le détrompa: il fut heureux; l'orgueil & la division de ses ennemis le sauverent d'une Paix honteuse.

On a voulu trouver une grande différence entre la Politique, la conduite des Peuples, & la Morale, la conduite des Particuliers. Il m'a toujours paru qu'il y en a beaucoup moins qu'on ne croit. Ce ne sont que les grands talents, & les grandes vertus, une conduite suivie des grandes vues, & le choix heureux des moyens, dans une analyse juste de l'avenir, qui puissent élever les uns & les autres.

Le Roy *Fréderic Guillaume* trouva l'Europe dans cette situation, qui parut imposer la nécessité à tous les peuples, de se tenir continuellement sous les armes. Il parvint au Thrône dans le tems que *Louis XIV* & *Charles XII* avoient armé toutes les Puissances contre eux. Il avoit fait comme Prince Royal une Campagne dans les Païs-Bas, pour s'instruire avec les *Eugenes*, & les *Marlborougs*; & à son avénement au Throne, il tourna toutes ses vues & dirigea toutes les parties du Gouvernement vers le Militaire, & la gloire des armes.

Il fit revivre la Politique d'un Gouvernement absolument militaire, dont l'Histoire, principalement l'ancienne, fournit quelques exemples frappans, par les efforts dont nous trouvons que de petits Etats ont été capables, & par les Armées nombreuses qu'ils ont pû mettre sur pied. Il bannit le luxe de ses Etats; fit des hommes qu'il employa des Soldats; tira de presque toute l'Europe, les hommes les plus grands, & les plus forts, capables de porter les armes; encouragea l'agriculture, & les Arts utiles; mit un ordre rigoureux dans l'administration de ses Finances; amassa des trésors considérables, & remplit ses Arsenaux de tout l'attirail nécessaire pour la guerre.

Dès la guerre de trente ans, depuis que le Brandebourg avoit pris sous le Grand Electeur, une assiette fixe, les Troupes Prussiennes avoient toujours paru avec l'éclat de la victoire.

Les Suédois enflés de la gloire de leurs *Gustaves*, les Polonois & les Turcs en Hongrie, rendirent témoignage, par leurs défaites, à leur valeur.

Le Roi *Frederic I* secourut l'Europe contre l'ambition de *Louis XIV*; il marcha d'abord lui-même avec la plus grande partie de ses forces, & envoya ensuite des Corps considérables, sous le commandement du Prince de *Dessau*, que l'Auteur immortel de l'Histoire de Brandebourg caracterise par les talens & la valeur de *Marius*; ils eurent la plus grande part aux victoires mémorables de *Hochstedt*, de *Turin*, & aux Campagnes glorieuses des Alliés dans les Païs-Bas.

Le Roi *Frédéric Guillaume*, en parvenant au Thrône, fit regarder l'état militaire, par son exemple, & les prérogatives qu'il y attacha, comme le seul digne d'occuper ses Sujets, & soumit des Troupes déjà aguerries, à la discipline la plus austere, qui, soutenue toujours de même, pendant un regne de trente ans, forma le caractere de toute la Nation. Il eut élévé les Prussiens à toutes les vertus de Sparte, si l'éducation avoit orné son caractere simple & mâle des vertus & des lumieres philosophiques de *Lycurgue*. Mais, malgré ce goût, ou plutôt cet entousiasme pour le Militaire, il ne fit la guerre que forcé par *Charles XII*. & dans la guerre dont la Pologne pensa embraser toute l'Europe, il se contenta d'envoyer un Corps de dix mille hommes sous le Maréchal *de Redern*, au secours de l'Empire, & accorda un azyle au Roi *Stanislas*, élû deux fois Roi de Pologne, mais dont la destinée n'étoit pas de remplir ce Thrône. Il laissa comme *Philippe* à *Alexandre* l'exécution de grands desseins, & une armée merveilleusement disciplinée, qui a fait revivre l'héroïsme des Grecs & des Romains, & étonné l'Europe par des prodiges de valeur, & des succès soutenus, dans deux guerres sanglantes, que la Prusse a eu avec la Maison d'Autriche, & dans la cruelle guerre, qu'elle soutient à regret aujourdhui contre les plus grandes Puissances de l'Europe.

L'art de la guerre, malheureusement pour l'espece humaine, a été cultivé avec soin dans toute l'Europe, & porté au plus haut dégré de

de perfection. Vous êtes aussi ſavans, Peuples de l'Europe, dans toutes les parties de la Science Militaire; mais, ſans les avantages d'un poſte inattaquable, d'une Artillerie nombreuſe, & de la ſupériorité du nombre, le jour de bataille, une rare valeur, l'ordre, la diſcipline, la promptitude, & la célérité des évolutions, vous fait regarder le Soldat Pruſſien, comme l'ennemi le plus redoutable, & presque invincible.

M. *de Brédow*, preparé à tous les emplois, avoit fini ſes études dans le tems que le Roi *Fréderic Guillaume* étoit parvenu au Thrône: il entra dans le ſervice militaire; ſon caractere ſimple, & auſtere, l'y porta peut-être naturellement: & une taille haute, & avantageuſe, ne lui laiſſa pas d'autre deſtination. C'étoit l'état de tous les Pruſſiens; mais le motif, le ſeul qui pût le déterminer, c'étoit la guerre qui parut inévitable avec la Suede, qui lui offrit l'occaſion de ſatisfaire ſon envie de rendre ſervice à ſa Patrie.

Il fut placée l'année 1714 comme Enſeigne dans le Régiment du Comte *de Wartensleben*; & l'année ſuivante au Printems, il marcha à *Stettin* où le Roi aſſembla une Armée d'environ trente mille hommes. L'infléxibilité, ou plutôt la haine implacable de *Charles XII.* n'avoit pas ſeulement fait échouer la Médiation de la France, & toutes les Négociations qu'on avoit tentées pour entretenir la Paix dans le Nord de l'Allemagne; mais, pouſſé à bout par les démarches les plus violentes, la modération du Roi qui, plein d'égards pour ſes malheurs, & ſes grandes qualités, avoit fait tout au monde pour conſerver la Poméranie à la Suede.

Stralſund ayant la communication ouverte par mer avec la Suede, entouré d'un retranchement couvert d'un marais, défendu par une garniſon conſidérable, animé par la préſence de *Charles XII.* & ſoutenu par un autre Corps de Troupes, qui occupoit l'Isle de *Rugen*, parut imprenable; & M. *de Croiſſi*, l'Ambaſſadeur de France, en ſortant entierement du caractere de Médiateur, le repréſenta tel par une lettre datée de *Stralſund* du 22 May 1715, qu'il écrivit au Roi pour le détourner d'en faire le Siege, qu'il qualifia d'entrepriſe inſoutenable.

 La

La valeur des Troupes Pruffiennes la foutint; elles prirent, fous la conduite de M. *de Köppen*, l'Aide de Camp Général du Roi, le retranchement en traverfant le marais, & un bras de mer dont il étoit environné; defcendirent dans l'Isle de *Rugen*, fous le commandement du Prince de *Deffau*, battirent *Charles XII* qui les attaqua le lendemain de la defcente, forcerent tout le Corps de Troupes qui occupoit l'Isle de fe rendre prifonnier de guerre, & emporterent peu après les ouvrages extérieurs de *Stralfund*, que *Charles XII* avoit défendus & repris à la tête de la Garnifon, habillé en fimple Soldat.

Toute fa valeur ne put alors fauver la Place; quand tout étoit prêt pour l'affaut général, il ne lui refta d'autre parti à prendre que de hazarder fur un petit efquif le paffage en Suede, à travers la flotte Danoife, & par une Mer dangereufe, pour éviter de fe rendre avec la Place, ou de facrifier inutilement fa vie & celle de la Garnifon. Le lendemain de fon départ, *Stralfund* fe rendit après un fiege de cinq mois & demi, foutenu par la faifon la plus rude jusqu'à la fin de Decembre.

M. *de Brédow* s'acquitta de fes devoirs avec tant de diftinction, que le Roi l'ôta vers la fin du Siege de fon Régiment, & le plaça dans fes Gardes, compofées des hommes les plus grands de fon Païs & de toutes les Nations de l'Europe.

Il devint Lieutenant en 1716, & Capitaine en 1723. L'année 1733, le Roi le fit Major, & l'envoya aux Cours de *Bareuth*, d'*Anfpach*, de *Würtenberg*, de *Bamberg*, & de *Würtzbourg*.

M. *de Brédow*, malgré l'application affidue au fervice, fous les yeux d'un Maitre tel que le Roi, avoit confervé fon goût pour les Sciences, qu'il cultiva, fans le faire paroitre, par la lecture des meilleurs livres.

Le Roi avoit un éloignement pour les Lettres en général, & une vraye averfion pour les Sciences, qu'il regarda comme inutiles, & qu'il qualifia de vifions, & de pédanterie; mais M. *de Brédow* lui arracha l'aveu,

l'aveu, que les connoissances & l'étude n'étoient pas incompatibles avec l'Etat militaire. Il sçut non seulement estimer en lui la capacité qui le rendit propre aux affaires; mais, l'ayant admis à sa société particuliere, il étoit impossible que M. *de Brédow* ne donnât au Roi souvent cette satisfaction, qu'on trouve nécessairement dans la conversation d'un esprit éclairé, juste, & sensé. Le Roi témoigna à M. *de Brédow* beaucoup de satisfaction à son retour, de la façon dont il s'étoit acquitté de ses ordres; il lui confia peu après LL. AA. RR. Messeigneurs les Princes *de Prusse* & *Henri*, pendant une absence que fit M. *de Rittberg* leur Gouverneur; & s'étant convaincu qu'il joignoit à une connoissan- approfondie des Loix & des Coûtumes du Païs, une grande intégrité, & beaucoup de désintéressement, il le chargeoit souvent de Commissions particulieres, quand il croyoit que les voyes ordinaires de la Justice examinoient ou décidoient les affaires avec trop de lenteur. La Drostei de Ham, que M. *de Brédow* eut l'année 1738, fut une nouvelle marque de la bonté, & de l'affection, que le Roi avoit pour lui, & qu'il lui conserva jusqu'à sa mort. Il lui en donna pendant la maladie qui la précédoit, les preuves les plus fortes; il étoit de ceux que le Roi voyoit tous les jours, & il lui répétoit plusieurs fois, que sa mort prévenoit les récompenses qu'il avoit destinées à son attachement & à ses services; que c'étoit un peu sa faute parcequ'il n'avoit jamais sçu demander, mais qu'il n'y perdroit rien, qu'il en laissoit le soin à son successeur. Mr. *de Brédow* ne tarda pas de voir l'accomplissement de ces assurances flatteuses. Le Roi d'à présent lui continua les mêmes bontés que le feu Roi avoit eues pour lui, & qu'il lui avoit déjà témoignées, étant Prince Royal. Il le fit d'abord Colonel de ses Gardes, qu'il forma de celles du Feu Roi, & de son Régiment, avec une pension d'onze cens écus.

La guerre pour la succession de l'Empereur *Charles VI* s'étant allumée peu après dans toute l'Europe, le Roi entra en Silésie en 17[illegible] sur laquelle il reclama ses droits; & M. *de Brédow* y marcha à la tête du second & troisieme Bataillon des Gardes; mais il ne put joindre l'armée qu'après la bataille de *Mollwitz*; il fut du Siege de *Brieg*: & quand le Roi entra l'hyver suivant en Moravie, il eut le Commandement d'*Ol-*

mâts, & fut chargé de la levée des contributions. Son humanité, sa douceur, & son désintéressement, lui mériterent l'approbation du Roi, & lui gagnerent l'estime & la considération de l'Ennemi.

Il fit ensuite la Campagne sous le Roi en Boheme, fut de la bataille de *Czaslau;* & à la Paix qui la suivit, il ramena les deux bataillons des Gardes à *Potzdam*.

Le Baillage de *Schlusselbourg*, le Régiment de *Persode*, & le grade de Général Major, furent des preuves que le Roi lui donna de la satisfaction qu'il avoit de ses services. Quand la guerre pour le soutien de l'Empereur *Charles VII* se ralluma, M. *de Brédow* entra avec un Corps, de Silésie en Bóheme, & joignit l'Armée du Roi devant *Prague*.

L'Hyver qui suivit la Campagne, il eut le Commandement à *Jägerndorff;* il rejoignit le Roi quand il marcha contre les Autrichiens, qui par *Landshut* pénétrerent en Silésie, fut de la Bataille de *Friedberg*, & suivit le Roi, quand, après cette glorieuse Victoire, il rentra en Boheme.

Peu avant la bataille de *Sohr*, le Roi le détacha, pour renforcer l'Armée, qui, sous le Commandement du Prince de *Dessau*, s'opposa aux desseins de la Saxe; il fut blessé à la bataille de *Kesselsdorff*, par une bale dans le bas ventre, qui le perça de part en part; il resta à cheval jusqu'à la fin de la Bataille, & continua de commander: comme *Epaminondas*, qui garda le fer de la lance dont il étoit blessé, jusqu'à ce qu'il vit la victoire assurée. Le Roi le visita lui-même, lui témoigna sa satisfaction dans les termes les plus flatteurs, sur cette valeur ferme & tranquille, & en fit mention de même dans la Lettre par laquelle il informa feu la Reine du gain de cette bataille.

Après la Paix qui suivit cette Campagne glorieuse, signalée par trois Victoires décisives, le Roi lui donna le Régiment vacant par la mort du Général *Marwitz*, en garnison à *Halberstadt*, & le chargea de l'arrangement des différents qui subsistoient encore avec l'Abbaye de *Quedlimbourg*, & d'autres affaires rélatives à cette Province.

Mais l'emploi que le Roi fit de M. *de Brédow* ne l'éloigna de sa Personne, qu'autant que le service l'exigeoit; cet éloignement même

ne

ne fut qu'une nouvelle occasion, pour lui prouver la bonté personelle qu'il avoit pour lui. Il le fit revenir ordinairement l'hyver à *Potzdam*, pour être de la société qu'il regarda comme la sienne; & l'année 1747, il le fit Lieutenant-Général, & lui donna l'Ordre de l'Aigle Noir, avec le Gouvernement de *Colberg*.

L'Académie perdit l'année 1752, dans M. le Général *Still*, un Membre qu'elle regretta beaucoup, & qu'elle ne crut pouvoir remplacer mieux que par M. *de Brédow*. Il y fut aussi sensible qu'un esprit éclairé, & porté au bien comme le sien, devoit l'être.

L'année 1755, il commanda le Camp qui fut formé auprès de *Magdebourg*. Il mourut au commencement de l'année suivante dans un âge, qui, avec une santé robuste comme la sienne, promettoit la plus longue vie.

Une trop grande abondance de sang, & peut-être trop d'application, le rendoient sujet depuis quelques années aux vertiges, & aux étourdissemens, qui parurent même influer sur son caractère, & prendre sur la facilité qu'il avoit pour l'étude, pour le travail, & les affaires.

Le Roi plein d'attention & de soins pour ceux qu'il honoroit de son amitié, l'avoit pressé lui-même souvent de se faire saigner, & lui avoit envoyé des Médecins pour consulter sur les moyens d'en prévenir les suites; mais, soit que certains accidens de la machine humaine soyent sans remede, ou que M. *de Brédow*, trop peu attaché à la vie, n'ait pas eu l'attention nécessaire, se trouvant seul à *Halberstadt*, devant une cheminée, le matin après la parade, un livre à la main, il lui prit un étourdissement qui le fit tomber dans le feu; &, avant qu'on pût venir à son secours, il eut la tête, le cou, & tout le côté gauche, extrèmement maltraités. Il supporta pendant six semaines des douleurs cruelles, avec cette égalité d'ame, & cet héroïsme, qui formoient son caractere, & parut même se rétablir; mais une attaque d'appoplexie qui survint, finit sa vie le 23 Fevrier 1756.

Le Roi témoigna les regrets, qui répondoient aux bontés qu'il avoit eu pour lui pendant sa vie; je dois nous les rappeller tels, que son pinceau sublime les peint lui-même dans l'Ouvrage immortel rendu public aujourdhui, & en orner la Tombe de M. *de Brédow*.

La Mort fond sur BREDOW par des coups imprévus.
O Mort cruelle! arrête, épargne ses vertus.

M.

M. *de Brédow* mourut sans avoir été marié; sa famille, son Régiment, & la Province de *Halberstadt*, le regetterent, comme des enfans qui perdent leur pere; ses vertus, sa douceur, son désintéressement, ne pouvoient que lui concilier l'estime & l'affection de ceux qui avoient à faire à lui. Le fond de son caractere étoit la probité, un grand amour de l'ordre, l'équité, & le désintéressement. Des moeurs très unies & très simples, éloignées de tout ce qui s'appelle faste & ostentation, qui tenoient à son caractere, & que l'habitude & l'exemple du feu Roi n'avoient fait que fortifier, ne l'empêcherent pas de vivre avec la dignité & la bienséance convenable à son état; & malgré des revenus assez considérables, il ne laissa à sa mort que le patrimoine qu'il tenoit de sa famille; il ne ménagoit rien, ni pour le service du Roi, (son Régiment étoit un des plus beaux de l'Armée,) ni quand il s'agissoit de faire du bien.

La Cour à laquelle M. *de Brédow* avoit passé sa vie, le commerce des Grands, & des Courtisans, avoit fortifié en lui une réserve, & une retenue anturelle; peut-être l'avoient-ils outré un peu. Franc, ouvert, & porté à la gayeté avec ses Amis, il parut se tenir par une grande politesse à une certaine distance des hommes, de la méchanceté desquels il n'avoit peut-être fait que trop d'expérience; & au lieu de déclarer librement son sentiment, d'approuver & de désapprouver selon ses lumieres, il se renferma souvent dans le silence, & parut préférer de s'en tenir au sentiment des autres plutôt que d'examiner & de chercher celui qui devoit être le sien. Il parut souvent que les moeurs du Siecle, une certaine hardiesse à décider sur tout, lui en imposerent; il parut gêné, & embarassé; on remarqua l'effort qu'il faisoit, pour cacher qu'il en étoit blessé. Avec un fond de droiture, incapable d'applaudir à ce qui étoit contraire à ses principes; il opposa la douceur & le silence au vain étalage des manieres & des façons hardies, à l'impertinence d'un babil hazardé, & à la témérité des propos futiles. Incapable de tout ce qui s'appelle intrigue, & fortement occupé des devoirs de son emploi, il parut souvent étranger à la Cour, où il passa sa vie, par l'ignorance absolue de ce courant de précieuses bagatelles, d'inepties, qui font l'occupation sérieuse de l'oisiveté & du désoeuvrement du Courtisan ordinaire, qui, doué de ces beaux talens, fut tenté

té quelquefois de le regarder comme un esprit borné, & de le taxer d'une austérité déplacée. La droiture, les moeurs simples telles qu'elles sont, fondées sur les vertus, n'ont de prix que pour l'homme doué de ces mêmes vertus; il paroit même aux yeux d'un esprit leger & superficiel, qu'un trop grand attachement à certains principes, rétrécit l'ame, & renferme l'esprit dans des bornes étroites.

Le méchant paroit d'abord avec un air d'esprit; les petites passions qui l'agitent continuellement, donnent à l'esprit un dehors d'étendue, & une certaine activité; jugeant avec cela les hommes, dont le grand nombre, s'il n'est pas méchant, n'a que peu ou peu point de vertus, par lui-même, il paroit connoitre, & juger juste. Voyez-le de près; c'est une ame bornée, un aveugle, qui se trompe le plus grossierement sur les choses les plus claires, & ferme les yeux à la lumiere que la vérité & la vertu répandent dans le coeur de l'homme droit & vertueux. A' quel point un *Néron*, un *Caligula*, ne doivent-ils pas avoir été stupides, & imbécilles? La méchanceté ne peut jamais être qu'une folie, un égarement, un aveuglement, un trouble de l'esprit. Malgré la contrainte que M. *de Brédow* sçut imposer quelquefois à son caractere, il eut en aversion le dangereux talent d'adopter le sentiment des autres, de le faire paroitre comme le sien, & d'applaudir pour plaire. Si la plainte des Courtisans a quelque fondement, que les Princes veulent être flattés; on peut dire avec plus de raison, que ce sont eux qui rendent les Princes inaccessibles à la vérité.

Les Hommes mettent leur caractere & leurs vices dans leur état; le Courtisan, faux & perfide, eut été tel dans toute autre condition de la vie.

J'ai eu le bonheur de servir une grande Princesse, à laquelle on parloit avec plus de vérité, de franchise, & de liberté, qu'on ne parle aux hommes qui ne doivent exiger aucun ménagement. Peut-être ai-je tort de la citer; l'élévation de son ame, & ses vertus, ne concluroient peut-être rien pour le reste des Princes & des hommes.

Flatter les Grands, leur prêter des bonnes qualités qu'ils n'ont pas, pour qu'ils les ayent, des talents, une ame, un génie capable de faire de grandes choses, pour les faire sortir de leur léthargie ordinaire, pour

les porter à ſe prêter au bien qu'ils rejetteroient au lieu de le protéger; c'eſt peut-être le ſeul moyen pour les y conduire. Applaudir à leurs folies, à leurs méchancetés; colorer leurs travers, leurs mauvaiſes actions; c'eſt ce qu'on peut faire de plus déteſtable: c'eſt la manoeuvre perfide du Courtiſan ordinaire. „Nommer un Roi Pere du peuple, „dit un Ecrivain célébre, eſt moins faire ſon Eloge, que l'appeller par „ſon nom, ou lui dire ce qu'il doit être."

L'eſclavage, la crainte, & l'intérêt, aſſerviſſent l'eſprit, le rendent faux, & incapable de penſer; l'envie de plaire s'occupe plus de deviner le ſentiment des autres, que de chercher la vérité: elle peut avoir lieu dans les choſes indifférentes, elle doit ceſſer auſſitôt qu'il s'agit de décider entre le bien & le mal.

M. *de Brédow* jouiſſoit du précieux avantage de ſervir des Maitres, auxquels on ne plaiſoit que par la vérité & par l'exactitude à ſatisfaire à ſes devoirs; & il a eu le bonheur d'emporter à ſa mort une réputation pure & entiere, qui avoit fait celui de ſa vie.

Vous trouvâtes de la conſolation, *Tacite*, contre la perte d'*Agricola*, le meilleur des Peres, & le plus grand homme de ſon Siecle, en vous retraçant ſes vertus, & les tranſmettant à la Poſtérité; j'aurois le bonheur de jouir de la douceur de cette conſolation, lorsqu'en perdant un Oncle reſpectable par ſes vertus, je puis mêler mes regrets avec ceux de l'Académie, ſi, avec la vérité, & la force de votre éloquence, j'euſſe pu faire l'éloge de M. *de Brédow*, digne d'entrer dans les Mémoires de l'Académie, digne de ſes vertus, de vos regrets & des miens.





TABLE.

CLASSE de Philosophie Expérimentale.

CLASSE de Mathématique.

CLASSE de Philosophie Spéculative.

De

CLASSE
de Belles-Lettres.



Fig. 2.

.3

Fig. 4.

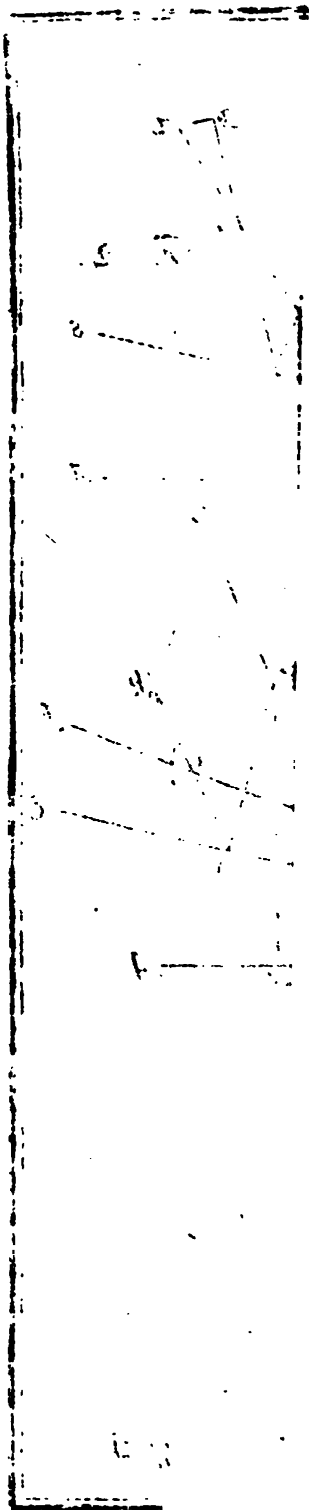


Fig. 1.

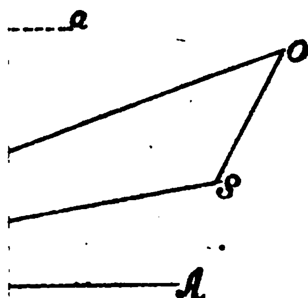
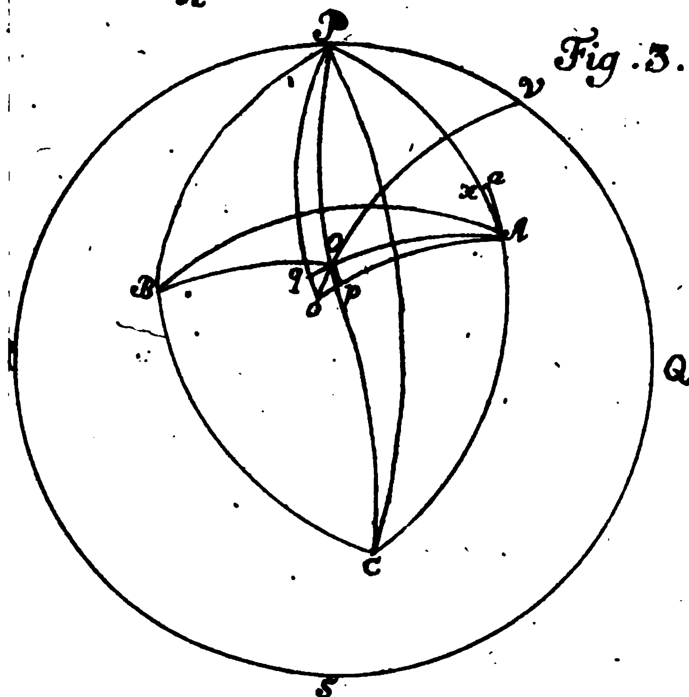


Fig. 3.

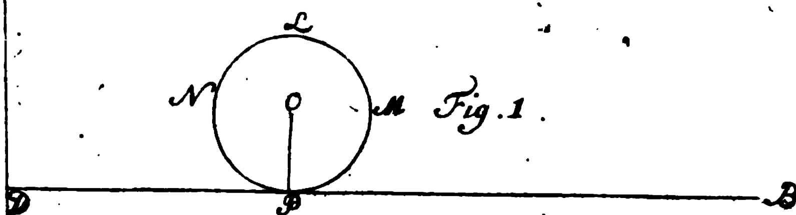


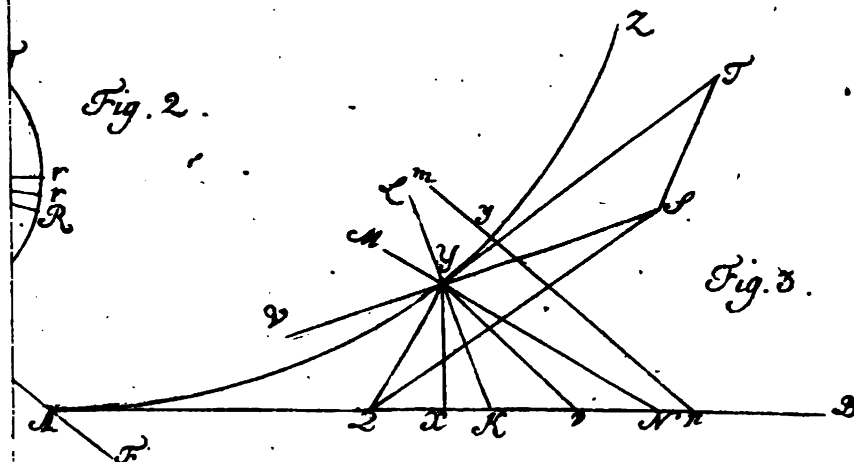
XIV.

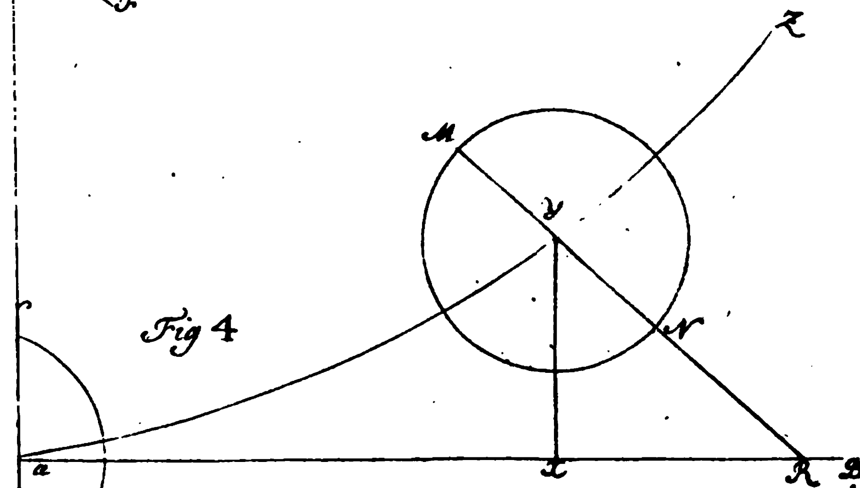
Tab. II.
Cl. Mathem.

Fig. 2.

Tab. III : L. Math

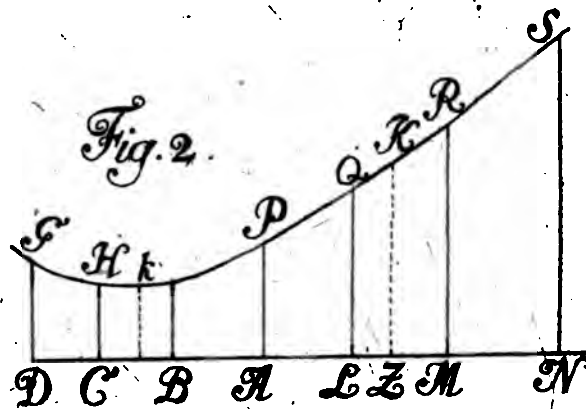


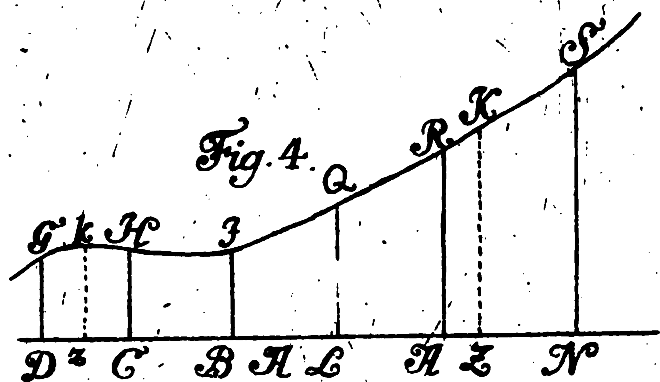


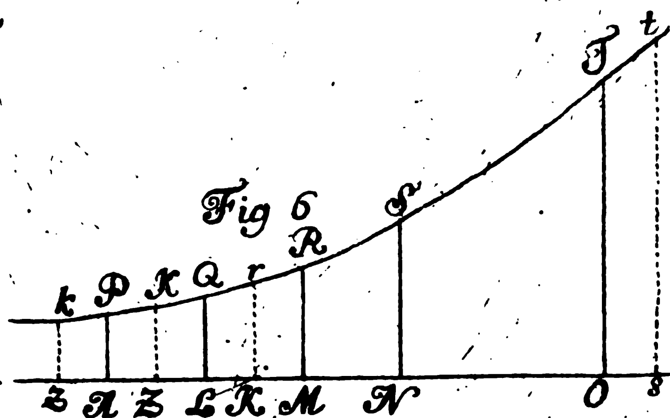


Tom. XIV

Tab. IV.
A. Mat.


Fig. 2
G
H
k
P
Q
K
R
S
D
C
B
A
L
Z
M
N


Fig. 4.
G
k
H
3
Q
R
K
S
D
z
C
B
A
L
A
Z
N


Fig 6
k
P
K
Q
r
R
S
T
t
z
A
Z
L
K
M
N
O
8

Tab. V.

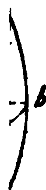
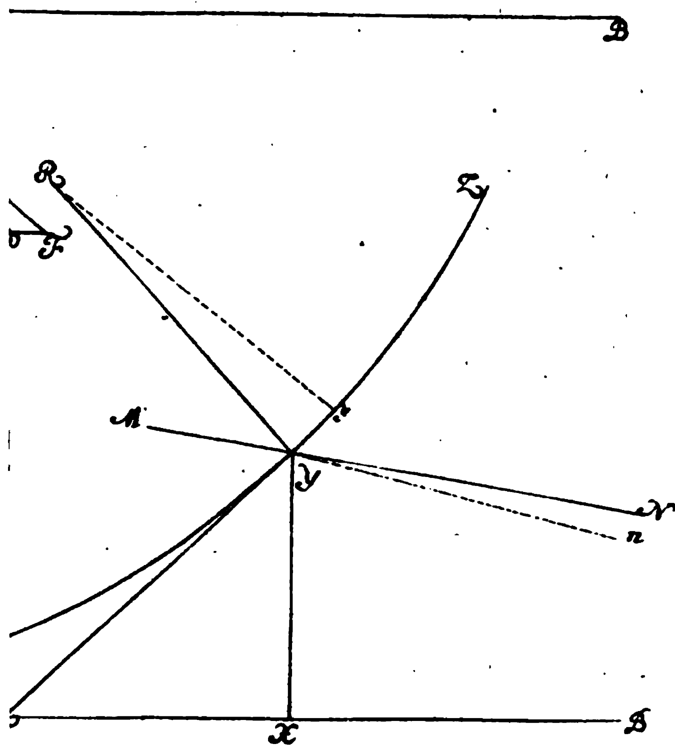


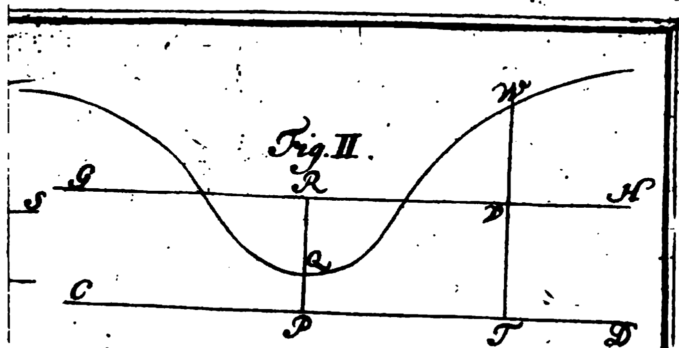
Fig. 5.

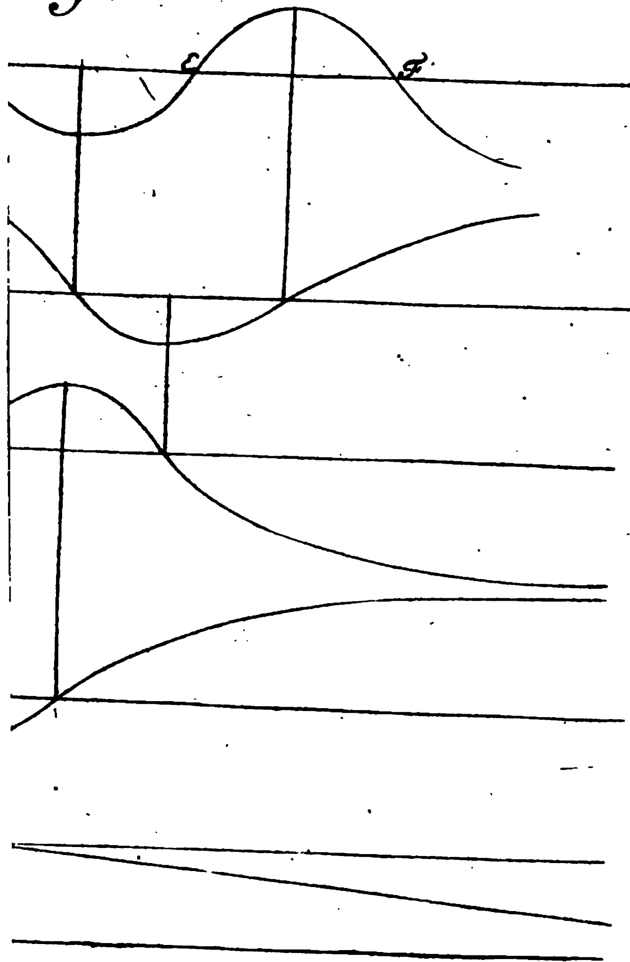
B



Acad. Tom. XIV.

Tab. VI.
Cl. Mat.


Fig. II.
W
G
R
H
S
V
Q
C
P
T
D


Fig. III.
E
F

Interpreten, aller Potentaten in gantz Europa, all ihren
hrifft tranlations Clavis in Buchstaben,
enden des mühe Vergeben und umsonst.
dexteritat, ihr aller begriff übersteige.

0. 0Λ79Δ6Θ7105+71. Θ3T. ∇Θ23Θ45ΘΔΛ

3+ 3∇Θ0. 43V. 5272Λ. 67962T38IT 32TΘ∇

96∇V94T20. +9145IΛ. T92Θ93Δ2VI6IΛ

VΛ. ΔI5IV4. ∇Θ36V55. VΔΔ.Λ5Λ

VΔ. Θ8V6T9∇. +∇7Λ. Θ3Λ:

∇43406Δ. 8Δ9ΔΛ60 4∇Λ. ∇3Λ.

Tab. VIII.

ahl=und Caractern zu schreiben und diese Schrifft ein musterist Von einer so von jemand zu deterriren

Ȯ. 2ΛV. ΔOV9VΔ2VV. ΔOΛ

4VT. ϮO3V. ΔO. Ϯ3V2Λ.

3I. 2VVΔ. IV372ΔO. IV2. IΘΔ8OΛ

94740V. Λ53V. O3. ΔV5ϮV.

8O27208V.

. Θ. Δ. Δ. Δ. Θ. Λ:

.. 13. 14.–14 16.–20.–21.

Tab: IX.



